

**RÓWNANIA
RÓŻNICZKOWE
ZWYCZAJNE**

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Teoria, przykłady, zadania

Wydanie szesnaste zmienione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2025

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1996 – 2025 by Marian Gewert and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie L^AT_EX.

ISBN 978–83–67234–19–1

Wydanie XVI zmienione, Wrocław 2025.
Oficina Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp	7
1. Równania różniczkowe pierwszego rzędu	9
1.1. Przykłady i pojęcia wstępne	9
1.2. Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych	18
1.3. Równania różniczkowe jednorodne	24
1.4. Równania różniczkowe liniowe	29
1.5. Równanie różniczkowe Bernoulliego	36
1.6. Równania różniczkowe zupełne. Czynniki całkujące*	40
1.7. Zagadnienia prowadzące do równań różniczkowych	49
1.8. Pojęcia wstępne dla równań różniczkowych drugiego rzędu	61
1.9. Równania drugiego rzędu sprowadzalne do równań pierwszego rzędu	63
2. Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu	72
2.1. Przykłady i pojęcia wstępne	72
2.2. Równania różniczkowe liniowe jednorodne	76
2.3. Równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach	86
2.4. Równania różniczkowe liniowe niejednorodne	96
2.5. Metoda uzmienniania stałych	98
2.6. Metoda współczynników nieoznaczonych	102
3. Układy równań różniczkowych	118
3.1. Przykłady i pojęcia wstępne	118
3.2. Układy równań różniczkowych liniowych	128
3.3. Układy jednorodne równań różniczkowych liniowych	137
3.4. Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach	141
3.5. Układy niejednorodne równań różniczkowych liniowych	163
3.6. Metoda uzmienniania stałych	165
3.7. Stabilność punktów równowagi układów autonomicznych	174

4. Elementy rachunku operatorowego	193
4.1. Przekształcenie Laplace'a	193
4.2. Metoda operatorowa rozwiązywania równań różniczkowych . .	198
4.3. Własności przekształcenia Laplace'a*	204
4.4. Splot funkcji*	207
Literatura	211
Skorowidz	212

Wstęp

Książka jest przeznaczona głównie dla studentów politechnik. Omówiono w niej równania różniczkowe zwyczajne w zakresie programu uczelni technicznych.

Podręcznik składa się ze wstępu, czterech rozdziałów podzielonych na podrozdziały, spisu literatury oraz skorowidza. W pierwszym rozdziale omówiono podstawowe typy równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu, metody ich rozwiązywania oraz przykładowe zastosowania. W tym rozdziale omówiono także równania rzędu drugiego sprowadzalne do równań rzędu pierwszego. Rozdział drugi poświęcony jest równaniom liniowym rzędu drugiego i metodom ich rozwiązywania. Rozdział trzeci traktuje o układach liniowych równań rzędu pierwszego oraz o stabilności punktów równowagi układów autonomicznych. Ostatni rozdział jest poświęcony przekształceniu Laplace'a i jego wykorzystaniu do rozwiązywania równań i układów równań różniczkowych liniowych.

W każdym rozdziale umieszczono przykłady z pełnymi rozwiązaniami. Pozwalają one Czytelnikowi lepiej przyswoić sobie materiał. Mają one także służyć, jako wzorzec przy rozwiązywaniu zadań, które wraz z odpowiedziami umieszczono po każdym przykładzie. Zadania w podręczniku są z reguły typowo rachunkowe, jednak ich samodzielne rozwiązanie daje gwarancję zrozumienia i opanowania materiału.

Materiał w podręczniku jest tak dobrany, aby student, który opanował analizę (całki nieoznaczone, pochodne zwyczajne i cząstkowe) oraz algebrę (pierwiastki wielomianów, układy równań liniowych), bez trudności zrozumiał i przyswoił zawartą w nim wiedzę.

W obecnym wydaniu podręcznika zmieniono układ materiału, dołączono omówienia zawartości poszczególnych rozdziałów. Ponadto, dołączono kilka nowych przykładów wraz z rozwiązaniami oraz zadań z odpowiedziami. Oprócz tego poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za uwagi o poprzednich wydaniach podręcznika

Marian Gewert

Zbigniew Skoczyła

1

Równania różniczkowe pierwszego rzędu

W pierwszym rozdziale podano podstawowe pojęcia i twierdzenia dotyczące równań różniczkowych pierwszego rzędu. Omówiono typy równań rzędu pierwszego takie jak: równania o rozdzielonych zmiennych, jednorodne, liniowe, Bernoulliego i zupełne. Przedstawiono również metody ich rozwiązywania. Podano też liczne przykłady wykorzystania równań zwyczajnych, jako modeli matematycznych w różnych dziedzinach. Na zakończenie rozdziału przedstawiono typy równań różniczkowych rzędu drugiego, które można sprowadzić do równań rzędu pierwszego.

1.1. Przykłady i pojęcia wstępne

Przykład 1.1. (a) Prędkość rozpadu pierwiastka promieniotwórczego jest ujemna i proporcjonalna do masy substancji, która w danej chwili jeszcze się nie rozpadła. Współczynnik proporcjonalności $k > 0$ będący wielkością charakterystyczną dla danej substancji, jest stały. Wyznaczyć zależność masy pierwiastka od czasu.

(b) Okres połowicznego zaniku* promieniotwórczego węgla C-14 wynosi 5 730 lat. Obliczyć, jaki procent masy wyjściowej tego pierwiastka pozostanie po 10 000 latach.

(c) Znaleźć krzywą przechodzącą przez punkt (t_0, y_0) , gdzie $t_0 > 0$, dla której odcinek stycznej zawarty między osiami układu współrzędnych dzieli się na równe części w punkcie styczności (rys.).

Rozwiązanie.

■ (a) Jeżeli przez $m(t)$ oznaczymy ilość substancji w chwili t , to powyższe prawo można zapisać w postaci

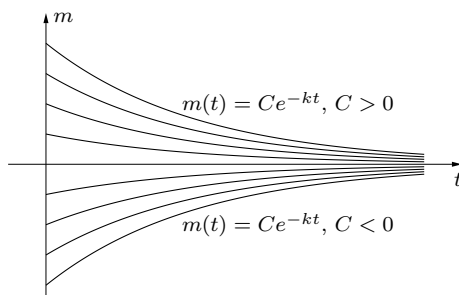
$$m'(t) = -km(t).$$

*Czas, po upływie którego rozpada się połowa masy pierwiastka.

Związek wyrażający zależność między funkcją $m(t)$, jej pochodną $m'(t)$ oraz zmienną niezależną t , nazywamy *równaniem różniczkowym rzędu pierwszego*. Łatwo sprawdzić, że każda funkcja postaci

$$m(t) = Ce^{-kt},$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$, spełnia otrzymane równanie, czyli jest jego *rozwiązaniem*. Wykres rozwiązania równania nazywamy jego *krzywą całkową* (rys.). Oczywiście z fizycznego punktu widzenia rozwiązania przy $C < 0$ nie mają sensu – masa nie może być ujemna. Pomijając ten aspekt nasuwa się pytanie, czy istnieją również inne funkcje będące rozwiązaniami rozważanego równania. Odpowiedź jest w tym przypadku negatywna. Powyższy wzór określa wszystkie możliwe rozwiązania rozważanego równania.



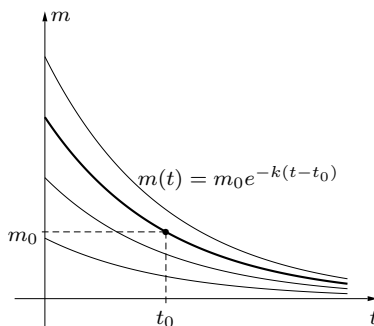
Na funkcję $m(t)$ możemy nałożyć pewne dodatkowe warunki, tzw. *warunki początkowe*. W naszym przypadku będzie to ilość m_0 substancji w pewnej chwili t_0 , co zapisujemy $m(t_0) = m_0$. Zatem podstawiając w otrzymanym wzorze $t = t_0$ i wykorzystując warunek $m(t_0) = m_0$ mamy

$$m_0 = Ce^{-kt_0}.$$

Stąd $C = m_0 e^{kt_0}$. Tak więc zależność pomiędzy masą substancji a czasem, określona jest wzorem

$$m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Wykres tego rozwiązania przedstawiono na rysunku poniżej. Zauważmy, że $m(t) \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow \infty$. Oznacza to, iż z upływem czasu ilość pierwiastka promieniotwórczego maleje do zera niezależnie od jego masy początkowej.



■ (b) Jak wynika z poprzedniego przykładu, zależność pomiędzy masą substancji promieniotwórczej m a czasem t (tutaj liczonym w latach) określona jest wzorem

$$m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)},$$

gdzie m_0 oznacza masę substancji w chwili początkowej t_0 , a k dodatni współczynnik proporcjonalności (zależny od czasu połowicznego zaniku). Przyjmując $t_0 = 0$, otrzymamy

$$m(t) = m_0 e^{-kt}.$$

Wykorzystując fakt, że okres połowicznego zaniku węgla C-14 wynosi 5 730 lat mamy

$$m(5730) = m_0 e^{-k5730} = \frac{m_0}{2}.$$

Stąd $k = \ln 2 / 5730$. Tak więc

$$m(t) = m_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{5730}t\right).$$

Zatem po 10 000 latach węgiel C-14 będzie miał masę

$$m(10000) = m_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{5730}10000\right).$$

Stąd procent masy wyjściowej pierwiastka, który pozostanie po 10 000 latach, wynosi

$$\frac{m(10000)}{m_0} \cdot 100\% = \exp\left(-\frac{\ln 2}{5730}10000\right) \cdot 100\% \approx 29.83\%.$$

(c) Niech $y = y(t)$, gdzie $t > 0$, będzie funkcją opisującą szukaną krzywą. Zatem

$$\frac{2y(t)}{2t} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Z interpretacji geometrycznej pochodnej wynika równość

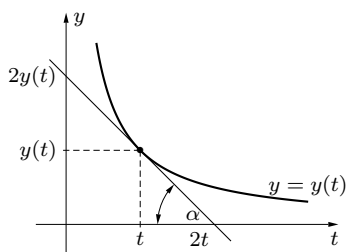
$$y'(t) = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Funkcja $y(t)$ spełnia zatem równanie różniczkowe

$$y = -ty'.$$

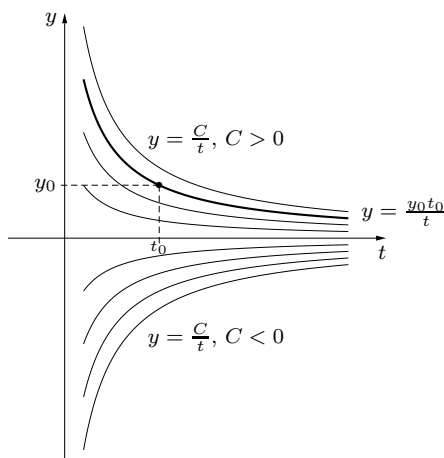
Łatwo sprawdzić, że dla dowolnej stałej rzeczywistej C funkcja określona wzorem

$$y(t) = \frac{C}{t}$$



jest rozwiązaniem otrzymanego równania (rys.). Jeżeli w rozwiązaniu podstawimy $t = t_0$ oraz wykorzystamy warunek $y(t_0) = y_0$, to, otrzymamy $y_0 = C/t_0$. Stąd $C = y_0 t_0$. Szukaną krzywą jest zatem hiperbola równoosiowa dana wzorem

$$y(t) = \frac{y_0 t_0}{t}.$$



Zadanie 1.2. (a) Z pewnej substancji radioaktywnej po upływie 4 lat zostało 20 gram, a po upływie dalszych 4 lat tylko 4 gramy. Wyznaczyć masę substancji w chwili początkowej.

(b) Polon-210 ma okres połowicznego zaniku równy 140 dni. Znaleźć masę pierwiastka po 100 dniach, jeżeli jego masa początkowa wynosiła 200 g.

(c) Okres połowicznego zaniku pewnego pierwiastka promieniotwórczego jest równy 100 lat. Ile procent masy początkowej pierwiastka pozostanie po (i) 10, (ii) 50, (iii) 200 latach?

Odpowiedzi. (a) 100 g; (b) $m(100) \approx 121.9$ g; (c) (i) $\frac{1}{\sqrt[10]{2}} \cdot 100\% \approx 93.30\%$, (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 100\% \approx 70.71\%$, (iii) $\frac{1}{4} \cdot 100\% = 25.00\%$.

Definicja 1.3. (równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu)

Równanie

$$(R) \quad y' = f(t, y).$$

nazywamy *równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu* w postaci normalnej.

Uwaga. Ogólną formą równania różniczkowego rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$F(t, y, y') = 0.$$

Inaczej mówiąc, równanie różniczkowe rzędu pierwszego wiąże zmienną niezależną t , zmienną zależną y i jej pierwszą pochodną y' . Będziemy się posługiwać również *formą różniczkową* równania różniczkowego, czyli równaniem postaci

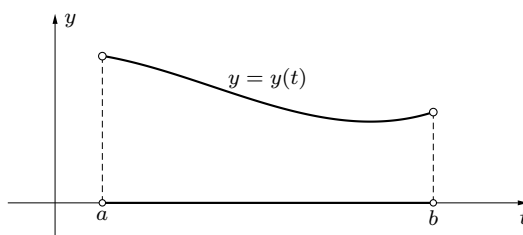
$$P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0.$$

Definicja 1.4. (rozwiązanie równania różniczkowego)

Funkcję $y(t)$ nazywamy *rozwiązaniem* na przedziale (a, b) równania różniczkowego (R), jeżeli na tym przedziale jest różniczkowalna i zamienia równanie w tożsamość

$$y'(t) \equiv f(t, y(t)).$$

Wykres rozwiązania równania różniczkowego nazywamy *krzywą całkową* (rys. 1.1).



Rys. 1.1. Krzywa całkowa

Uwaga. Analogicznie określamy rozwiązania równania różniczkowego na przedziałach: $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$. Przy czym, gdy rozwiązanie określone jest na przedziale domkniętym z jednego lub obu końców, to przez jego pochodną na końcu przedziału rozumiemy odpowiednią pochodną jednostronną. Założenie, że rozwiązanie równania różniczkowego jest określone na przedziale, jest istotną częścią definicji. Rozwiązanie równania różniczkowego zadane w postaci uwikłanej

$$\Phi(t, y) = 0$$

nazywamy *całką równania*. Ponieważ każde rozwiązanie jest całką (niekoniecznie odwrotnie), więc często w odniesieniu do rozwiązań używa się także terminu całka. Stąd mówimy zwyczajowo scałkować równanie różniczkowe.

Przykład 1.5. Sprawdzić, że podane funkcje (uwikłane) są rozwiązaniami (całkami) wskazanych równań różniczkowych na zadanych przedziałach:

$$(a) \ y(t) = -\ln(1 - e^t), \ y' = e^{t+y}, \ (-\infty, 0); \quad (b) \ ye^{ty} = 1, \ y' = -\frac{y^2}{1 + ty}, \ \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie.

■ (a) Różniczkując funkcję $y(t) = -\ln(1 - e^t)$, otrzymamy

$$y'(t) = \frac{e^t}{1 - e^t}, \quad t \in (-\infty, 0).$$

Z drugiej strony mamy

$$e^{t+y(t)} = e^{t-\ln(1-e^t)} = e^t e^{-\ln(1-e^t)} = \frac{e^t}{1-e^t} \quad \text{dla } t \in (-\infty, 0).$$

Zatem $y'(t) = e^{t+y(t)}$ dla $t \in (-\infty, 0)$. To oznacza, że funkcja $y(t)$ jest rozwiązaniem równania $y' = e^{t+y}$.

■ (b) Niech $y(t)$ będzie funkcją uwikłaną określoną na $\mathbb{R}$ równaniem $ye^{ty} = 1$. Zatem $y(t)e^{ty(t)} = 1$ dla $t \in \mathbb{R}$. Różniczkując obustronnie tę równość, otrzymamy

$$y'(t)e^{ty(t)} + y(t)e^{ty(t)}(y(t) + ty'(t)) = 0.$$

Stąd po prostych przekształceniach mamy

$$y'(t) = -\frac{y^2(t)}{1 + ty(t)}.$$

To oznacza, że funkcja uwikłana $y(t)$ jest na $\mathbb{R}$ całką wskazanego równania.

Zadanie 1.6. Sprawdzić, że podane funkcje (funkcje uwikłane) są rozwiązaniami (całkami) wskazanych równań różniczkowych na zadanych przedziałach:

- (a) $y(t) = \frac{\sin t}{t}$, $ty' + y = \cos t$, $(0, \infty)$; (b) $y(t) = t^2$, $ty' + y = 3t^2$, $\mathbb{R}$;
 (c) $y(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $y' + 2ty^2 = 0$, $\mathbb{R}$; (d) $y^2 + t^2 = 4$, $yy' = -t$, $(-2, 2)$.

Definicja 1.7. (*zagadnienie początkowe*)

Równanie różniczkowe (R) oraz warunek

$$(W) \quad y(t_0) = y_0$$

nazywamy *zagadnieniem początkowym* lub *zagadnieniem Cauchy'ego*[†].

Uwaga. Zagadnienie początkowe będziemy zapisywali w postaci

$$(RW) \quad y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

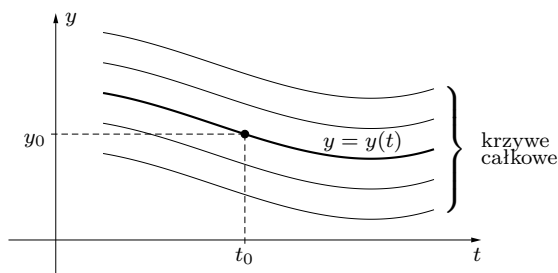
Liczby t_0 i y_0 nazywamy wartościami początkowymi, a warunek (W) warunkiem początkowym.

[†] Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matematyk francuski.

Definicja 1.8. (rozwiązanie zagadnienia początkowego)

Funkcję $y(t)$ nazywamy *rozwiązaniem zagadnienia początkowego* (RW), jeżeli jest rozwiązaniem równania (R) na pewnym przedziale zawierającym punkt t_0 i spełnia warunek (W).

Uwaga. W interpretacji geometrycznej, rozwiązanie zagadnienia początkowego polega na wskazaniu wśród krzywych całkowych równania (R) tej, która przechodzi przez punkt (t_0, y_0) (rys.1.2).



Rys. 1.2.

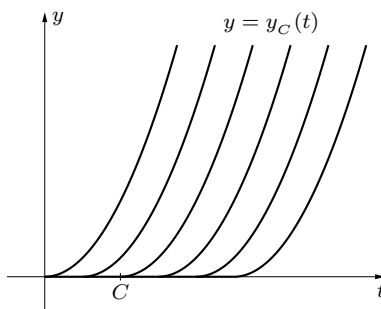
Zagadnienie początkowe niekoniecznie musi mieć tylko jedno rozwiązanie. Dla przykładu zagadnienie

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań. Rzeczywiście, łatwo sprawdzić, że $y(t) \equiv 0$ jest jego rozwiązaniem. Ponadto rozwiązaniami są funkcje określone wzorem

$$y_C(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq C, \\ (t - C)^2 & \text{dla } t > C, \end{cases}$$

gdzie $C \geq 0$ (rys.).



Przykład 1.9. Sprawdzić, że dla każdego $C \in \mathbb{R}$ funkcja $y(t) = \frac{2(Ct^4 - 1)}{Ct^4 + 1}$ jest na $\mathbb{R}$ rozwiązaniem równania różniczkowego $ty' + y^2 = 4$. Następnie znaleźć rozwiązania tego równania spełniające warunek początkowy $y(1) = 1$.

Rozwiązanie. Niech C będzie dowolną, ale ustaloną liczbą rzeczywistą. Różniczkując funkcję $y(t)$ względem zmiennej $t \in \mathbb{R}$, otrzymamy

$$y'(t) = \frac{8Ct^3(Ct^4 + 1) - 8Ct^3(Ct^4 - 1)}{(Ct^4 + 1)^2} = \frac{16Ct^3}{(Ct^4 + 1)^2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} ty'(t) + y^2(t) &= t \frac{16Ct^3}{(Ct^4 + 1)^2} + \left(\frac{2(Ct^4 - 1)}{Ct^4 + 1} \right)^2 \\ &= \frac{16Ct^4 + 4(Ct^4 - 1)^2}{(Ct^4 + 1)^2} = \frac{4(Ct^4 + 1)^2}{(Ct^4 + 1)^2} = 4, \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

To oznacza, że dla każdego rzeczywistego C funkcja $y(t)$ jest na $\mathbb{R}$ rozwiązaniem równania $ty' + y^2 = 4$. Wykorzystując warunek początkowy mamy

$$1 = y(1) = \frac{2(C - 1)}{C + 1}.$$

Stąd $C = 3$. Ostatecznie rozwiązanie zagadnienia początkowego ma postać

$$y(t) = \frac{2(3t^4 - 1)}{3t^4 + 1}, \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 1.10. Sprawdzić, że dla każdego $C \in \mathbb{R}$ podane funkcje są rozwiązaniami wskazanych równań różniczkowych. Następnie znaleźć rozwiązania spełniające zadane warunki początkowe:

- (a) $y(t) = t + C$, $y' = 1$, $y(0) = 0$;
- (b) $y(t) = Ce^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$, $y' + 2y = e^t$, $y(0) = 1$;
- (c) $y(t) = Ce^t$, $y' = y$, $y(1) = -1$;
- (d) $y(t) = t + C\sqrt{t^2 + 1}$, $y' = \frac{ty + 1}{t^2 + 1}$, $y(0) = 0$.

Odpowiedzi. (a) $y(t) = t$; (b) $y(t) = \frac{1}{3}e^t(1 + 2e^{-3t})$; (c) $y(t) = -e^{t-1}$; (d) $y(t) = t$.

TWIERDZENIE 1.11*. (istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania (R))

Jeżeli funkcja $f(t, y)$ oraz jej pochodna cząstkowa $(\partial f / \partial y)(t, y)$ są ciągłe na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$, to dla każdego punktu $(t_0, y_0) \in D$ zagadnienie początkowe

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

ma tylko jedno rozwiązanie.

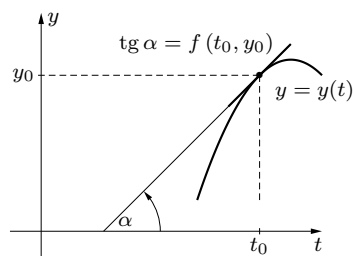
Uwaga*. Inaczej mówiąc, dla dowolnego punktu (t_0, y_0) z obszaru D istnieje rozwiązanie zagadnienia początkowego (RW). Co więcej, jeżeli dane są dwa rozwiązania o tych samych wartościach początkowych (W), przy czym każde z nich określone jest na pewnym przedziale zawierającym punkt t_0 , to pokrywają się one na wspólnej części rozważanych przedziałów.

Badanie istnienia rozwiązań zagadnień początkowych oraz ich jednoznaczności jest jednym z problemów teorii równań różniczkowych zwyczajnych.

Interpretacja geometryczna równania różniczkowego rzędu pierwszego

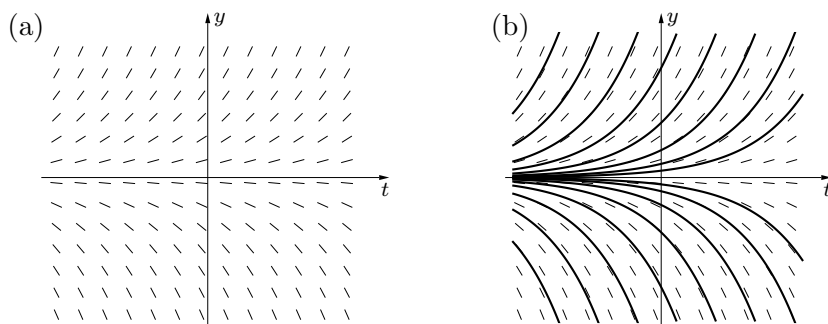
Niech w równaniu (R) funkcja $f(t, y)$ będzie ciągłą na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$. Przez każdy punkt (t_0, y_0) tego obszaru przeprowadzimy odcinek o długości 1 i środkiem w tym punkcie, leżący na prostej, której współczynnik kierunkowy jest równy $f(t_0, y_0)$ (rys.1.3). Odcinki te nazywamy *kierunkami* równania różniczkowego (R). Równanie różniczkowe określa na obszarze D *pole kierunków* (rys. 1.4 (a)). Niech $y = y(t)$ będzie krzywą całkową równania różniczkowego (R). Gdy krzywa ta przechodzi przez punkt $(t_0, y_0) \in D$, to oczywiście $y_0 = y(t_0)$ oraz

$$y'(t_0) = f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, y_0).$$



Rys. 1.3.

Krzywa całkową jest więc w punkcie (t_0, y_0) styczna do kierunku równania. Na odwrót, jeżeli krzywa $y = y(t)$ leży w obszarze D i w każdym jej punkcie (t, y) krzywa ta jest styczna do kierunku równania (R), to $y'(t) = f(t, y(t))$, a więc $y = y(t)$ jest krzywą całkową tego równania. Zatem scałkować równanie różniczkowe (R) na obszarze D , znaczy znaleźć na tym obszarze wszystkie krzywe, które w każdym punkcie będą styczne do kierunku równania (rys. 1.4 (b)).



Rys. 1.4. (a) Pole kierunków, (b) krzywe całkowite równania $y' = y$

1.2. Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja 1.12. (*równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych*)

Równanie różniczkowe, które można sprowadzić w postaci

$$(S) \quad y' = g(t)h(y),$$

nazywamy *równaniem o zmiennych rozdzielonych*.

Uwaga. Jeżeli $h(y_0) = 0$ dla pewnego y_0 , to funkcja stała $y(t) \equiv y_0$ jest jednym z rozwiązań równania (S).

FAKT 1.13. (*całka równania o zmiennych rozdzielonych*)

Jeżeli funkcje $g(t)$ i $h(y)$ są ciągłe, przy czym $h(y) \neq 0$ dla każdego y , to całka równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych (S) dana jest wzorem

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t) dt + C,$$

gdzie stała całkowania C jest dowolną stałą rzeczywistą.

Uwaga. Całki w powyższym wzorze rozumiane są jako dowolne, lecz ustalone funkcje pierwotne. W niektórych przypadkach wygodniej jest do dalszych rozważań wybrać stałą całkowania w tzw. postaci logarytmicznej, tj. $\ln|C|$, gdzie $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Przykład 1.14. Scałkować równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

- (a) $\frac{dy}{dt} = 2y(t+1)$; (b) $y' = -\frac{t}{y}$;
 (c) $y' = \sqrt{1-y^2}$; (d) $y(1+t)dt + t(1-y)dy = 0$.

Rozwiązanie.

■ (a) Równanie $dy/dt = 2y(t+1)$ jest równaniem o zmiennych rozdzielonych postaci (S), gdzie $g(t) = 2(t+1)$ oraz $h(y) = y$. Po sprowadzeniu do formy różniczkowej i rozdzieleniu zmiennych, otrzymamy

$$\frac{dy}{y} = 2(t+1)dt.$$

Całkując obustronnie dostaniemy

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2(t+1)dt.$$

Zatem całka równania ma postać

$$\ln|y| = (t+1)^2 + \ln|C|,$$

gdzie stała C jest dowolną liczbą rzeczywistą, różną od zera. Stąd

$$|y| = |C|e^{(1+t)^2},$$

czyli

$$y(t) = |C|e^{(t+1)^2} \quad \text{lub} \quad y(t) = -|C|e^{(t+1)^2},$$

co wobec dowolności stałej C można ująć jednym wzorem

$$y(t) = Ce^{(t+1)^2}.$$

Zauważmy ponadto, że $h(y) = y$, więc $y(t) \equiv 0$ jest również rozwiązaniem równania. Rozwiązanie to można otrzymać z rozwiązania zawierającego stałą C , jeżeli dopuścimy warunek $C = 0$.

■ (b) Równanie $y' = -t/y$ jest równaniem o rozdzielonych zmiennych postaci (S), w którym $g(t) = -t$, $h(y) = 1/y$, gdzie $y \neq 0$. Po przekształceniu do formy różniczkowej i rozdzieleniu zmiennych mamy

$$y \, dy = -t \, dt.$$

Całkując obustronnie, otrzymamy

$$\int y \, dy = - \int t \, dt.$$

Stąd całka równania ma postać

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}t^2 + C, \quad \text{czyli} \quad t^2 + y^2 = C_1,$$

gdzie $C_1 = 2C$ jest dodatnią stałą rzeczywistą.

■ (c) Równanie $y' = \sqrt{1-y^2}$ jest równaniem o zmiennych rozdzielonych postaci (S), w którym $g(t) \equiv 1$ oraz $h(y) = \sqrt{1-y^2}$, gdzie $y \in (-1, 1)$. Po przekształceniu do formy różniczkowej i rozdzieleniu zmiennych mamy

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dt.$$

Całkując obustronnie, otrzymamy

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dt.$$

Stąd całka równania ma postać

$$\arcsin y = t + C,$$

gdzie C jest stałą rzeczywistą. Z całki tej możemy otrzymać rozwiązanie

$$y(t) = \sin(t + C), \quad \text{gdzie} \quad -\frac{\pi}{2} - C < t < \frac{\pi}{2} - C.$$

Zauważmy ponadto, że

$$h(y) = \sqrt{1 - y^2} = 0 \iff y = 1 \text{ lub } y = -1.$$

Mamy zatem jeszcze dwa rozwiązania $y(t) \equiv 1$ i $y(t) \equiv -1$. Rozwiązań tych nie można otrzymać z rozwiązania zawierającego stałą C .

■ (d) Rozdzielając zmienne w równaniu $y(1+t) dt + t(1-y) dy = 0$, otrzymamy

$$\frac{y-1}{y} dy = \frac{1+t}{t} dt.$$

Skąd po obustronnym scałkowaniu mamy

$$y - \ln|y| = \ln|t| + t + C,$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Powyższe równanie określa rozwiązanie w formie uwikłanej, jest zatem całką równania. Zauważmy ponadto, że równanie

$$y(1+t) dt + t(1-y) dy = 0$$

po prostych przekształceniach można sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych postaci (S), w którym $g(t) = (t+1)/t$, $h(y) = y/(y-1)$, gdzie $y \neq 1$, co oznacza, że funkcja $y(t) \equiv 0$ jest również jego rozwiązaniem. Rozwiązania tego nie da się otrzymać z całki $y - \ln|y| = \ln|t| + t + C$ dla żadnej wartości C .

Zadanie 1.15. Scałkować równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

(a) $yy' + 4t = 0$;

(b) $dy = 2ty^2 dt$;

(c) $t(y^2 - 1) dt + y(t^2 - 1) dy = 0$;

(d) $2\sqrt{t}y' = \sqrt{1 - y^2}$;

(e) $y' = 1 + t + y + ty$;

(f) $y' + 4y = y(e^{-t} + 4)$;

(g) $(1 - t^2)y' = 2y$;

(h*) $\sqrt{1 - t^2} dy + \sqrt{1 - y^2} dt = 0$.

Odpowiedzi. (a) $y^2 + 4t^2 = C$; (b) $y(t) = -\frac{1}{t^2 + C}$, $y = 0$; (c) $y^2 = 1 + \frac{C}{1 - t^2}$;

(d) $y(t) = \sin(C + \sqrt{t})$, $y(t) \equiv -1$, $y(t) \equiv 1$; (e) $\ln|1 + y| = t + \frac{1}{2}t^2 + C$;

(f) $y(t) = Ce^{-(e^{-t})}$; (g) $y(t) = C\frac{1+t}{1-t}$; (h*) $y(t) = \sqrt{1 - t^2} \sin C - t \cos C$.

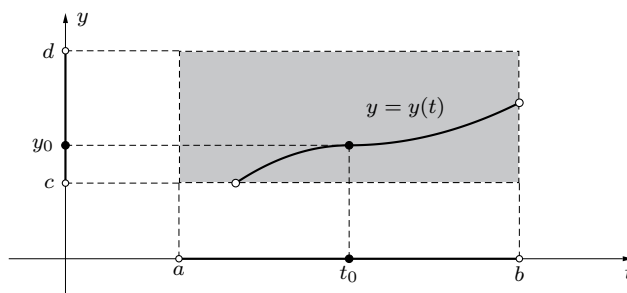
TWIERDZENIE 1.16. (istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania (S))

Jeżeli funkcje $g(t)$ i $h(y)$ są ciągłe odpowiednio na przedziałach (a, b) i (c, d) , przy czym $h(y) \neq 0$ dla $y \in (c, d)$ oraz jeżeli $t_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$, to dla dowolnych punktów $t_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$ zagadnienie początkowe

$$y' = g(t)h(y), \quad y(t_0) = y_0,$$

ma tylko jedno rozwiązanie.

Uwaga. Inaczej mówiąc, przez każdy punkt (t_0, y_0) prostokąta $(a, b) \times (c, d)$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa (rys. 1.5) równania $y' = g(t)h(y)$.



Rys. 1.5.

Przy czym krzywa ta nie zawsze jest określona na całym przedziale (a, b) , co ilustruje podany poniżej przykład.

Przykład 1.17. Wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych

$$y' + y^2 \sin t = 3(ty)^2$$

z warunkami początkowymi

$$(a) \ y(0) = 1; \quad (b) \ y(0) = -1.$$

Podać przedziały, na których rozwiązania są jednoznaczne.

Rozwiązanie. Równanie $y' + y^2 \sin t = 3(ty)^2$ jest równaniem o zmiennych rozdzielonych postaci (S), gdzie $g(t) = 3t^2 - \sin t$ oraz $h(y) = y^2$. Funkcja $g(t)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$, a funkcja $h(y)$ jest ciągła i różna od zera na każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. Rozdzielając zmienne t i y możemy równanie zapisać w formie różniczkowej

$$\frac{dy}{y^2} = (3t^2 - \sin t) dt.$$

Skąd, po obustronnym scałkowaniu, mamy

$$-\frac{1}{y} = t^3 + \cos t + C.$$

Rozwiązanie ma zatem postać

$$y(t) = -\frac{1}{t^3 + \cos t + C},$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą.

■ (a) Wobec warunku początkowego $y(0) = 1$, założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności są spełnione odpowiednio na $\mathbb{R}$ i $(0, \infty)$. Ponieważ

$$1 = y(0) = -\frac{1}{1 + C}, \quad \text{więc } C = -2.$$

Zatem jedynym rozwiązaniem zagadnienia początkowego $y' + y^2 \sin t = 3(ty)^2$, $y(0) = 1$ jest funkcja

$$y(t) = -\frac{1}{t^3 + \cos t - 2}.$$

Rozwiązanie to określone jest na przedziale $(-\infty, b)$, gdzie b jest pierwiastkiem równania $b^3 + \cos b = 2$.

■ (b) Wobec warunku początkowego $y(0) = -1$, założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności są spełnione odpowiednio na $\mathbb{R}$ i $(-\infty, 0)$. Ponieważ

$$-1 = y(0) = -\frac{1}{1 + C}, \quad \text{więc } C = 0.$$

Zatem jedynym rozwiązaniem zagadnienia początkowego $y' + y^2 \sin t = 3(ty)^2$, $y(0) = -1$ jest funkcja

$$y(t) = -\frac{1}{t^3 + \cos t}.$$

Rozwiązanie to określone jest na przedziale (a, ∞) , gdzie a jest pierwiastkiem równania $a^3 + \cos a = 0$.

Zadanie 1.18. Wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych

$$(1 + t^2) y' = 1 + y^2$$

z warunkami początkowymi:

$$(a) y(1) = -1; \quad (b) y(1) = 1.$$

Podać przedziały, na których rozwiązania są jednoznaczne.

Odpowiedzi. (a) $y(t) = -\frac{1}{t}$, $t > 0$; (b) $y(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Przykład 1.19. Rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych:

$$(a) y' = -e^{y+t+1}, \quad y(0) = -1; \quad (b) t^2 y' + y^2 = 0, \quad y(1) = 1.$$

Rozwiązanie.

■ (a) Równanie $y' = -e^{y+1+1}$ jest równaniem o rozdzielonych zmiennych postaci (S), w którym $h(y) = e^y > 0$. Zatem nie ma ono rozwiązań dodatkowych. Przekształcając to równanie do postaci różniczkowej i rozdzielając zmienne mamy

$$e^{-y} dy = -e^{t+1} dt.$$

Całkując obustronnie, otrzymamy

$$-e^{-y} = -e^{t+1} + C,$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Stąd po prostych przekształceniach dostaniemy

$$y(t) = -\ln(e^{t+1} - C).$$

Wykorzystując warunek początkowy mamy

$$-1 = y(0) = -\ln(e - C).$$

Stąd $C = 0$. Tak więc rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest funkcja

$$y(t) = -(t + 1).$$

■ (b) Równanie $t^2 y' + y^2 = 0$ jest równaniem o rozdzielonych zmiennych postaci (S), w którym $h(y) = y^2$. Zatem $h(y) = y^2 = 0$ dla $y = 0$, więc funkcja $y(t) \equiv 0$ jest jednym z jego rozwiązań. Oczywiście nie jest to rozwiązanie spełniające zadany warunek początkowy. Rozdzielając w równaniu zmienne, otrzymamy

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dt}{t^2}.$$

Stąd po scałkowaniu obu stron mamy

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{t} + C,$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Po prostych przekształceniach, otrzymamy rozwiązanie postaci

$$y(t) = -\frac{t}{1 + Ct}.$$

Wykorzystując warunek początkowy mamy

$$1 = y(1) = -\frac{1}{C + 1}.$$

Stąd $C = -2$. Zatem rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest funkcja

$$y(t) = \frac{t}{2t - 1}.$$

Zadanie 1.20. Rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych:

- (a) $y' \sin t = y \ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$; (b) $t\sqrt{1-y^2}dt + y\sqrt{1-t^2}dy = 0$, $y(0) = 1$;
 (c) $t(y+1)y' = y$, $y(e) = 1$; (d) $y \cos t dt - (1+y^2) dy = 0$, $y(0) = 1$;
 (e) $y' = y^2(1+t^2)$, $y(0) = -2$; (f) $e^y(y' - 1) = 1$, $y(0) = 0$.

Odpowiedzi. (a) $y(t) = e^{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}$; (b) $y(t) = \sqrt{1 - \left(1 - \sqrt{1-t^2}\right)^2}$, $y(t) \equiv 1$;
 (c) $\ln y + y = \ln t$; (d) $\ln y + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} + \sin t$; (e) $y(t) = \frac{-1}{t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}}$;
 (f) $y(t) = \ln(2e^t - 1)$.

1.3. Równania różniczkowe jednorodne

Definicja 1.21. (równanie różniczkowe jednorodne)

Równanie różniczkowe, które można zapisać w postaci

$$(J) \quad y' = f(u), \quad \text{gdzie } u = \frac{y}{t}$$

nazywamy *równaniem jednorodnym*.

FAKT 1.22. (zamiana zmiennych w równaniu jednorodnym)

Równanie jednorodne (J) przez zamianę zmiennych $y = ut$ sprowadza się do równania o zmiennych rozdzielonych postaci

$$u' = \frac{1}{t}(f(u) - u).$$

Uwaga. Jeżeli $f(u_0) = u_0$ dla pewnego u_0 , to jednym z rozwiązań równania (J) jest funkcja $y(t) = u_0 t$.

Przykład 1.23. Scałkować równania różniczkowe jednorodne:

(a) $y' = \frac{t+y}{t}$; (b) $\frac{dy}{dt} = \frac{2ty}{t^2 - y^2}$.

Rozwiązanie.

■ (a) Ponieważ

$$\frac{t+y}{t} = 1 + \frac{y}{t},$$

więc rozważane równanie jest równaniem jednorodnym postaci (J), gdzie $f(u) = 1 + u \neq u$. Stosując podstawienie $y = tu$, mamy $y' = u + tu'$, a równanie przyjmuje postać

$$tu' + u = 1 + u, \text{ czyli } u' = \frac{1}{t}.$$

Rozdzielając zmienne, a następnie obustronnie całkując, otrzymamy

$$u(t) = \ln |t| + \ln |C|,$$

gdzie stałą całkowania wybraliśmy w postaci logarytmicznej. Wracając do zmiennej y mamy

$$y(t) = t \ln |Ct|,$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą różną od zera.

■ (b) Ponieważ

$$\frac{2ty}{t^2 - y^2} = \frac{2\frac{y}{t}}{1 - \left(\frac{y}{t}\right)^2},$$

więc równanie jest jednorodne postaci (J), gdzie $f(u) = 2u/(1 - u^2)$. Podstawmy $y = tu$, stąd

$$\frac{dy}{dt} = u + t \frac{du}{dt}.$$

Zatem równanie przyjmuje postać

$$u + t \frac{du}{dt} = \frac{2u}{1 - u^2}, \text{ czyli } t \frac{du}{dt} = \frac{u + u^3}{1 - u^2}.$$

Rozdzielając zmienne mamy

$$-\frac{(u^2 - 1) du}{u(1 + u^2)} = \frac{dt}{t}.$$

Rozkładając lewą stronę równania na ułamki proste

$$-\frac{u^2 - 1}{u(1 + u^2)} du = \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1 + u^2} \right) du$$

i obustronnie całkując, otrzymamy

$$\ln |u| - \ln (1 + u^2) = \ln |t| - \ln |C|,$$

gdzie stałą całkowania wybraliśmy w postaci logarytmicznej. Stąd

$$\frac{t(u^2 + 1)}{u} = C.$$

Powracając do zmiennej y , po prostych przekształceniach, otrzymamy

$$t^2 + y^2 = Cy,$$

gdzie C jest dowolną różną od zera stałą rzeczywistą. Wzór ten określa rodzinę okręgów o środku w punkcie $(0, C/2)$ i promieniu $|C|/2$, a więc stycznych do osi Ot w początku układu współrzędnych. Zauważmy również, że skoro równanie $f(u) = 2u/(1-u^2) = u$ ma rozwiązanie $u_0 = 0$, więc także funkcja $y(t) = u_0 t \equiv 0$ jest rozwiązaniem rozważanego równania.

Zadanie 1.24. Scałkować równania różniczkowe jednorodne:

- (a) $ty' = \sqrt{t^2 - y^2} + y$; (b) $(t - y)dt + tdy = 0$;
 (c) $ty' = y(\ln y - \ln t)$; (d) $ty' - y = t \operatorname{tg} \frac{y}{t}$;
 (e) $(t^2 - y^2)dt + tydy = 0$; (f) $t^2 y' = ty + y^2$.

Odpowiedzi. (a) $y(t) = t \sin \ln |Ct|$, $y(t) = \pm t$; (b) $y(t) = t(C - \ln |t|)$;
 (c) $y(t) = te^{Ct+1}$; (d) $y(t) = t \arcsin Ct$; (e) $y(t) = \pm t\sqrt{C - \ln t^2}$;
 (f) $y(t) = -\frac{t}{C + \ln |t|}$, $y(t) \equiv 0$.

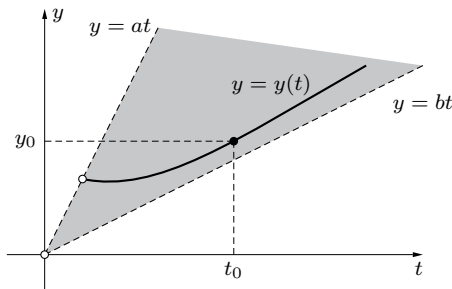
TWIERDZENIE 1.25. (istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania (J))

Jeżeli funkcja $f(u)$ jest ciągła na przedziale (a, b) i spełnia tam warunek $f(u) \neq u$, to dla dowolnych punktów (t_0, y_0) takich, że $a < y_0/t_0 < b$ zagadnienie początkowe

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right), \quad y(t_0) = y_0,$$

ma tylko jedno rozwiązanie.

Uwaga. Inaczej mówiąc, przez każdy punkt (t_0, y_0) obszaru $\{(t, y) : a < y/t < b\}$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania (J) (rys. 1.6). Przy czym krzywa ta określona jest na pewnym przedziale $I \subset (0, \infty)$, gdy $t_0 > 0$, a na $I \subset (-\infty, 0)$, gdy $t_0 < 0$.



Rys. 1.6.

Przykład 1.26. Rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych jednorodnych:

$$(a) \frac{dy}{dt} = \frac{y^2 + t^2}{ty}, \quad y(1) = -1; \quad (b) y' = \frac{2ty - y^2}{2ty - t^2}, \quad y(1) = 2.$$

Wyznaczyć przedziały, na których rozwiązania są jednoznaczne.

Rozwiązanie.

■ (a) Ponieważ

$$\frac{y^2 + t^2}{ty} = \frac{y}{t} + \frac{t}{y} = \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^{-1},$$

więc rozważane równanie jest równaniem jednorodnym postaci (J), gdzie $f(u) = u + 1/u$. Funkcja $f(u)$ jest ciągła na każdym z przedziałów $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$, a równanie $f(u) = u$ nie ma tam rozwiązań. Ze względu na wartości początkowe $t_0 = 1$, $y_0 = -1$ mamy $t \in (0, \infty)$ oraz $y \in (-\infty, 0)$. Podstawiając $y = tu$, otrzymamy $y' = u + tu'$. Po podstawieniu równanie można przekształcić na równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych postaci

$$u du = \frac{dt}{t}.$$

Dalej całkując obustronnie mamy

$$u^2 = 2(\ln t + C),$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Wracając do zmiennej y , otrzymamy całkę równania postaci

$$y^2 = 2t^2(\ln t + C).$$

Uwzględniając fakt, że $y < 0$ oraz $t > 0$ mamy rozwiązanie w postaci

$$y(t) = -t\sqrt{2(\ln t + C)}.$$

Z kolei uwzględniając warunek początkowy $y(1) = -1$, otrzymamy $C = 1/2$, a w konsekwencji rozwiązanie zagadnienia początkowego w postaci

$$y(t) = -t\sqrt{2\left(\ln t + \frac{1}{2}\right)}.$$

Rozwiązanie to określone jest dla tych wartości zmiennej t , dla których spełniona jest nierówność $\ln t + 1/2 > 0$. Zatem rozwiązanie określone i jednoznaczne jest na przedziale $(1/\sqrt{e}, \infty)$. Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla równań jednorodnych wynika, że rozwiązanie jest jednoznaczne.

■(b) W tym przypadku mamy

$$\frac{2ty - y^2}{2ty - t^2} = \frac{2 - \frac{y}{t}}{2 - \frac{t}{y}}.$$

Równanie jest więc równaniem jednorodnym postaci (J), gdzie

$$f(u) = \frac{2-u}{2-\frac{1}{u}} = \frac{(2-u)u}{2u-1}.$$

Funkcja $f(u)$ jest ciągła na każdym z przedziałów $(-\infty, 1/2)$, $(1/2, \infty)$. Ponadto równanie $f(u) = u$ nie ma rozwiązań w tych przedziałach. Ze względu na wartości początkowe $t_0 = 1$, $y_0 = 2$, mamy $t \in (0, \infty)$ oraz $y \in (1/2, \infty)$. Dokonując podstawienia $y = tu$ mamy $y' = u + tu'$. W konsekwencji równanie wyjściowe można przekształcić na równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych postaci

$$tu' + u = \frac{(2-u)u}{2u-1}.$$

Po prostych przekształceniach i rozdzieleniu zmiennych, otrzymamy

$$\frac{2u-1}{u(1-u)} du = \frac{3}{t} \frac{dt}{t}.$$

Rozkładając lewą stronę równania na ułamki proste

$$\frac{2u-1}{u(1-u)} du = -\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) du$$

i całkując obustronnie, mamy

$$-\ln|1-u| - \ln|u| = 3\ln|t| + \ln|C|,$$

gdzie C jest dowolną różną od zera stałą rzeczywistą. Stąd

$$u(1-u) = \frac{C}{t^3}.$$

Wracając do zmiennej y , otrzymamy całkę postaci

$$y^2 - ty + \frac{C}{t} = 0.$$

Z warunku $y(1) = 2$, mamy $C = -2$. Zatem całka równania spełniająca warunek początkowy ma postać

$$y^2 - ty - \frac{2}{t} = 0.$$

Stąd wyznaczając y przy uwzględnieniu, że $y \in (1/2, \infty)$, otrzymamy rozwiązanie zagadnienia początkowego postaci

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(t + \sqrt{t^2 + \frac{8}{t}} \right).$$

Rozwiązanie to określone jest na przedziale $(0, \infty)$. Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla równań jednorodnych wynika, że rozwiązanie jest jednoznaczne.

Zadanie 1.27. Rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych jednorodnych:

- (a) $ty' = t + \frac{1}{2}y$, $y(1) = 0$; (b) $(t^2 + y^2) dt - 2tydy = 0$, $y(1) = \sqrt{2}$;
 (c) $y' = \frac{4y^2 - t^2}{2ty}$, $y(1) = 1$; (d) $(y^3 - t^3) dt - ty^2dy = 0$, $y(1) = 3$.

Wyznaczyć przedziały, na których rozwiązania są jednoznaczne.

Odpowiedzi. (a) $y(t) = 2(t - \sqrt{t})$, $t > 0$; (b) $y(t) = \sqrt{t(t+1)}$, $t > 0$;

(c) $y(t) = t\sqrt{\frac{1+t^2}{2}}$, $t > 0$; (d) $y(t) = t\sqrt[3]{3(9 - \ln t)}$, $t > 0$.

1.4. Równania różniczkowe liniowe

Definicja 1.28. (*równanie różniczkowe liniowe*)

Równanie różniczkowe, które można zapisać w postaci

$$(L) \quad y' + p(t)y = q(t),$$

nazywamy *równaniem liniowym pierwszego rzędu*. Jeżeli $q(t) \not\equiv 0$, to równanie nazywamy *liniowym niejednorodnym*. W przeciwnym przypadku nazywamy je *równaniem liniowym jednorodnym*.

Uwaga. Równanie różniczkowe liniowe jednorodne jest szczególną postacią równania o zmiennych rozdzielonych $y' = g(t)h(y)$, w którym przyjęto $g(t) = -p(t)$, $h(y) = y$. Zatem korzystając z metody rozdzielania zmiennych można pokazać, że jeżeli $p(t)$ jest funkcją ciągłą na przedziale, to rozwiązanie na tym

przedziale równania różniczkowego liniowego jednorodnego $y' + p(t)y = 0$ dane jest wzorem

$$y(t) = C \exp \left(- \int p(t) dt \right),$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą, a całka rozumiana jest tu jako dowolna, lecz ustalona funkcja pierwotna.

Poniżej przedstawimy dwie metody rozwiązywania równań liniowych niejednorodnych, przy założeniu, że funkcje $p(t)$ i $q(t)$ są ciągłe na przedziale.

Metoda uzmienniania stałej

Jak podano powyżej funkcja

$$\tilde{C} \exp \left(- \int p(t) dt \right)$$

jest rozwiązaniem równania jednorodnego $y' + p(t)y = 0$. Istotą „metody uzmienniania stałej” jest założenie, że rozwiązanie równania różniczkowego niejednorodnego można przedstawić w postaci

$$y(t) = c(t) \exp \left(- \int p(t) dt \right),$$

gdzie $c(t)$ jest odpowiednio dobraną funkcją różniczkowalną. Przy tym założeniu mamy

$$y'(t) = c'(t) \exp \left(- \int p(t) dt \right) - p(t)c(t) \exp \left(- \int p(t) dt \right).$$

Funkcja $y(t)$ będzie rozwiązaniem równania różniczkowego niejednorodnego, gdy będzie spełniała warunek

$$\begin{aligned} y'(t) + p(t)y(t) &= \\ &= c'(t) \exp \left(- \int p(t) dt \right) - \cancel{p(t)c(t) \exp \left(- \int p(t) dt \right)} + \cancel{p(t)c(t) \exp \left(- \int p(t) dt \right)} \\ &= q(t). \end{aligned}$$

Stąd

$$c'(t) \exp \left(- \int p(t) dt \right) = q(t).$$

Zatem

$$c'(t) = q(t) \exp \left(\int p(t) dt \right).$$

Po scałkowaniu otrzymamy funkcję $c(t)$ w postaci

$$c(t) = \int q(t) \left[\exp \left(\int p(t) dt \right) \right] dt + C,$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Po wstawieniu do wzoru określającego funkcję $y(t)$, mamy

$$y(t) = \exp \left(- \int p(t) dt \right) \int \left[q(t) \exp \left(\int p(t) dt \right) \right] dt + C \exp \left(- \int p(t) dt \right),$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Łatwo sprawdzić, że powyższy wzór przedstawia rozwiązanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego (L).

Metoda czynnika całkującego

Jeżeli funkcja $y(t)$ jest rozwiązaniem równania (L), to zachodzi równość

$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t).$$

Mnożąc obie strony powyższej równości przez wyrażenie

$$\exp \left(\int p(t) dt \right) > 0,$$

zwane *czynnikiem całkującym*, gdzie $\int p(t) dt$ oznacza dowolną (lecz ustaloną) funkcję pierwotną funkcji $p(t)$, mamy

$$y'(t) \exp \left(\int p(t) dt \right) + p(t)y(t) \exp \left(\int p(t) dt \right) = q(t) \exp \left(\int p(t) dt \right).$$

Wyrażenie po lewej stronie otrzymanej równości można przepisać w postaci

$$\left[y(t) \exp \left(\int p(t) dt \right) \right] '.$$

Stąd

$$\left[y(t) \exp \left(\int p(t) dt \right) \right] ' = q(t) \exp \left(\int p(t) dt \right).$$

Całkując obustronnie powyższą równość dostaniemy

$$y(t) \exp \left(\int p(t) dt \right) = \int \left[q(t) \exp \left(\int p(t) dt \right) \right] dt + C,$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Zatem

$$y(t) = \exp \left(- \int p(t) dt \right) \int \left[q(t) \exp \left(\int p(t) dt \right) \right] dt + C \exp \left(- \int p(t) dt \right),$$

co należało pokazać.

Przykład 1.29. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

(a) $y' - 2ty = t$; (b) $y' - \frac{y}{t} = t \cos t$.

Rozwiązanie.

■ (a) W rozwiązaniu wykorzystamy metodę uzmienniania stałej. Najpierw znajdziemy rozwiązanie równania jednorodnego $y' - 2ty = 0$. Rozdzielając zmienne mamy

$$\frac{dy}{y} = 2t dt.$$

Po scałkowaniu, otrzymamy

$$\ln |y| = t^2 + \ln |\tilde{C}|,$$

a stąd

$$y(t) = \tilde{C}e^{t^2},$$

gdzie $\tilde{C}$ jest dowolną stałą rzeczywistą. Szukamy teraz rozwiązania równania niejednorodnego w postaci

$$y(t) = c(t)e^{t^2}.$$

Obliczamy pochodną $y'(t) = c'(t)e^{t^2} + c(t)2te^{t^2}$ i podstawiamy ją do równania. Mamy

$$c'(t)e^{t^2} + \cancel{2te(t)e^{t^2}} - \cancel{2te(t)e^{t^2}} = t.$$

Stąd

$$c'(t)e^{t^2} = t, \quad \text{czyli} \quad c'(t) = te^{-t^2},$$

więc po obustronnym scałkowaniu, otrzymamy

$$c(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + C.$$

Ostatecznie rozwiązanie równania niejednorodnego dane jest wzorem

$$y(t) = c(t)e^{t^2} = \left(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + C\right)e^{t^2} = Ce^{t^2} - \frac{1}{2},$$

gdzie C oznacza dowolną stałą rzeczywistą.

■ (b) W rozwiązaniu wykorzystamy metodę czynnika całkującego, który dla tego równania jest równy

$$\exp \int p(t) dt = \exp \int \left(-\frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{t}.$$

Mnożąc wyjściowe równanie przez czynnik całkujący, otrzymamy

$$\frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2} = \cos t.$$

Stąd

$$\left(\frac{y}{t}\right)' = \cos t.$$

Po obustronnym scałkowaniu, otrzymamy

$$\frac{y}{t} = \sin t + C.$$

Tak więc rozwiązanie rozważanego równania jest postaci

$$y(t) = t(\sin t + C),$$

gdzie C oznacza dowolną stałą rzeczywistą.

Zadanie 1.30. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

- (a) $y' + y = \sin t$; (b) $y' + 2ty = e^{-t^2}$; (c) $ty' - 2y = t^3 \cos t$;
 (d) $ty' - 2y = 4t^4$; (e) $ty + e^t - ty' = 0$; (f) $(2t + 1)y' = 4t + 2y$.

Odpowiedzi. (a) $y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$; (b) $y(t) = (C + t)e^{-t^2}$;
 (c) $y(t) = t^2(C + \sin t)$; (d) $y(t) = Ct^2 + 2t^4$; (e) $y(t) = (\ln |t| + C)e^t$;
 (f) $y(t) = (\ln |2t + 1| + C)(2t + 1) + 1$.

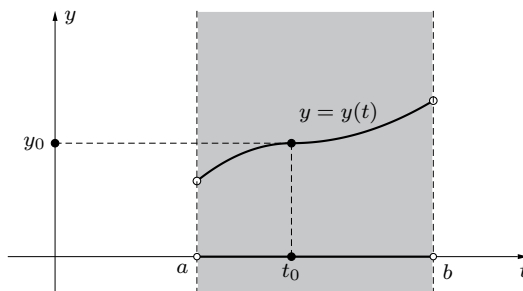
TWIERDZENIE 1.31. *(istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania liniowego)*

Jeżeli funkcje $p(t)$ i $q(t)$ są ciągłe na przedziale (a, b) , to dla dowolnych $t_0 \in (a, b)$ oraz $y_0 \in \mathbb{R}$ zagadnienie początkowe

$$y' + p(t)y = q(t), \quad y(t_0) = y_0,$$

ma tylko jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to określone jest na przedziale (a, b) .

Uwaga. Inaczej mówiąc, przez każdy punkt (t_0, y_0) pasa $(a, b) \times \mathbb{R}$ (rys. 1.7) przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równania różniczkowego liniowego.



Rys. 1.7.

Przykład 1.32. Wyznaczyć rozwiązania zagadnień początkowych dla równań liniowych niejednorodnych:

$$(a) \ y' \sin t - y = 1, \quad y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0; \quad (b) \ y' + 2ty = t, \quad y(0) = -\frac{1}{2}.$$

Określić przedziały, na których rozwiązania są jednoznaczne.

Rozwiązanie.

■ (a) Przekształcając rozważane równanie do postaci $y' + p(t)y = q(t)$, otrzymamy

$$y' - \frac{y}{\sin t} = \frac{1}{\sin t}.$$

Zauważmy, że funkcje $p(t) = q(t) = 1/\sin t$ są ciągłe na przedziałach postaci $(k\pi, (k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zauważmy ponadto, że wartość początkowa $t_0 = 5\pi/2$ należy do przedziału $(k\pi, (k+1)\pi)$ tylko dla $k = 2$. Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności wynika, że rozwiązanie rozważanego zagadnienia jest określone i jednoznaczne na przedziale $(2\pi, 3\pi)$. Do wyznaczenia tego rozwiązania wykorzystamy metodę uzmienniania stałej. Rozdzielając zmienne w równaniu jednorodnym mamy

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{\sin t}.$$

Stąd po scałkowaniu i prostych przekształceniach, otrzymamy rozwiązanie równania jednorodnego

$$y(t) = \tilde{C} \operatorname{tg} \frac{t}{2},$$

gdzie $\tilde{C}$ oznacza stałą rzeczywistą. Rozwiązania równania niejednorodnego szukamy w postaci

$$y(t) = c(t) \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

Obliczając pochodną

$$y'(t) = c'(t) \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \frac{c(t)}{2 \cos^2 \frac{t}{2}}$$

i podstawiając do równania niejednorodnego, otrzymamy

$$c'(t) \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \frac{c(t)}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} - \frac{c(t) \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\sin t} = \frac{1}{\sin t}.$$

Stąd

$$c'(t) \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{1}{\sin t}, \quad \text{czyli} \quad c'(t) = \frac{1}{\sin t} \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}},$$

więc po obustronnym scałkowaniu mamy

$$c(t) = -\operatorname{ctg} \frac{t}{2} + C.$$

Zatem rozwiązanie równania niejednorodnego dane jest wzorem

$$y(t) = c(t) \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \left(-\operatorname{ctg} \frac{t}{2} + C \right) = -1 + C \operatorname{tg} \frac{t}{2},$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Wykorzystując warunek początkowy mamy

$$0 = y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -1 + C \operatorname{tg} \frac{5}{4}\pi.$$

Stąd $C = 1$ i rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest funkcja

$$y(t) = -1 + \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

■(b) Zauważmy, że funkcje $p(t) = 2t$ i $q(t) = t$ są ciągłe na $\mathbb{R}$. Zatem z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności wynika, że rozwiązanie zagadnienia także jest określone i jednoznaczne na $\mathbb{R}$. W rozwiązaniu wykorzystamy metodę czynnika całkującego. Ponieważ $p(t) = 2t$, więc czynnik całkujący jest równy

$$\exp\left(\int p(t) dt\right) = \exp\left(\int 2t dt\right) = \exp(t^2).$$

Mnożąc obustronnie równanie przez otrzymany czynnik mamy

$$e^{t^2} y' + e^{t^2} 2ty = e^{t^2} t.$$

Zatem równanie to można przepisać w postaci

$$(e^{t^2} y)' = e^{t^2} t.$$

Po obustronnym scałkowaniu, otrzymamy

$$e^{t^2} y = \frac{1}{2} e^{t^2} + C,$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Rozwiązanie równania liniowego niejednorodnego jest zatem postaci

$$y(t) = \frac{1}{2} + C e^{-t^2}.$$

Wykorzystując warunek początkowy, otrzymamy

$$-\frac{1}{2} = y(0) = \frac{1}{2} + C.$$

Stąd $C = -1$, więc rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest funkcja

$$y(t) = \frac{1}{2} - e^{-t^2}.$$

Zadanie 1.33. Wyznaczyć rozwiązania zagadnień początkowych dla równań liniowych niejednorodnych:

- (a) $y' - y = 1$, $y(3) = 3$; (b) $y' = (y + 1) \sin t$, $y(t_0) = y_0$;
 (c) $ty' + y = t + 1$, $y(1) = 0$; (d) $y' \sin t \cos t = y + \sin^3 t$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Określić przedziały, na których rozwiązania są jednoznaczne.

Odpowiedzi. (a) $y(t) = 4e^{t-3} - 1$, $t \in \mathbb{R}$; (b) $y(t) = (y_0 + 1)e^{\cos t_0 - \cos t} - 1$, $t \in \mathbb{R}$;
 (c) $y(t) = \frac{1}{2}t + 1 - \frac{3}{2t}$, $t > 0$; (d) $y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} t - \sin t$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

1.5. Równanie różniczkowe Bernoulliego

Definicja 1.34. (równanie różniczkowe Bernoulliego[‡])

Równanie różniczkowe, które można zapisać w postaci

$$(B) \quad y' + p(t)y = h(t)y^r,$$

gdzie $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, nazywamy *równaniem Bernoulliego*.

Uwaga. Gdyby dopuścić $r = 0$, to otrzymalibyśmy równanie różniczkowe liniowe niejednorodne postaci $y' + p(t)y = h(t)$. Z kolei dla $r = 1$ dostalibyśmy równanie różniczkowe liniowe jednorodne postaci $y' + \tilde{p}(t)y = 0$, gdzie $\tilde{p}(t) = p(t) - h(t)$. Zauważmy jeszcze, że dla każdego $r > 0$ funkcja $y(t) \equiv 0$ jest jednym z rozwiązań równania Bernoulliego.

FAKT 1.35. (sprowadzanie równania Bernoulliego do równania liniowego)

Równanie różniczkowe Bernoulliego (B) przez zamianę zmiennych

$$z = y^{1-r}$$

sprowadza się do równania różniczkowego liniowego niejednorodnego postaci

$$z' + (1-r)p(t)z = (1-r)h(t).$$

[‡]Jakob Bernoulli (1654–1705), matematyk szwajcarski.

Przykład 1.36. Rozwiązać równania różniczkowe Bernoulliego:

$$(a) \ y' - 2ty = 2t^3y^2; \quad (b) \ ty' + 6y = 3t\sqrt[3]{y^4}.$$

Rozwiązanie. Pierwszym krokiem przy rozwiązywaniu równania Bernoulliego jest obustronne dzielenie przez czynnik y^r , a następnym podstawienie $z = y^{1-r}$.

■ (a) Po podzieleniu obu stron równania przez y^2 , otrzymamy

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2t}{y} = 2t^3.$$

Jeżeli wprowadzimy nową funkcję z przez podstawienie $z = 1/y$, to $z' = -y'/y^2$, a równanie przyjmie postać

$$z' + 2tz = -2t^3.$$

Wykorzystując jedną z metod (uzmienniania stałej lub czynnika całkującego) rozwiązywania równań różniczkowych liniowych niejednorodnych, otrzymamy

$$z(t) = Ce^{-t^2} + 1 - t^2.$$

Po powrocie do funkcji $y(t)$ dostaniemy dla równania wyjściowego rozwiązanie postaci

$$y(t) = \frac{1}{Ce^{-t^2} + 1 - t^2},$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Ponadto, dodatkowym rozwiązaniem jest oczywiście $y(t) \equiv 0$.

■ (b) Po podzieleniu obu stron równania przez $\sqrt[3]{y^4}$, otrzymamy

$$\frac{ty'}{\sqrt[3]{y^4}} + \frac{6}{\sqrt[3]{y}} = 3t.$$

Jeżeli wprowadzimy teraz nową funkcję z przez podstawienie $z = 1/\sqrt[3]{y}$, to $z' = -y'/3\sqrt[3]{y^4}$, a równanie przyjmie postać

$$-3tz' + 6z = 3t.$$

Wykorzystując jedną z metod rozwiązywania równań różniczkowych liniowych niejednorodnych, otrzymamy

$$z(t) = t + Ct^2.$$

Po powrocie do funkcji $y(t)$ mamy dla równania wyjściowego rozwiązanie postaci

$$y(t) = \frac{1}{(t + Ct^2)^3},$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Ponadto, dodatkowym rozwiązaniem jest oczywiście $y(t) \equiv 0$.

Zadanie 1.37. Rozwiązać równania różniczkowe Bernoulliego:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y' + 2ty &= 2ty^2; & \text{(b)} \quad 3ty^2y' - 2y^3 &= t^3; & \text{(c)} \quad t(y' + y^2) &= y; \\ \text{(d)} \quad y' - 2y &= \sqrt{y} \sin t; & \text{(e)} \quad y' + \frac{y}{t} &= ty\sqrt{y}, \quad t > 0; & \text{(f)} \quad y' &= y(y^2e^t - 1). \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) $y(t) = \frac{1}{1 + Ce^{t^2}}$, $y(t) \equiv 0$; (b) $y(t) = \sqrt[3]{Ct^2 + t^3}$, $y(t) \equiv 0$;

(c) $y(t) = \frac{2t}{C + t^2}$, $y(t) \equiv 0$; (d) $y(t) = \left(Ce^t - \frac{\sin t + \cos t}{4}\right)^2$; (e) $\frac{1}{(C\sqrt{t} - \frac{1}{3}t^2)^2}$;

(f) $y^2(t) = \frac{e^{-t}}{Ce^t + 2}$.

Przykład 1.38. Rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych Bernoulliego oraz wyznaczyć przedziały, na których są one określone:

$$\text{(a)} \quad y' + \frac{ty}{1-t^2} = t\sqrt{y}, \quad y(0) = \frac{4}{9}; \quad \text{(b)} \quad 2y' + y \operatorname{ctg} t = \frac{8 \cos^3 t}{y}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Rozwiązanie.

■ (a) Dzieląc obie strony równania przez $\sqrt{y}$ mamy

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{t\sqrt{y}}{1-t^2} = t.$$

Stąd po podstawieniu $z = \sqrt{y}$, otrzymamy równanie różniczkowe liniowe niejednorodne

$$z' + \frac{tz}{2(1-t^2)} = \frac{1}{2}t.$$

Korzystając z metod rozwiązywania równań różniczkowych liniowych niejednorodnych, otrzymamy

$$z(t) = C\sqrt[4]{1-t^2} - \frac{1}{3}(1-t^2), \quad \text{gdzie } |t| < 1.$$

Zatem całka wyjściowego równania różniczkowego ma postać

$$\sqrt{y(t)} = C\sqrt[4]{1-t^2} - \frac{1}{3}(1-t^2),$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Wykorzystując warunek początkowy, otrzymamy

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{y(0)} = C - \frac{1}{3}.$$

Stąd $C = 1$. Tak więc rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest funkcja

$$y(t) = \left(\sqrt[4]{1-t^2} - \frac{1}{3} (1-t^2) \right)^2.$$

Rozwiązanie określone jest na przedziale $t \in (-1, 1)$.

■ (b) Mnożąc obie strony równania przez y , otrzymamy

$$2yy' + y^2 \operatorname{ctg} t = 8 \cos^3 t.$$

Wprowadzamy nową funkcję z przez podstawienie $z = y^2$. Wtedy $z' = 2yy'$, a równanie przyjmie postać

$$z' + \operatorname{ctg} t z = 8 \cos^3 t.$$

Korzystając z metod rozwiązywania równań różniczkowych liniowych niejednorodnych, otrzymamy

$$z(t) = \frac{C - 2 \cos^4 t}{\sin t}.$$

Wracając do funkcji $y(t)$ dostaniemy dla równania wyjściowego całkę postaci

$$y^2(t) = \frac{C - 2 \cos^4 t}{\sin t},$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą. Wykorzystując warunek początkowy, otrzymamy

$$1^2 = \left(y \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^2 = \frac{C}{1}.$$

Zatem $C = 1$. Tak więc całka zagadnienia początkowego ma postać

$$y^2(t) = \frac{1 - 2 \cos^4 t}{\sin t}.$$

Stąd mamy rozwiązanie

$$y(t) = \sqrt{\frac{1 - 2 \cos^4 t}{\sin t}}.$$

Przedział, na którym jest określone rozwiązanie, znajdziemy rozwiązując nierówność $\frac{1 - 2 \cos^2 t}{\sin t} \geq 0$. Pamiętamy przy tym, że $\pi/2$ musi należeć do tego przedziału. Ostatecznie rozwiązanie jest określone na przedziale

$$\left[\arccos \left(1/\sqrt[4]{2} \right), \arccos \left(-1/\sqrt[4]{2} \right) \right].$$

Zadanie 1.39. Rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych Bernoulliego oraz wyznaczyć przedziały, na których są one określone:

- (a) $t^2 y' + 2ty = y^3$, $t > 0$ $y(1) = -1$; (b) $ty' + y = y^2 \ln t$, $y(1) = 1$;
 (c) $y' - 2y = 2\sqrt{y}e^t \ln t$, $y(1) = 0$; (d) $2y' \ln t + \frac{y}{t} = \frac{1}{y}$, $y(e) = \sqrt{e}$.

Odpowiedzi. (a) $y(t) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{2}{t} - 7t^4\right)}}$, $0 < t < \sqrt[5]{\frac{2}{7}}$; (b) $y(t) = \frac{1}{1 + \ln t}$, $t > \frac{1}{e}$;

(c) $y(t) = (t \ln t - t + 1)^2 e^{2t}$, $t > 0$, $y(t) \equiv 0$; (d) $y(t) = \sqrt{\frac{t}{\ln t}}$, $t > 1$.

1.6. Równania różniczkowe zupełne. Czynniki całkujące*

Definicja 1.40. (równanie różniczkowe zupełne)

Równanie różniczkowe

$$(Z) \quad P(t, y) dt + Q(t, y) dy = 0,$$

nazywamy *równaniem różniczkowym zupełnym*, jeżeli istnieje funkcja $U(t, y)$ taka, że

$$P(t, y) = \frac{\partial U}{\partial t}(t, y), \quad Q(t, y) = \frac{\partial U}{\partial y}(t, y).$$

Uwaga. Wyrażenie $\partial U / \partial t(t, y) dt + \partial U / \partial y(t, y) dy$ nazywamy *różniczką zupełną* funkcji $U(t, y)$ i oznaczamy symbolem $dU(t, y)$. Inaczej mówiąc, równanie różniczkowe (Z) jest równaniem zupełnym, jeżeli jego lewa strona jest różniczką zupełną pewnej funkcji. Równanie można wtedy zapisać w postaci $dU(t, y) = 0$.

FAKT 1.41. (warunek konieczny i wystarczający zupełności równania)

Niech funkcje $P(t, y)$, $Q(t, y)$ oraz ich pochodne cząstkowe rzędu pierwszego $(\partial P / \partial y)(t, y)$, $(\partial Q / \partial t)(t, y)$ będą ciągle w obszarze spójnym $D \subset \mathbb{R}^2$. Wówczas równanie różniczkowe (Z) jest zupełne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $(t, y) \in D$ spełniony jest warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t, y).$$

FAKT 1.42. (całka równania zupełnego)

Całka równania różniczkowego zupełnego (Z) dana jest wzorem

$$U(t, y) = C,$$

gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą.

Przykład 1.43. Sprawdzić, że podane równania różniczkowe są zupełne, a następnie scałkować je:

(a) $(2ty + 1) dt + (t^2 - 2y) dy = 0;$

(b) $(y \cos ty + 1) dt + (t \cos ty - 2y) dy = 0.$

Rozwiązanie.

■ (a) Funkcje $P(x, y) = 2ty + 1$, $Q(x, y) = t^2 - 2y$ i ich pochodne cząstkowe rzędu pierwszego są określone i ciągle na $\mathbb{R}^2$. Ponadto spełniają tam warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2ty + 1) = 2t = \frac{\partial}{\partial t}(t^2 - 2y) = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

To oznacza, że równanie $(2ty + 1) dt + (t^2 - 2y) dy = 0$ jest zupełne. Zatem istnieje funkcja $U(t, y)$ taka, że

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = P(t, y) = 2ty + 1, \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(t, y) = t^2 - 2y. \end{cases}$$

Całkując pierwsze z równań względem zmiennej t , otrzymamy

$$U(t, y) = \int P(t, y) dt = \int (2ty + 1) dt = t^2 y + t + u(y),$$

gdzie stała całkowania $u(y)$ jest dowolną funkcją różniczkowalną zmiennej y . Teraz wyznaczmy funkcję $u(y)$, wykorzystując drugie równanie układu. Różniczkując funkcję $U(t, y) = t^2 y + t + u(y)$ względem zmiennej y , otrzymamy

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(t^2 y + t + u(y)) = t^2 + u'(y).$$

Wstawiając do drugiego równania mamy

$$t^2 + u'(y) = t^2 - 2y.$$

Stąd $u'(y) = -2y$, więc $u(y) = -y^2 + c$, gdzie c jest dowolną stałą rzeczywistą. Zatem

$$U(t, y) = t^2 y + t - y^2 + c.$$

Ponieważ całka równania zupełnego dana jest wzorem $U(t, y) = C$, więc całka rozważanego równania ma postać $t^2 y + t - y^2 + c = C$, czyli $t^2 y + t - y^2 = C_1$, gdzie $C_1 = C - c$ jest dowolną stałą rzeczywistą.

■ (b) Funkcje $P(x, y) = y \cos ty + 1$, $Q(x, y) = t \cos ty - 2y$ i ich pochodne

cząstkowe rzędu pierwszego są określone i ciągłe na $\mathbb{R}^2$. Ponadto spełniają tam warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y \cos ty + 1) = \cos ty - ty \sin ty = \frac{\partial}{\partial t} (t \cos ty - 2y) = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

To oznacza, że równanie $(y \cos ty + 1) dt + (t \cos ty - 2y) dy = 0$ jest zupełne. Zatem istnieje funkcja $U(t, y)$ taka, że

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = P(t, y) = y \cos ty + 1, \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(t, y) = t \cos ty - 2y. \end{cases}$$

Całkując względem zmiennej y drugie z równań, otrzymamy

$$U(t, y) = \int Q(t, y) dy = \int (t \cos ty - 2y) dy = \sin ty - y^2 + u(t),$$

gdzie stała całkowania $u(t)$ jest dowolną funkcją różniczkowalną zmiennej t . Teraz wyznaczmy funkcję $u(t)$, wykorzystując drugie równanie układu. Różniczkując funkcję $U(t, y) = \sin ty - y^2 + u(t)$ względem zmiennej t , otrzymamy

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\sin ty - y^2 + u(t)) = y \cos ty + u'(t).$$

Po wstawieniu do pierwszego równania układu mamy

$$y \cos ty + u'(t) = y \cos ty + 1.$$

Stąd $u'(t) = 1$, więc $u(t) = t + c$, gdzie c jest dowolną stałą rzeczywistą. Zatem

$$U(t, y) = \sin ty - y^2 + t + c.$$

Ponieważ całka równania zupełnego dana jest wzorem $U(t, y) = C$, więc całka rozważanego równania ma postać $\sin ty - y^2 + t + c = C$, czyli $\sin ty - y^2 + t = C_1$, gdzie $C_1 = C - c$ jest dowolną stałą rzeczywistą.

Zadanie 1.44. Sprawdzić, że podane równania różniczkowe są zupełne, a następnie scałkować je:

$$(a) \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{t^2} \right) dt + \left(1 + \frac{1}{t} - \frac{t}{y^2} \right) dy = 0; \quad (b) (\cos t + y) dt - (\sin y - t) dy = 0;$$

$$(c) \frac{y dt - t dy}{(t + y)^2} = 0; \quad (d) (4t^3 y + y^2) dt + (t^4 + 2ty) dy = 0;$$

$$(e) (2ty + e^y) + (t^2 + te^y + 2y) \frac{dy}{dt} = 0; \quad (f) y \sin ty + (t \sin ty + \cos y) \frac{dy}{dt} = 0.$$

Odpowiedzi. (a) $\frac{y}{t} + \frac{t}{y} + y = C$; (b) $\sin t + \cos y + ty = C$; (c) $y = Ct$;
 (d) $t^4 y + y^2 t = C$; (e) $t^2 y + y^2 + te^y = C$; (f) $\sin y - \cos ty = C$.

Przykład 1.45. Rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych zupełnych:

(a) $(3t^2 + y^2) dt + (2ty + 1) dy = 0, y(1) = 0$;

(b) $ye^t(t+1) dt + te^t dy = 0, y(1) = \frac{1}{e}$.

Rozwiązanie.

■ (a) Ponieważ równanie $\underbrace{(3t^2 + y^2)}_P dt + \underbrace{(2ty + 1)}_Q dy = 0$ jest zupełne, więc istnieje funkcja $U(t, y)$ taka, że

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = P(t, y) = 3t^2 + y^2, \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(t, y) = 2ty + 1. \end{cases}$$

Całkując względem zmiennej y drugie z równań, otrzymamy

$$U(t, y) = \int Q(t, y) dy = \int (2ty + 1) dy = ty^2 + y + u(t),$$

gdzie stała całkowania $u(t)$ jest dowolną funkcją różniczkowalną zmiennej t . Teraz wyznaczmy funkcję $u(t)$, wykorzystując pierwsze równanie układu. Różniczkując funkcję $U(t, y) = ty^2 + y + u(t)$ względem zmiennej t , otrzymamy

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (ty^2 + y + u(t)) = y^2 + u'(t).$$

Wstawiając do pierwszego równania układu mamy

$$y^2 + u'(t) = 3t^2 + y^2.$$

Stąd $u'(t) = 3t^2$, więc $u(t) = t^3 + c$, gdzie c jest dowolną stałą rzeczywistą. Zatem

$$U(t, y) = ty^2 + y + t^3 + c.$$

Ponieważ całka równania zupełnego dana jest wzorem $U(t, y) = C$, więc całka rozważanego równania ma postać $ty^2 + y + t^3 + c = C$, czyli $ty^2 + y + t^3 = C_1$, gdzie $C_1 = C - c$ jest dowolną stałą rzeczywistą. Dla rozwiązania zagadnienia początkowego należy z warunku początkowego $y(1) = 0$ wyznaczyć stałą C_1 .

Podstawiając w rozwiązaniu $t = 1$, $y = 0$ mamy $C_1 = 1 \cdot 0 + 0 + 1^3 = 1$. Zatem rozwiązaniem jest funkcja uwikłana określona równaniem

$$ty^2 + y + t^3 = 1.$$

■ (b) Ponieważ równanie $\underbrace{ye^t(t+1)}_P dt + \underbrace{te^t}_Q dy = 0$ jest zupełne, zatem istnieje funkcja $U(t, y)$ taka, że

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = P(t, y) = ye^t(t+1), \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(t, y) = te^t. \end{cases}$$

Całkując względem zmiennej y drugie z tych równań (bo jest prostsze) mamy

$$U(t, y) = \int Q(t, y) dy = \int te^t dy = te^t y + u(t),$$

gdzie stała całkowania $u(t)$ jest dowolną funkcją różniczkowalną zmiennej t . Teraz wyznaczmy funkcję $u(t)$, wykorzystując pierwsze równanie układu. Różniczkując funkcję $U(t, y) = te^t y + u(t)$ względem zmiennej t dostaniemy

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (te^t y + u(t)) = e^t y + te^t y + u'(t).$$

Wstawiając do pierwszego równania układu mamy

$$e^t y + te^t y + u'(t) = te^t y + ye^t.$$

Stąd $u'(t) = 0$, więc $u(t) = c$, gdzie c jest dowolną stałą rzeczywistą. Zatem

$$U(t, y) = te^t y + c.$$

Ponieważ całka równania zupełnego dana jest wzorem $U(t, y) = C$, więc całka rozważanego równania ma postać $te^t y + c = C$, czyli $te^t y = C_1$, gdzie $C_1 = C - c$ jest dowolną stałą rzeczywistą. Dla rozwiązania zagadnienia początkowego należy z warunku początkowego $y(1) = 1/e$ wyznaczyć stałą C_1 . Podstawiając w rozwiązaniu $t = 1$, $1/e$ mamy $C_1 = 1 \cdot e^1 \cdot (1/e) = 1$. Zatem całka ma postać $te^t y = 1$. Stąd

$$y(t) = \frac{1}{te^t}$$

jest szukanym rozwiązaniem.

Zadanie 1.46. Rozwiązać zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych zupełnych:

(a) $(2t + y) dt + (t - 2y + 1) dy = 0, \quad y(0) = 1;$

(b) $\left(1 - \frac{y}{t^2} - y\right) dt + \left(\frac{1}{t} - t - 2y\right) dy = 0, \quad y(1) = 0;$

(c) $\left(1 - \frac{1}{t}\right) dt + \left(\frac{1}{y} - 2y\right) dy = 0, \quad y(1) = 1;$

(d) $2e^{2t}y + y^2 + (e^{2t} + 2yt) \frac{dy}{dt} = 0, \quad y(0) = \pi.$

Odpowiedzi. (a) $t^2 + ty - y^2 + y = 0;$ (b) $\frac{y}{t} - ty + t - y^2 = 1;$ (c) $\ln \frac{y}{t} + t - y^2 = 0;$ (d) $e^{2t}y + ty^2 = \pi.$

Definicja 1.47. (czynniki całkujące)

Funkcję $\mu(t, y) \neq 0$ nazywamy *czynnikiem całkującym* równania (Z), jeżeli równanie różniczkowe

$$\mu(t, y)P(t, y) dt + \mu(t, y)Q(t, y) dy = 0$$

jest zupełne.

Uwaga. Jeżeli znamy czynnik całkujący równania (Z), to całkowanie tego równania polega na pomnożeniu obu jego stron przez ten czynnik, a następnie scałkowaniu otrzymanego równania zupełnego. Przy czym, tak otrzymana całka może zawierać rozwiązania obce, jeżeli wzdłuż pewnej krzywej czynnik się zeruje. Możemy też zgubić pewne rozwiązania, jeżeli wzdłuż pewnej krzywej czynnik staje się nieskończony.

FAKT 1.48. (czynniki całkujące zależny od jednej zmiennej)

1. Jeżeli wyrażenie

$$T = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial t} \right)$$

jest funkcją tylko zmiennej t , to równanie (Z) ma czynnik całkujący postaci

$$\mu(t) = \exp \int T(t) dt.$$

2. Jeżeli wyrażenie

$$Y = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

jest funkcją tylko zmiennej y , to równanie (Z) ma czynnik całkujący postaci

$$\mu(y) = \exp \int Y(y) dy.$$

Uwaga. Całki w powyższych wzorach rozumiemy jako dowolne, lecz ustalone funkcje pierwotne. Praktycznie: całkując wyrażenia $T(t)$, $Y(y)$ stałe całkowania przyjmujemy równe 0.

Przykład 1.49. Wyznaczyć czynniki całkujące zależne tylko od jednej zmiennej, a następnie scałkować równania:

$$(a) (2t^2y - 1) dt + t^3 dy = 0, \text{ gdzie } t > 0; \quad (b) y^2 dt + t(2y + 1) dy = 0.$$

Rozwiązanie.

■ (a) Równanie $\underbrace{(2t^2y - 1)}_P dt + \underbrace{t^3}_Q dy = 0$ nie jest zupełne, gdyż

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2t^2y - 1) = 2t^2 \neq 3t^2 = \frac{\partial}{\partial t} (t^3) = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Wyznamy zatem czynnik całkujący tego równania. Wyrażenie

$$T = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial t} \right) = \frac{2t^2 - 3t^2}{t^3} = \frac{-1}{t}$$

jest funkcją tylko zmiennej t . Zatem istnieje czynnik całkujący zależny tylko od t i wyraża się wzorem

$$\mu(t) = \exp \left(\int T(t) dt \right) = \exp \left(\int \frac{-1}{t} dt \right) = \exp(-\ln t) = \frac{1}{t}.$$

Mnożąc obie strony równania $(2t^2y - 1) dt + t^3 dy = 0$ przez czynnik całkujący, otrzymamy równanie zupełne

$$\underbrace{\left(2ty - \frac{1}{t} \right)}_{\overline{P}} dt + \underbrace{t^2}_{\overline{Q}} dy = 0.$$

Zatem istnieje funkcja $U(t, y)$ taka, że

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \overline{P}(t, y) = 2ty - \frac{1}{t}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \overline{Q}(t, y) = t^2. \end{cases}$$

Całkując względem zmiennej y drugie z tych równań (bo jest prostsze), otrzymamy

$$U(t, y) = \int \overline{Q}(t, y) dy = \int t^2 dy = t^2 y + u(t),$$

gdzie stała całkowania $u(t)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją zmiennej t . Wykorzystując pierwsze równanie układu wyznaczmy funkcję $u(t)$. Różniczkując funkcję $U(t, y) = t^2 y + u(t)$ względem zmiennej t , otrzymamy

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (t^2 y + u(t)) = 2ty + u'(t).$$

Wstawiając do pierwszego równania układu mamy

$$2ty + u'(t) = 2ty - \frac{1}{t}.$$

Stąd $u'(t) = -1/t$, więc $u(t) = -\ln t + c$, gdzie c jest dowolną stałą rzeczywistą. Zatem

$$U(t, y) = t^2 y - \ln t + c.$$

Ponieważ całka równania zupełnego dana jest wzorem $U(t, y) = C$, więc całka rozważanego równania ma postać

$$t^2 y - \ln t + c = C, \quad \text{czyli} \quad t^2 y - \ln t = C_1,$$

gdzie $C_1 = C - c$ jest dowolną stałą rzeczywistą.

■ (b) Równanie $\underbrace{y^2}_{P} dt + \underbrace{t(2y+1)}_Q dy = 0$ nie jest zupełne, gdyż

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y^2) = 2y \neq 2y + 1 = \frac{\partial}{\partial t} [t(2y + 1)] = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Wyznamy zatem czynnik całkujący dla tego równania. Wyrażenie

$$Y = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{2y + 1 - 2y}{y^2} = \frac{1}{y^2}.$$

jest funkcją tylko zmiennej y . Zatem istnieje czynnik całkujący zależny tylko od y . Czynniki ten wyraża się wzorem

$$\mu(y) = \exp \left(\int Y(y) dy \right) = \exp \left(\int \frac{1}{y^2} dt \right) = \exp \left(-\frac{1}{y} \right).$$

Mnożąc obie strony równania $y^2 dt + t(2y + 1) dy = 0$ przez czynnik całkujący, otrzymamy równanie zupełne

$$\underbrace{y^2 e^{-\frac{1}{y}}}_{\bar{P}} dt + \underbrace{t(2y + 1) e^{-\frac{1}{y}}}_{\bar{Q}} dy = 0.$$

Zatem istnieje funkcja $U(t, y)$ taka, że

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \overline{P}(t, y) = y^2 e^{-\frac{1}{y}}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \overline{Q}(t, y) = t(2y + 1)e^{-\frac{1}{y}}. \end{cases}$$

Całkując względem zmiennej t pierwsze z tych równań (bo jest prostsze), otrzymamy

$$U(t, y) = \int \overline{P}(t, y) dt = \int y^2 e^{-\frac{1}{y}} dt = ty^2 e^{-\frac{1}{y}} + u(y),$$

gdzie stała całkowania $u(y)$ jest dowolną funkcją różniczkowalną zmiennej y . Teraz wykorzystując drugie równanie układu wyznaczmy funkcję $u(y)$. Różniczkując funkcję $U(t, y) = ty^2 e^{-1/y} + u(y)$ względem zmiennej y , otrzymamy

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(ty^2 e^{-\frac{1}{y}} + u(y) \right) = ty e^{-\frac{1}{y}} (2y + 1) + u'(y).$$

Wstawiając do drugiego równania układu mamy

$$t(2y + 1)e^{-\frac{1}{y}} + u'(y) = t(2y + 1)e^{-\frac{1}{y}}.$$

Stąd $u'(y) = 0$, więc $u(y) = c$, gdzie c jest dowolną stałą rzeczywistą. Zatem

$$U(t, y) = 2tye^{-\frac{1}{y}} + c.$$

Ponieważ całka równania zupełnego dana jest wzorem $U(t, y) = C$, więc całka rozważanego równania ma postać $2tye^{-1/y} + c = C$, czyli $2tye^{-1/y} = C_1$, gdzie $C_1 = C - c$ jest dowolną stałą rzeczywistą.

Zadanie 1.50. Wyznaczyć czynniki całkujące zależne tylko od jednej zmiennej, a następnie scałkować równania:

$$(a) \ 2ty \, dt + \left(y^2 - 3t^2 \right) dy = 0; \quad (b) \ \left(3ty - \frac{2}{y} \right) dt + t \left(t + \frac{1}{y^2} \right) dy = 0;$$

$$(c) \ (2t^2 - 4y^3) + 3ty^2 y' = 0; \quad (d) \ y^2(2t - 3) + 4ty(t - 3y)y' = 0;$$

$$(e) \ \ln y \, dt - \frac{t}{y} dy = 0; \quad (f) \ \left(4y^2 + \frac{3 \sin y}{t} \right) dt + (2ty + \cos y) dy = 0.$$

Odpowiedzi. (a) $\mu(y) = \frac{1}{y^4}$, $\frac{t^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$; (b) $\mu(t) = t$, $t^3 y - \frac{t^2}{y} = C$;

(c) $\mu(t) = \frac{1}{t^5}$, $\frac{y^3}{t^4} - \frac{1}{t^2} = C$; (d) $\mu(y) = y^2$, $y^4 t(t - 3) = C$;

(e) $\mu(y) = \frac{1}{\ln^2 y}$, $\frac{t}{\ln y} = C$; (f) $\mu(t) = t^3$, $t^3 (ty^2 + \sin y) = C$.