

Zbigniew Skoczylas

**Zadania i problemy
z
matematyki**



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2013

Zbigniew Skoczylas

**ZADANIA
I PROBLEMY
Z MATEMATYKI**



Wydanie drugie

Zbigniew Skoczylas
Politechnika Wrocławska
Instytut Matematyki i Informatyki
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki: IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1998, 2013 by Zbigniew Skoczylas

Książka w całości ani we fragmentach nie może być powielana ani rozpowszechniana za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto nie może być umieszczana ani rozpowszechniana w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład książki wykonano w systemie Scientific WorkPlace® 5.5

ISBN 978-83-89020-99-4

Wydanie II, Wrocław 2013
Oficina Wydawnicza GiS, www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Oficyna Wydawnicza ATUT

Spis treści

Wstęp	7
1. Algebra	9
2. Analiza matematyczna	15
3. Geometria	42
4. Matematyka dyskretna	57
5. Mechanika	63
6. Multifunkcje	71
7. Optymalizacja	75
8. Rachunek prawdopodobieństwa	91
9. Równania funkcyjne i różniczkowe	95
10. Teoria liczb	102
11. Zadania różne	108
Artykuły i książki o podobnej tematyce	114

Wstęp

Niniejszy zbiór jest przeznaczony dla osób, które lubią rozwiązywać nietypowe zadania z matematyki na poziomie akademickim. Sądzę, że zainteresuje on studentów i pracowników naukowych kierunków ścisłych. W książce umieściłem ponad 400 oryginalnych zadań i problemów z różnych działów matematyki. Zadania podobnych typów można spotkać w działach problemowych czasopism, na studenckich olimpiadach matematycznych oraz na forach internetowych, gdzie uczestnicy prezentują swoje problemy. Niektóre problemy mogą być wykorzystane, jako tematy prac licencjackich lub magisterskich.

Zadania i problemy podzieliłem na tradycyjne działy matematyki, ale nie uporządkowałem ich według stopnia trudności. W książce stosuję standardowe oznaczenia. Aby ułatwić zrozumienie niektórych zadań, dołączyłem do nich rysunki. Nie podaję odpowiedzi, wskazówek, rozwiązań ani dowodów. Problemy, które są hipotezami, oznaczyłem literą **(H)**, a zadania, których nie potrafię rozwiązać - literą **(N)**. Na stronie internetowej www.im.pwr.wroc/~skoczylas umieściłem rozwiązania zadań przysłane przez Czytelników. Podaję tam także listę książek zawierających podobne zadania.

Do drugiego wydania zbioru dodałem około 200 nowych zadań. Jednocześnie usunąłem te problemy, które - jak się okazało - są znane. Ponadto do 120 zadań dołączyłem rysunki. Poprawiłem także zauważone błędy i usterki.

Dziękuję Czytelnikom, którzy przysłali rozwiązania problemów z pierwszego wydania zbioru. Dziękuję Im także za informacje o błędach lub o tym, że problem jest znany. Będę wdzięczny za wszelkie uwagi o obecnym wydaniu.

Zbigniew Skoczylas

Zadania i problemy wybrane
z drukowanej wersji książki

Algebra

1. Macierze $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}$ są ustalone. Pokazać, że jeżeli dla każdej macierzy $X \in \mathbb{M}_{n \times n}$ zachodzi warunek

$$\det(A + X) = \det(B + X),$$

to $A = B$. **(N)** Czy otrzymamy tę równość, gdy założymy, że macierze X są wybierane z pewnej bazy przestrzeni $\mathbb{M}_{n \times n}$?

2. Pokazać, że dla dowolnych parami różnych punktów $P_1, P_2, \dots, P_k$ ($k \geq 2$) przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) zachodzi nierówność

$$(-1)^k \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kk} \end{vmatrix} < 0,$$

gdzie d_{ij} oznacza odległość euklidesową punktów P_i, P_j . **(H)** Udowodnić, że jeśli w nierówności wpisać symbol $(\leq)$ zamiast $(<)$, to będzie ona prawdziwa dla punktów dowolnej przestrzeni unormowanej. Czy słaba nierówność jest prawdziwa dla punktów dowolnej przestrzeni metrycznej?

3. Pokazać, że w dowolnej nieskończenie wymiarowej przestrzeni liniowej istnieją podprzestrzenie V_i ($i \in \mathbb{Z}$), które spełniają obustronny ciąg zawierania

$$\dots \supset V_{-2} \supset V_{-1} \supset V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots,$$

przy czym żadne z nich nie jest równością.

4. Jaką postać mają przekształcenia liniowe $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), które odwzorowują zbiór $[0, \infty)^n$ na siebie?
5. Pokazać, że prosta $\text{Im}(z) = \text{Re}(z)$ jest osią symetrii zbioru pierwiastków zespolonych wielomianu

$$z^4 - (1 + i)z^3 + 5iz^2 + (3 - 3i)z - 4.$$

6. Znaleźć funkcję ciągłą $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że rodzina funkcji

$$\{f(x + \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

jest liniowo niezależna w przestrzeni $C(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$. **(N)** Czy taka rodzina może być bazą przestrzeni $C(\mathbb{R})$?

7. Dla liczby naturalnej $n \geq 2$ niech $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$ oznacza zbiór pierwiastków n -tego stopnia z jedności (o rosnących argumentach głównych). Obliczyć sumy:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n k\omega_k; \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{k}.$$

Analiza matematyczna

1. Pierwszy wyraz ciągu jest dowolną liczbą wymierną. Kolejny wyraz ciągu tworzymy dopisując na końcu licznika i mianownika poprzedniego wyrazu dowolną cyfrę (niekoniecznie tę samą). Pokazać, że ciąg otrzymany tym sposobem jest zbieżny.
2. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geq 2$ niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą kolejnymi ekstremami lokalnymi wielomianu

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n)[x-(n+1)].$$

Pokazać, że ciąg $t_k = x_k - k$ ($1 \leq k \leq n$) jest rosnący.

3. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mają dodatnie wyrazy oraz są zbieżne. Ponadto dla każdej liczby naturalnej k zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^k = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^k.$$

Pokazać, że ciąg (b_n) jest permutacją ciągu (a_n) . **(H)** Pokazać, że fakt ten jest prawdziwy także dla szeregów zespolonych o niezerowych wyrazach.

4. Funkcje f, g są rosnące na przedziale $[0, 1]$. Ponadto, dla każdej liczby naturalnej n spełniają warunek

$$\int_0^1 f^n(x) dx = \int_0^1 g^n(x) dx.$$

Pokazać, że $f = g$ na $[0, 1]$ poza zbiorem przeliczalnym.

5. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{n \sin \left(\sin \left(\dots \left(\sin \frac{1}{n} \right) \right) \right)}^{n \text{ sinusów}}.$$

6. Pokazać, że szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ można podzielić na nieskończoną liczbę rozłącznych szeregów:
a) zbieżnych; b) rozbieżnych.

7. Granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0+} [\operatorname{ctg}(x^n) \operatorname{ctg}(x^m) - \operatorname{ctg}(x^p) \operatorname{ctg}(x^q)]$$

wyrazić w zależności od $n, m, p, q \in \mathbb{N}$.

8. Pokazać, że dla każdej funkcji f ciągłej i dodatniej na przedziale $[0, 1]$ zachodzi równość

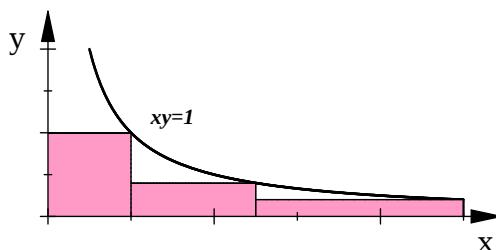
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)} dx \right]^n = \exp \left[\int_0^1 \ln f(x) dx \right].$$

9. Pokazać, że dla ustalonej liczby naturalnej $n \geq 4$ ciąg

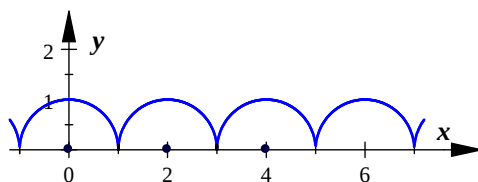
$$x_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\sin x)^k + (\cos x)^{n-k} \right] dx \quad \left(1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right)$$

jest malejący.

10. Pokazać, że jeżeli w obszar ograniczony dodatnimi półosiami układu współrzędnych oraz hiperbolą $xy = 1$ wpiszemy dowolne przylegające do siebie prostokąty tak, aby ich podstawy pokryły oś Ox , to ich łączne pole będzie nieskończone.



11. Znaleźć funkcję elementarną, której wykres przedstawiono poniżej.



12. Funkcja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz spełnia warunek

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = 0,$$

gdzie B oznacza kulę jednostkową o środku w początku układu współrzędnych. Pokazać, że istnieje sześcian V , dla którego zachodzi równość

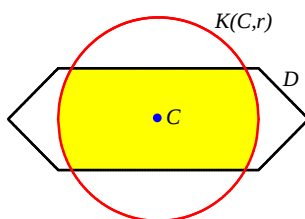
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = 0.$$

13. Funkcje $f(x) + f(x^3)$, $f(x) + f(x^5)$ są ciągłe na $\mathbb{R}$. Czy stąd wynika, że funkcja f jest ciągła?

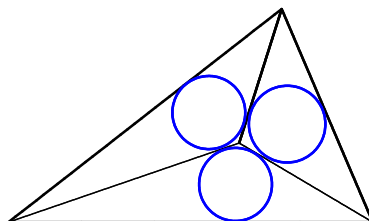
Geometria

Ciałem wypukłym w $\mathbb{R}^n$ nazywany zbiór zwarty i wypukły o niepustym wnętrzu. Mówimy, że ciało wypukłe jest gładkie, gdy jego brzeg jest gładki.

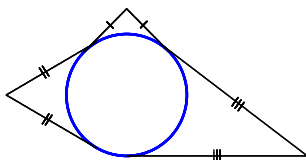
1. a) Pokazać, że dowolny wielościan wypukły w $\mathbb{R}^3$ można podzielić płaszczyzną na dwa wielościany o tych samych objętościach oraz o jednakowych sumach pól ścian i sumach długości krawędzi.
b) Udowodnić analogiczne twierdzenie o wielościanach wypukłych w $\mathbb{R}^n$.
2. **(H)** Niech C będzie środkiem masy jednorodnego ciała wypukłego D na płaszczyźnie. Pokazać, że jeżeli dla każdego $r > 0$ środek masy przekroju $D \cap K(C, r)$, gdzie $K(C, r)$ oznacza koło domknięte o środku C i promieniu r , pokrywa się z C , to istnieje liczba naturalna $n \geq 2$ taka, iż zbiór D po obrocie o kąt $\frac{2\pi}{n}$ wokół punktu C nałoży się na siebie. Sformułować analogiczną hipotezę dla ciał wypukłych w $\mathbb{R}^n$.



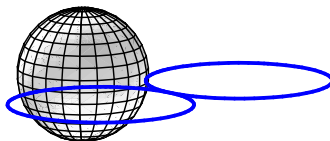
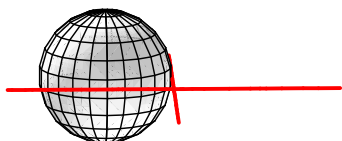
3. a) Pokazać, że we wnętrzu dowolnego trójkąta istnieje punkt taki, iż promienie kół wpisanych w trójkąty powstałe z jego połączenia z wierzchołkami trójkąta, są jednakowe.



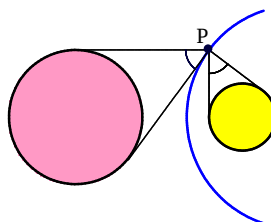
- b) Pokazać, że we wnętrzu dowolnego sympleksu w $\mathbb{R}^n$ ($n > 3$) istnieje punkt taki, iż promienie kul n -wymiarowych wpisanych w sympleksy powstałe z połączenia tego punktu z wierzchołkami sympleksu, są jednakowe.
4. **(H)** Styczne poprowadzone do koła z dowolnego punktu zewnętrznego mają jednakową długość. Czy ta własność charakteryzuje koła wśród gładkich ciał wypukłych na płaszczyźnie?



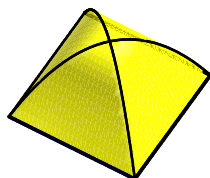
5. a) Dwie proste w $\mathbb{R}^3$ przecinają się pod kątem $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Kulę przetaczamy przez proste w ten sposób, aby cały czas była styczna do każdej z nich. Po jakiej krzywej porusza się środek kuli?
- b) Dwa okręgi o promieniu 1 są styczne i leżą w jednej płaszczyźnie. Kulę o promieniu r przetaczamy między okręgami w ten sposób, aby cały czas była styczna do każdego z nich. Po jakiej krzywej porusza się środek kuli?



6. Dwa rozłączne koła o różnych promieniach leżą na płaszczyźnie. Wyznaczyć zbiór punktów płaszczyzny, z których oba koła są widoczne pod tym samym kątem.



7. W namiocie o wysokości 1 podłoga jest kwadratem o boku $\sqrt{2}$. Dwie jednakowe rurki, które podtrzymują powłokę namiotu, są wygięte w kształcie łuku paraboli i zamocowane w przeciwległych rogach podłogi oraz połączone pod kątem prostym w jego wierzchołku. Obliczyć pole ścian bocznych namiotu.



8. Pokazać, że rzut środka masy ciała wypukłego w $\mathbb{R}^3$ (rozumianego jako jednorodne ciało materialne) na pewną płaszczyznę pokrywa się ze środkiem masy jego rzutu (traktowanego jako płaskie jednorodne ciało materialne) na tę płaszczyznę.

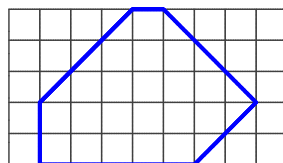
Matematyka dyskretna

1. W brydża grają dwie pary N i S oraz E i W. Licytację rozpoczyna gracz N, a kończą ją trzy kolejne odzywki pas. Dopuszczalne są tylko następujące odzywki (podajemy je w kolejności rosnącej):

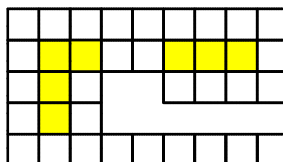
$$1\clubsuit, 1\diamondsuit, 1\heartsuit, 1\spadesuit, 2\clubsuit, 2\diamondsuit, 2\heartsuit, 2\spadesuit, \dots, 7\clubsuit, 7\diamondsuit, 7\heartsuit, 7\spadesuit.$$

Każdą odzywkę inną niż pas jeden z graczy drugiej pary może skontrolować. Tę kontrolę może z kolei rekontrować dowolny gracz z pary zgłaszającej odzywkę. Iloma sposobami może przebiegać licytacja? Na ile sposobów można wylicytować 7 bez atu z rekontrą?

2. Współrzędne wszystkich wierzchołków wielokąta na płaszczyźnie są liczbami całkowitymi, a jego boki są równoległe do jednej z prostych: $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$. Utożsamiamy wielokąty, które są przystające. Ile jest różnych rodzajów wielokątów:
 - a) wypukłych;
 - b) niewypukłych,
 o polu $\frac{n}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$)?



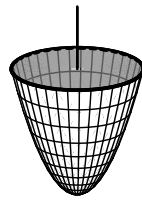
3. (N) Kwadratowe palety z towarem położono na placu w jednej warstwie tak, że utworzyły prostokąt o wymiarach $m \times n$ (palety są oznaczone liczbami od 1 do mn). Paletę można zabrać z placu wózkiem widłowym, gdy jest umieszczona na obwodzie albo, gdy można do niej dojechać korytarzem utworzonym z pozostałych palet. Na ile sposobów można wywieźć palety? Na rysunku ukazujemy przykładowe rozmieszczenie palet. Palety oznaczone kolorem białym można wywieźć z placu, a żółtym - nie.



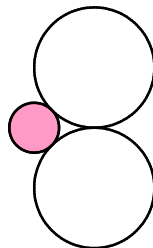
4. (N) Wewnętrzne krawędzie prostopadłościennych skrzyni mają długość p, q, r ($p, q, r \in \mathbb{N}$). Ile różnych prostopadłościennych pudełek o krawędziach naturalnych można umieścić w skrzyni? Za każdym razem wkładamy tylko jedno pudełko, ale jego ściany nie muszą być równoległe do ścian skrzyni.

Mechanika

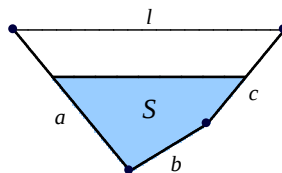
1. Jednorodna bryła jest ograniczona paraboloidą $z = a(x^2 + y^2)$ ($a > 0$) oraz płaszczyzną $z = 1$. Dla jakich wartości parametru a , bryła ta dowolnie położona „na boku”, powróci do stanu z pionową osią symetrii, czyli będzie „wańką-wstańką”?



2. Na poziomym stole leżą dwie monety o promieniu R oraz moneta o promieniu r ($r < R$). Monety są parami styczne. Monetę o promieniu r wsuwamy między dwie pozostałe (wzdłuż osi symetrii układu). Po jakich krzywych będą poruszać się środki dużych monet?



3. „Płaski zbiornik” zbudowany jest z trzech połączonych przegubowo nieważkich prętów o długościach a, b, c . Końce prętów są przymocowane przegubowo do poziomej prostej w odległości $l < a + b + c$. Do zbiornika wiano „płaską wodę” o polu S . Określić położenie prętów.



4. Wyznaczyć siłę przyciągania grawitacyjnego jednorodnej kuli o masie M i promieniu R oraz jednorodnego nieskończonego pręta o gęstości liniowej masy λ , położonego w odległości $d > R$ od środka kuli.

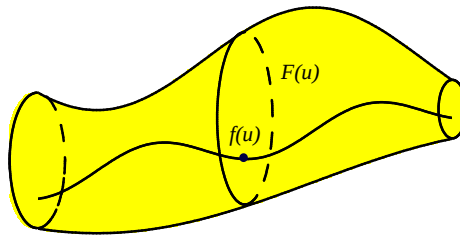
Multifunkcje

Na początku rozdziału wprowadzimy podstawowe pojęcia teorii multifunkcji. Niech (V, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Przez $\text{clbd}(V)$ oznaczmy rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów domkniętych i ograniczonych przestrzeni V , a przez $\text{comp}(V)$ - rodzinę niepustych podzbiorów zwartych tej przestrzeni. Dla pary $A, B \in \text{clbd}(V)$ określamy odległość Hausdorffa:

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \rho(x, y) \right\}.$$

Niech U także będzie przestrzenią metryczną. Multifunkcją nazywamy przekształcenie $F : U \rightarrow \text{clbd}(V)$, a jej selekcją - funkcję $f : U \rightarrow V$, która spełnia warunek:

$$f(u) \in F(u) \quad \text{dla } u \in U.$$



Ponieważ U i $\text{clbd}(V)$ są przestrzeniami metrycznymi, więc można rozważać multifunkcje i selekcje ciągłe.

Niech $a > 0$ oraz niech B^n oznacza kulę jednostkową w $\mathbb{R}^n$. Rozważmy multifunkcję $F : (-a, a) \times B^n \rightarrow \text{clbd}(\mathbb{R}^n)$. Zawieraniem różniczkowym nazywamy relację postaci:

$$\dot{x} \in F(t, x).$$

Rozwiązaniem klasycznym tego zawierania z warunkiem $x(0) = 0$ nazywamy funkcję $x : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($0 < \delta \leq a$), różniczkowalną w sposób ciągły, która spełnia inkluzję

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{dla } t \in (-\delta, \delta) \text{ oraz warunek } x(0) = 0.$$

W przestrzeni topologicznej zbiorem I kategorii Baire'a nazywamy zbiór, który można przedstawić, jako sumę przeliczalnej ilości zbiorów nigdzie gęstych, tj. zbiorów, których domknięcia mają puste wnętrza. Mówimy, że własność W jest typowa w przestrzeni metrycznej zupełnej X , gdy zbiór

$$\{x \in X : W(x)\}$$

jest rezydualny, tzn. jest dopełnieniem zbioru I kategorii Baire'a.

1. **(H)** Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi oraz niech A będzie podzbiorem zwartym X . Pokazać, że dowolną multifunkcję ciągłą

$$F : A \rightarrow \text{comp}(Y),$$

można aproksymować jednostajnie multifunkcjami ciągłymi, których wartości są zbiorami skończonymi. Czy można zagwarantować, aby wartości multifunkcji aproksymującej miały jednakowe liczby elementów?

2. **(H)** Niech $\mathcal{C}$ oznacza rodzinę multifunkcji ciągłych $F : [0, 1] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$) z metryką zbieżności jednostajnej. Pokazać, że posiadanie przez multifunkcję selekcji ciągłej jest własnością typową¹ w rodzinie $\mathcal{C}$, tzn. dowieść, że rodzina $\mathcal{S}$ multifunkcji z $\mathcal{C}$, które mają selekcję ciągłą na $[0, 1]$, jest zbiorem rezydualnym w $\mathcal{C}$.

3. **(H)** Niech S^n oznacza sferę jednostkową w przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$. W rodzinie $\mathcal{C}$ multifunkcji ciągłych

$$F : S^n \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n),$$

z metryką zbieżności jednostajnej, rozważmy rodzinę $\mathcal{B}$ multifunkcji F , które spełniają uogólnione twierdzenia Borsuka-Ulama, tj. takich, że dla pewnego $x \in S^n$ zachodzi warunek

$$F(x) \cap F(-x) \neq \emptyset.$$

Pokazać, że spełnianie przez multifunkcję twierdzenia Borsuka-Ulama jest własnością typową w rodzinie $\mathcal{C}$. Podać przykład multifunkcji ciągłej $F : S^n \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, która nie ma selekcji ciągłej, ale dla pewnego $x \in S^n$ spełnia warunek $F(x) \cap F(-x) \neq \emptyset$.

4. **(H)** Niech B^n oznacza kulę jednostkową w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. W rodzinie $\mathcal{C}$ multifunkcji ciągłych

$$F : B^n \rightarrow \text{comp}(B^n),$$

z metryką zbieżności jednostajnej, rozważmy rodzinę $\mathcal{F}$ multifunkcji F , które mają własność punktu stałego, tj. dla pewnego $x \in B^n$ spełniają warunek

$$x \in F(x).$$

Pokazać, że posiadanie przez multifunkcję ciągłą punktu stałego jest własnością typową w rodzinie $\mathcal{C}$. Podać przykład multifunkcji ciągłej $F : B^n \rightarrow \text{comp}(B^n)$, która nie ma selekcji ciągłej, ale dla pewnego $x \in B^n$ spełnia warunek $x \in F(x)$.

5. **(H)** Niech n będzie liczbą parzystą. Czy zerowanie się ciągłego multipola wektorowego na sferze S^n , które jest styczne do sfery, jest własnością typową w rodzinie $\mathcal{C}$ wszystkich multipól ciągłych na sferze?

6. **(H)** W rodzinie $\mathcal{C}$ multifunkcji ciągłych

$$F : (-1, 1) \times B^n \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n) \quad (n \geq 2)$$

z metryką zbieżności jednostajnej, zbadać gęstość i ustalić kategorię Baire'a rodziny $\mathcal{K}$ multifunkcji ciągłych F , dla których zawieranie różniczkowe

$$\dot{x} \in F(t, x) \quad \text{z warunkiem } x(0) = 0$$

ma rozwiązanie klasyczne w pewnym otoczeniu punktu 0.

¹W 1984 r. pokazałem, że dla $m, n > 1$ posiadanie selekcji ciągłej jest własnością wyjątkową w rodzinie $\mathcal{C}$ multifunkcji ciągłych $F : [0, 1]^m \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, tzn. rodzina $\mathcal{S}$ multifunkcji ciągłych, które mają selekcję ciągłą, jest zbiorem brzegowym w $\mathcal{C}$. Można pokazać, że dla $m \in \mathbb{N}$ oraz $n = 1$ zachodzi równość $\mathcal{S} = \mathcal{C}$.

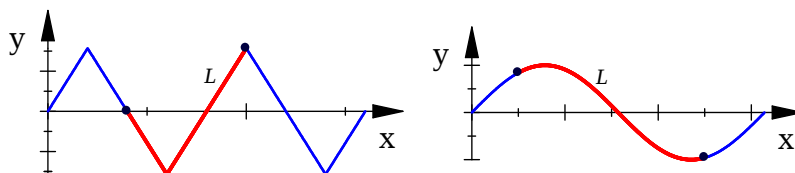
Optymalizacja

1. (N) Wąż o długości L pełźnie po krzywej:

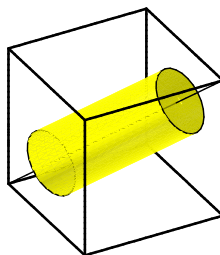
a) $y = \arcsin(\sin x)$; b) $y = \sin x$.

W jakim położeniu, odległość między głową i ogonem węża, będzie:

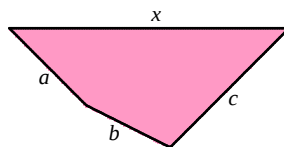
- i) najmniejsza; ii) największa?



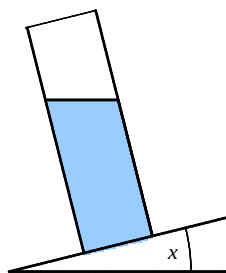
2. Wśród walców wpisanych w sześcian, o osiach pokrywających się z jego przekątną, znaleźć ten, który ma największą objętość.



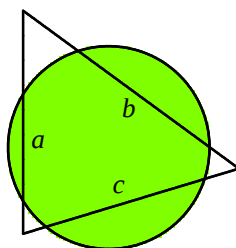
3. a) Niech a, b, c ($n \geq 3$) będą liczbami dodatnimi. Dla jakiej liczby dodatniej x , odpowiednio ukształtowany czworokąt o kolejnych bokach długości a, b, c, x ma największe pole?



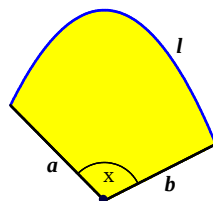
- b) (N) Niech $d_1, d_2, \dots, d_n$ ($n \geq 3$) będą liczbami dodatnimi. Dla jakiej liczby dodatniej x , odpowiednio ukształtowany $(n+1)$ -kąt o kolejnych bokach długości $d_1, d_2, \dots, d_n, x$, ma największe pole?
4. a) Nieważkie naczynie w kształcie walca o średnicy podstawy d stoi na równi pochyłej o kącie nachylenia α . Ile najwięcej wody można wlać do niego, aby nie przewróciło się?
- b) To samo naczynie napełniono wodą do wysokości h i postawiono na równi pochyłej o zmiennym kącie nachylenia. Dla jakiego największego kąta x naczynie nie przewróci się?



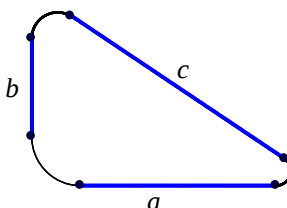
5. (N) W rodzinie ciał wypukłych na płaszczyźnie rozważmy dwie metryki: miarę różnicy symetrycznej zbiorów oraz metrykę Hausdorffa. W obu metrykach znaleźć koło, które najlepiej aproksymuje trójkąt o bokach a, b, c . Czy koło jest wyznaczone jednoznacznie?



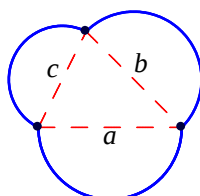
6. a) (N) Jedne końce dwóch prętów o długościach a i b połączono przegubowo, a do pozostałych przymocowano giętką linę o długości l ($l > |a - b|$). Jaki kąt x należy utworzyć między prętami i w jaki sposób uformować linę, aby pole obszaru ograniczonego nimi było największe?



- b) (N) Przez rurki o długościach a, b, c przeciągnięto linę o długości l ($l > a + b + c$) i związano ją za końce. Jak należy ułożyć rurki na płaszczyźnie oraz jak uformować linę, aby obszar ograniczony nimi był największy? Założyć, że istnieje trójkąt o bokach a, b, c .

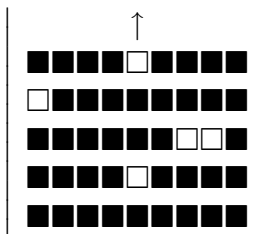


- c) (N) W wierzchołkach trójkąta o bokach a, b, c zamocowano oczka, przez które przewleczono sznurek o długości l ($l > a + b + c$). Jak należy go uformować, aby ograniczał największe pole?



Rachunek prawdopodobieństwa

1. **(N)** Losowy zbiór Cantora. W chwili $t = 0$ z przedziału $[0, 1]$ usunięto odcinek o długości $\frac{1}{3}$. Wyboru odcinka dokonano losowo: z jednakowym prawdopodobieństwem mogły to być lewy, prawy albo środkowy. W kolejnych sekundach postępowanie jest powtarzane. Najpierw wybierany jest losowo przedział spośród dotychczas otrzymanych (wybór odbywa się z prawdopodobieństwami proporcjonalnymi do długości dotychczas utworzonych przedziałów), a następnie usuwany losowy odcinek o długości równej $\frac{1}{3}$ długości wybranego odcinka. Fragment ten jest odcinany z końca albo ze środka przedziału (z prawdopodobieństwami $\frac{1}{3}$).
 - a) Znaleźć wartość oczekiwaną liczby odcinków oraz wartość oczekiwaną długości najdłuższego odcinka po n sekundach.
 - b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną miary zbioru otrzymanego po nieskończonej liczbie losowań.
2. Na parkingu samochody są ustawione w n rzędach po m pojazdów w każdym. Kierowcy przychodzą losowo na parking i chcą wyjechać swoimi pojazdami. Samochód może opuścić parking tylko wtedy, gdy we wszystkich poprzednich rzędach będzie wolne przynajmniej jedno miejsce.



Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszyscy kierowcy opuszczą parking bez czekania.

3. Widzowie przychodzą losowo do sali kinowej i zajmują swoje miejsca w ustalonym rzędzie. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że nikt nie będzie musiał prosić o przepuszczenie przez osoby, które usiadły wcześniej. Założyć, że rząd ma n miejsc, które można zajmować dochodząc z obu stron. Ponadto przyjąć, że jeżeli widz może zająć swoje miejsce bez proszenia o przepuszczenie, to tak zrobi.



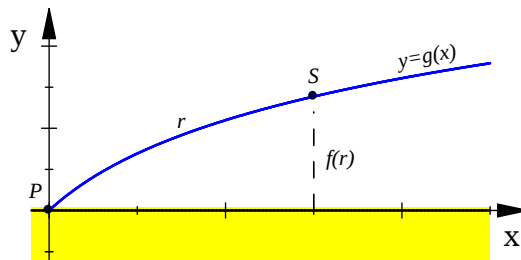
4. a) Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$. Pokazać, że zmienna losowa $Y(\omega) = 0, x_1 x_3 x_5 \dots$, gdzie $0, x_1 x_2 x_3 \dots$ oznacza rozwinięcie dziesiętne liczby $X(\omega)$, ma także rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$.
 - b) **(N)** Zmienna losowa T ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Czy zmienna losowa $Z(\omega) = \pm \dots x_4 x_2 x_0, y_2 y_4 y_6 \dots$, gdzie $\pm \dots x_2 x_1 x_0, y_1 y_2 y_3 \dots$ oznacza rozwinięcie dziesiętne liczby $T(\omega)$, ma także rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$?

Równania funkcyjne i różniczkowe

1. (N) Statek S po przepleśnięciu r mil od portu P znajduje się w odległości:

a) $f(r) = \frac{r}{1+r}$; b) $f(r) = \frac{r^2}{1+r}$

od prostoliniowego brzegu (oś x). Znaleźć równanie $y = g(x)$ toru statku. Przyjąć, że trajektoria statku jest wykresem funkcji klasy C^1 .



2. (H) Niech $\mathcal{T}$ oznacza rodzinę niepustych i ograniczonych podzbiorów otwartych przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a $\lambda(X)$ - miarę Lebesgue'a zbioru $X \in \mathcal{T}$. Czy każda funkcja $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$, która dla dowolnych rozłącznych zbiorów $X, Y \in \mathcal{T}$ spełnia warunek:

$$f(X \cup Y) = \frac{\lambda(X)}{\lambda(X) + \lambda(Y)} \cdot f(X) + \frac{\lambda(Y)}{\lambda(X) + \lambda(Y)} \cdot f(Y),$$

ma postać $f(X) = p + k \cdot r(X)$, gdzie $r(X)$ oznacza środek masy jednorodnego zbioru X , p jest pewnym wektorem z $\mathbb{R}^n$, a k - liczbą rzeczywistą?

3. Znaleźć wszystkie wielomiany p , które dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$[p(x^3)]^2 \leq [p(x)]^6 \leq [p(x^2)]^3.$$

Rozwiązać tę nierówność w klasie funkcji ciągłych na $[1, \infty)$.

4. Znaleźć funkcje ciągłe $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, które zachowują iloczyn:

a) skalarny, tj. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^3$ spełniają równość

$$f(x) \circ f(y) = x \circ y;$$

b) wektorowy, tj. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^3$ spełniają równość

$$f(x) \times f(y) = x \times y;$$

c) mieszany, tj. dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ spełniają równość

$$[f(x) \times f(y)] \circ f(z) = (x \times y) \circ z.$$

Teoria liczb

W tym rozdziale p_k oznacza k -tą liczbę pierwszą, $\mathbb{P}$ - zbiór liczb pierwszych, a $\pi(n)$ - liczbę liczb pierwszych nie większych od n .

1. **(H)** Pokazać, że macierz kwadratowa dowolnie wypełniona nie powtarzającymi się elementami zbioru

$$\{\sqrt{p} : p \in \mathbb{P}\}$$

jest nieosobliwa.

2. Niech S_k ($k \in \mathbb{N}$) będzie wielomianem takim, że dla każdej liczby naturalnej n mamy

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = S_k(n).$$

Znaleźć wszystkie pary (k, l) ($k < l$) liczb naturalnych takie, że wielomian $S_l(x)$ jest podzielny przez wielomian $S_k(x)$.

3. Pokazać, że 410 jest największą liczbą naturalną, przez którą jest podzielny wyznacznik każdego sudoku. Czy każde sudoku jest macierzą nieosobliwą?
4. Dla liczby naturalnej $n \geq 2$ niech $\bar{s}_n$ oznacza „średnią liczbę pierwszą” spośród liczb pierwszych nie większych od n . Pokazać, że liczba $\bar{s}_n$ jest asymptotycznie równa $\frac{n}{2}$, gdy $n \rightarrow \infty$. Formalnie, niech

$$\bar{s}_n = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_{\pi(n)}}{\pi(n)}.$$

Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{s}_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

5. Znaleźć wszystkie pary $(x, n) \in \mathbb{Q} \times \{2, 3, 4, \dots\}$ takie, że:

a) $x^n - \lfloor x^n \rfloor = 0.123456789$; b) $x^n - \lfloor x^n \rfloor = 0.0123456789$.

6. **(H)** Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

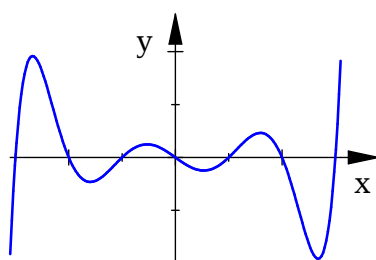
$$(-1)^n \det \begin{bmatrix} \ln 2 & \ln 3 & \ln 4 & \dots & \ln(1+n) \\ \ln 3 & \ln 4 & \ln 5 & \dots & \ln(2+n) \\ \ln 4 & \ln 5 & \ln 6 & \dots & \ln(3+n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln(n+1) & \ln(n+2) & \ln(n+3) & \dots & \ln(n+n) \end{bmatrix} < 0.$$

Ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \det \begin{bmatrix} \ln 2 & \ln 3 & \ln 4 & \dots & \ln(1+n) \\ \ln 3 & \ln 4 & \ln 5 & \dots & \ln(2+n) \\ \ln 4 & \ln 5 & \ln 6 & \dots & \ln(3+n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln(n+1) & \ln(n+2) & \ln(n+3) & \dots & \ln(n+n) \end{bmatrix} = 0.$$

Zadania różne

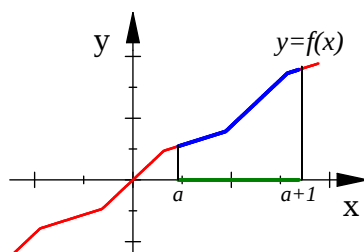
1. a) Pokazać, że żadnego łuku wykresu wielomianu stopnia co najmniej drugiego nie można przesunąć o wektor tak, aby przystawał do innego łuku wykresu.



2. Czy każda funkcja ciągła i rosnąca na $\mathbb{R}$, która ma następującą własność: długość fragmentu wykresu położonego nad każdym przedziałem długości 1 jest taka sama, ma postać:

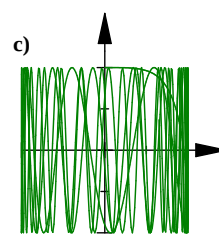
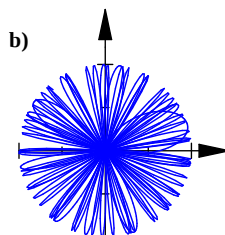
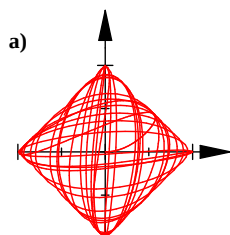
$$f(x) = bx + g(x - \lfloor x \rfloor) + g(1) \lfloor x \rfloor,$$

gdzie g jest pewną funkcją ciągłą i rosnącą na przedziale $[0, 1]$, a b - pewną nieujemną stałą?



3. Pokazać, że krzywa Γ jest zawarta w zbiorze $D \subset \mathbb{R}^2$ i wypełnia go gęsto:

- a) $\Gamma = \{(\sin t \cos t^2, \cos t \sin t^2) : t \in \mathbb{R}\}$, $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$;
 b) $\Gamma = \{(\sin t \sin t^2, \cos t \sin t^2) : t \in \mathbb{R}\}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
 c) $\Gamma = \{(\sin t, \cos t^2) : t \in \mathbb{R}\}$, $D = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.



Artykuły i książki o podobnej tematyce

1. Asuman G. Aksoy, Mohamed A. Khamisi, **A Problem Book in Real Analysis**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 2010.
2. Titu Andreescu, Dorin Andrica, **Complex numbers from A to ... Z**, Birkhäuser, Boston, 2006.
3. Titu Andreescu, Dorin Andrica, **Number Theory. Structures, Examples and Problems**, Birkhäuser, Boston, 2009.
4. Titu Andreescu, Oleg Mushkarov, Luchezar Stoyanov, **Geometric Problems on Maxima and Minima**, Birkhäuser, Boston, 2006.
5. Gerald L. Alexanderson, Leonard F. Klosinski, Loren C. Larson, **The William Lowell Putnam Competition. Problems and Solutions, 1965–1984**, Mathematical Association of America, New York 1985.
6. Ed. by Vladimir I. Arnold, **Arnold's Problems**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York and PHASIS, Moscow 2005.
7. Vladimir I. Arnold, **Matematičeskij trivium - I**, Usp. Mat. Nauk, Vol. 46, No 1 (1991), str. 225-232.
8. Vladimir I. Arnold, **Matematičeskij trivium - II**, Usp. Mat. Nauk, Vol. 48, No 1 (1993), str. 211-222.
9. Józef Banaś, Stanisław Wędrychowicz, **Zbiór zadań z analizy matematycznej**, PWN, Warszawa 2012.
10. Piotr Biler, Alfred Witkowski, **Problems in Mathematical Analysis**, Series: Pure and Applied Mathematics, Vol. 132, Marcel Decker, New York 1990.
11. Piotr Biler, Tadeusz Nadzieja, **Problems and Examples in Differential Equations**, Series: Pure and Applied Mathematics, Vol. 164, Marcel Decker, New York–Basel 1992.
12. Marcel Berger, P. Pansu, J. P. Berry, X. Saint-Raymond, **Problems in Geometry**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 1984.
13. Béla Bollobás, The Art of Mathematics. **Coffee Time in Memphis**, Cambridge University Press, Cambridge 2007.
14. Vladimir Boltyanski, Horst Martini, Petru S. Sołtan, **Excursions into Combinatorial Geometry**, Springer, Berlin 1997.
15. Daniel D. Bonar, Michael J. Khoury, **Real Infinite Series**, Series: Classroom Resource Materials, Mathematical Association of America, Washington 2006.

16. Peter Brass, William Moser, János Pach, **Research Problems in Discrete Geometry**, Springer, New York 2005.
17. Judita Cofman, **Numbers and Sharpes - Revisited. More Problems for Young Mathematicians**, Clarendon Press, Oxford 1995.
18. Judita Cofman, **What to Solve?, Problems and Suggestions for Young Mathematicians**, Oxford University Press, Oxford 1990.
19. **Contests in Higher Mathematics 1949–1961. In Memoriam Miklos Schweitzer**, Akademiai Kiado, Budapest 1968.
20. Hallard T. Croft, Keneth J. Falconer, Richard K. Guy, **Unsolved Problems in Geometry**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 1991.
21. Artur Engel, **Problem–Solving Strategies**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 1997.
22. Dušan Djukić, Vladimir Janković, Ivan Matić, Nikola Petrović, **The IMO Compendium. A Collections of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 2006.
23. B. P. Demidowicz, **Zbiór zadań z analizy matematycznej, T. 1–3**, Wydawnictwo „Naukowa Książka”, Lublin 1992–93.
24. A. A. Ya. Dorogovtsev, **Analiza matematyczna. Zbiór zadań**, Wydawnictwo „Szkoła Wyższa”, Moskwa 1987.
25. Ed. A. Ya. Dorogovtsev, **Mathematics Today**, No. 1- 6, Naukova Dumka, Kijev 1983-90.
26. Martin Ericson, **Aha! Solutions**, Spectrum, Mathematical Association of America, Washington 2009.
27. Dmitry Fomin, Alexey Kirichenko, **Leningrad Mathematical Olympiad 1987-1991**, MathPro Press, Westford 1994.
28. Bernard R. Gelbaum, **Problems in Real and Complex Analysis**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 1992.
29. Răzvan Gelca, Titu Andreescu, **Putnam and Beyond**, Springer, New York 2007.
30. George T. Gilbert, Mark I. Krusemeyer, Loren C. Larson, **The Wohascum County Problem Book**, Mathematical Association of America, New York 1993.
31. Ed. Rick Gillman, **A Frenly Mathematics Competitions. 35 Years of Teamwork in Indiana**, Mathematical Association of America, New York 2003.
32. Andrew M. Gleason, Robert. E. Greenwood, Leroy M. Kelly, **The William Lowell Putnam Competition. Problems and Solutions, 1938–1964**, Mathematical Association of America, New York 1980.
33. Radosław Grzymkowski, Roman Wituła, **Metody rachunkowe w algebrze, cz. I**, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2000.

34. Radosław Grzymkowski, Roman Wituła, **Wybrane zagadnienia z funkcji zespolonych i transformaty Laplace’a**, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2001.
35. Richard K. Guy, **Unsolved Problems in Number Theory**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 1994.
36. Paul R. Halmos, **Linear Algebra Problem Book**, Dolciani Mathematical Expositions - No. 16, Mathematical Association of America, Washington 1995.
37. Paul R. Halmos, **Problems for Mathematicians, Young and Old**, Dolciani Mathematical Expositions - No. 12, Mathematical Association of America, Washington 1991.
38. G.H. Hardy, **A Course of Pure Mathematics**, Cambridge University Press, Cambridge 2005.
39. Jiří Herman, Radan Kučera, Jaromír Šimša, **Equations and Inequalities. Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory**, Canadian Mathematical Society, Springer, New York 2000.
40. Edyta Hetmaniok, Damian Słota, Roman Wituła, **Twierdzenia o wartościach średnich**, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2012.
41. Wiesława Kaczor, Maria Nowak, **Zadania z analizy matematycznej, cz. I, Liczby rzeczywiste, ciągi i szeregi liczbowe**, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
42. Wiesława Kaczor, Maria Nowak, **Zadania z analizy matematycznej, cz. II, Funkcje jednej zmiennej - rachunek różniczkowy**, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
43. Wiesława Kaczor, Maria Nowak, **Zadania z analizy matematycznej, cz. III, Całkowanie**, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
44. Kiran S. Kedlaya, Bjorn Poonen, Ravi Vakil, **The William Lowell Putnam Competition. Problems and Solutions, 1985–2000**, Mathematical Association of America, New York 2002.
45. Victor Klee, Stan Wagon, **Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory**, Dolciani Mathematical Expositions - No. 11, Mathematical Association of America, Washington 1991.
46. Péter Komjáth, Vilmos Totik, **Problems and Theorems in Classical Set Theory**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 2006.
47. Loren C. Larson, **Problem–Solving Through Problems**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 1992.
48. Ed. Andy Liu and Bruce Shawyer, **Problems from Murray Klamkin**, Mathematical Association of America and Canadian Mathematical Society, Washington 2009.
49. Edward Lozansky, Cecil Rousseau, **Winning Solutions**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 1996.
50. B. M. Makarov, M. G. Goluzina, A. A. Lodkin, and A. N. Podkorytov, **Selected Problems in Real Analysis**, American Mathematical Society, New York, 1992

51. Ed. R. Daniel Mauldin, **The Scottish Book**, Birkhauser Verlag, Basylea, 1981.
52. R. Daniel Mauldin, Stanisław M. Ulam, **Mathematical Problems and Games**, Advances in Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1987.
53. Donald J. Newman, **A Problem Seminar**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 1998.
54. Andrzej Nowicki, **Podróże po imperium liczb, Cz. 1-15**, Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn i Toruń 2008-2011.
55. Oprac. Edward Piegat, **Zadania Hugona Steinhausa - znane i nieznane**, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2005.
56. George Polya, Gabor Szegő, **Problems and Theorems in Analysis I, Integral Calculus. Theory of Functions**, Series: Classics in Mathematics, Springer, New York 1998.
57. George Polya, Gabor Szegő, **Problems and Theorems in Analysis. Volume II, Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry**, Series: Classics in Mathematics, Springer, New York 1998.
58. Franciszek Prus-Wiśniowski, **Szeregi rzeczywiste**, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2005.
59. Edmond Ramis, Claude Deschamps, Jacques Odoux, **Analyse. Exercices avec solutions**, Tome I, Masson, Paris 1984.
60. Edmond Ramis, Claude Deschamps, Jacques Odoux, **Analyse. Exercices avec solutions**, Tome II, Masson, Paris 1985.
61. Robert Siba, Patryk Miziula, **Zbiór zadań z analizy i algebry**, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2013.
62. Ed. by Stanley Rabinowitz, **Index to Mathematical Problems 1980-1984**, MathPro Press, Westford 1992.
63. Ed. by Stanley Rabinowitz and Mark Bowron, **Index to Mathematical Problems 1975-1979**, MathPro Press, Westford 1999.
64. Szymon Rabsztyn, Damian Słota, Roman Wituła, **Funkcje gamma i beta**, Tom I, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2012.
65. Szymon Rabsztyn, Damian Słota, Roman Wituła, **Funkcje gamma i beta**, Tom II, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2012.
66. Teodora-Liliana T. Rădulescu, Wincentiu D. Rădulescu, Titu Andreescu, **Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis**, Springer, New York 2009.
67. Zbigniew Romanowicz, Edward Piegat, **100 zadań z blyskiem**, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 1996.
68. B. I. Rożkow, G. D. Kurdewanidze, N. G. Panfiow, **Zbiór zadań ze studenckich olimpiad matematycznych**, Wydawnictwo UDN, Moskwa 1987.

69. W. A. Sadowniczyj, A. S. Podkolzin, **Zadania studenckich olimpiad matematycznych**, Wydawnictwo „Nauka”, Moskwa 1978.
70. W. A. Sadowniczyj, A. A. Grigorian, S. B. Koniagin, **Studenckie olimpiady matematyczne**, Wydawnictwo Uniwersytetu Moskiewskiego, Moskwa 1987.
71. Wacław Sierpiński, **250 zadań z elementarnej teorii liczb**, Biblioteczka matematyczna, WSiP, Warszawa 1986.
72. Zbigniew Skoczylas, **Category Theorem for Family of Continuous Multifunctions**, Bull. Pol. Sci., Ser. Math. Vol. 84 (1985), pp.
73. Christopher G. Small, **Functional Equations and How to Solve Them**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 2007.
74. Florentyn Smarandache, Definition, **Solved and Unsolved Problems, Conjectures and Theorems in Number Theory and Geometry**, Ed. By M.L. Perez, Xiquan Publishing House, 2000.
75. Florentin Smarandache, **Only Problems, Not Solutions!**, Xiquan Publishing House, Phoenix, Chicago 1993.
76. Alexander Soifer, **The Colorado Mathematical Olympiad and Further Explorations. From the Mountains of Colorado to the Peaks of Mathematics**, Springer, New York 2011.
77. Hugo Steinhaus, **100 zadań**, Przedsiębiorstwo Handlowo-Usługowe DPI, Warszawa 1993.
78. Paulo N. de Souza, Jorge-Nuno Silva, **Berkeley Problems in Mathematics**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 2004.
79. Ed. Gabor J. Szekely, **Contests in Higher Mathematics. Miklos Schweitzer Competitions 1962–1991**, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 1995.
80. **The New Scottish Book (1946-1958)**, Wybór problemów: Hugo Steinhaus, Ed. Henryk Fast, Stanisław Świerczkowski, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 1965.
81. **The Otto Dunkel Memorial Problem Book**, Mathematical Association of America, New York 1957.
82. G. A. Tonojan, W. N. Sergeev, **Studenckie olimpiady matematyczne**, Wydawnictwo Uniwersytetu w Erewaniu, Erewań 1985.
83. Charles Trigg, **Mathematical Quickies**, McGraw–Hill Book Company, New York–London 1967.
84. Ed. Li Ta-Tsien, **Problems and Solutions in Mathematics. Major American Universities Ph.D. Qualifying Questions nad Solutions**, World Scientific, Singapur 1998.
85. Stanisław Marcin Ulam, **A Collection of Mathematical Problems**, Los Alamos Laboratories, New Mexico 1969.
86. Ed. N. B. Wasiliev, **Zadačnik "KBAHTA". Matematyka**, cz. 1- 3, Biuro "Kwantum", Moskwa 1997.

87. Roman Wituła, **Liczby zespolone, wielomiany oraz rozkłady na ułamki proste, Tom 1. Podstawowe operacje na liczbach zespolonych**, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
88. Roman Wituła, **Liczby zespolone, wielomiany oraz rozkłady na ułamki proste, Tom 2. Równania, nierówności oraz odwrotna transformata Laplace’a**, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
89. Roman Wituła, **Liczby zespolone, wielomiany oraz rozkłady na ułamki proste, Tom 3. Wybrane zagadnienia o wielomianach**, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
90. Paul Zeitz, **The Art and Craft of Problem Solving**, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2007.
91. Fuzhen Zhang, **Linear Algebra. Challenging Problems for Students**, The John Hopkins University Press, Baltimore and London 1996.

MATEMATYKA DLA STUDENTÓW POLITECHNIK

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Wstęp do analizy i algebry.
Teoria, przykłady, zadania

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1.
Definicje, twierdzenia, wzory

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1.
Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza
matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy

Teresa Jurliewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra i geometria
analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory

Teresa Jurliewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra i geometria
analityczna. Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra i geometria
analityczna. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2.
Definicje, twierdzenia, wzory

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2.
Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza
matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy

Teresa Jurliewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa.
Definicje, twierdzenia, wzory

Teresa Jurliewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa.
Przykłady i zadania

Teresa Jurliewicz, Algebra liniowa. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Elementy analizy
wektorowej. Teoria, przykłady, zadania

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Równania różniczkowe
zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania

Wojciech Kordecki, Rachunek prawdopodobieństwa
i statystyka matematyczna. Definicje, twierdzenia, wzory
Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Rachunek prawdo-
podobieństwa i statystyka matematyczna. Przykłady i zadania

Jolanta Długosz, Funkcje zespolone. Teoria, przykłady, zadania

ISBN 978-83-89020-99-4



9 788389 020994

www.gis.wroc.pl