

MATEMATYCY

KARIERY UCZONYCH
I DZIEJE INSTYTUCJI

MATEMATYCY

KARIERY UCZONYCH
I DZIEJE INSTYTUCJI

MAREK ZAKRZEWSKI



Projekt okładki

DWA:WIATRY Pracownia graficzna

Copyright © 2026 by Marek Zakrzewski

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład komputerowy książki w systemie L^AT_EX wykonał autor.
Rysunki wykonał Marian Gewert.

ISBN 978-83-67234-30-6

Wydanie I, Wrocław 2026

Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl

Druk i oprawa: Drukarnia I-BIS Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Przedmowa	xiv
Prolog: rodowód średniowiecznej matematyki	1
I Wczesne uniwersytety i pierwsze akademie 1200-1800	9
1 Od Leonarda z Pizy do matematyków włoskiego Renesansu	12
1.1 Leonardo z Pizy	12
1.2 Miejsce matematyki na uniwersytetach Bolonii i Padwy	15
1.3 Wiek algebry	17
1.4 Scipione del Ferro	17
1.5 Tartaglia i Cardano	18
1.6 Bombelli i jego <i>Algebra</i>	19
2 Uniwersytet Paryski, Sacrobosco i Oresme	21
2.1 Kilka historycznych momentów	21
2.2 Studia na wydziale <i>artes</i>	22
2.3 Johannes de Sacrobosco	24
2.4 Nicole Oresme	24
2.5 Pierwsze jaskółki humanizmu	25
3 Oksford Średniowiecza — Oksford Renesansu	27
3.1 Początki Oksfordu i Cambridge	27
3.2 Matematyka w średniowiecznym Oksfordzie	28
3.3 Tajemniczy świat kolegiów	29
3.4 Czasy Tudorów i Akt Supremacji	31

4	Gutenberg, odkrycia geograficzne i narodziny humanizmu	33
4.1	Rewolucja Gutenberga i weneccy wydawcy	33
4.2	Odkrycie Archimedesza	34
4.3	Odkrycia geograficzne, nawigacja i kartografia	36
4.4	Franciszek I i Collège royal	37
4.5	Viète	40
5	Londyn epoki elżbietańskiej i Gresham College	42
5.1	Londyn epoki elżbietańskiej	42
5.2	Gresham College	45
6	Krąg Mersenne’a, Descartes i Fermat	48
6.1	Mersenne i jego krąg	48
6.2	Descartes, czyli Kartezjusz	50
6.3	Fermat	51
7	Sir Henry Savile, Henry Lucas i pierwsze katedry	54
7.1	Oksford i dwie katedry saviliańskie	54
7.2	Saviliańska Katedra Geometrii i John Wallis	55
7.3	Saviliańska katedra astronomii i Christopher Wren	56
7.4	Cambridge i Lukasjeńska Katedra Geometrii	58
8	Colbert i Akademia Nauk	62
8.1	Colbert i powstanie Akademii Nauk	62
8.2	Pierwsi członkowie	64
8.3	Prezes i sekretarz: Bignon i Fontenelle	67
9	Royal Society	70
9.1	Początki	70
9.2	Hooke i Oldenburg	72
9.3	Kim byli członkowie Towarzystwa?	73
9.4	Prezesura Newtona i czasy późniejsze	75
10	Newton, fluksje i <i>Principia</i>	78
10.1	Młodość, <i>annus mirabilis</i> i Cambridge	78
10.2	<i>Principia</i> i matematyzacja fizyki	80
10.3	Londyn	81
10.4	Szeregi potęgowe i rachunek fluksji	81

11 Leibniz i jego mecenas	85
11.1 Wczesna młodość	85
11.2 Początki kariery	86
11.3 W służbie dynastii hanowerskiej	87
11.4 Spór o priorytet	90
12 Bazylea i Bernoulli	92
12.1 Uniwersytet w Bazylei	92
12.2 Dwaj sławni bracia: Jacob i Johann Bernoulli	95
12.3 Daniel i inni	97
13 Edynburg, Szkockie Oświecenie i dynastia Gregorych	99
13.1 Szkockie uniwersytety i Szkockie Oświecenie	99
13.2 Uniwersytet Edynburski i dynastia Gregorych	101
13.3 Towarzystwo Filozoficzne i encyklopedie	103
14 Paryż XVIII wieku, d'Alembert i Lagrange	106
14.1 Nauczanie matematyki: Collège royal i inne kolegia	106
14.2 Nauczanie matematyki w szkołach wojskowych	108
14.3 Akademia Nauk, kształt Ziemi i kartografia	109
14.4 D'Alembert, salony i <i>Encyclopédie</i>	111
14.5 Lagrange	113
15 Euler pomiędzy Petersburgiem i Berlinem	115
15.1 Początki petersburskiej akademii	115
15.2 Euler w Petersburgu 1727-1741	118
15.3 Akademia Berlińska	121
15.4 Euler w Berlinie 1741-1766	122
15.5 Euler znowu w Petersburgu 1766-1783	125
II Kształtowanie się nowożytnego uniwersytetu 1800-1900	127
16 Francja: między rewolucją a Napoleonem	130
16.1 Od roku 1790 do upadku Robespierre'a	130
16.2 Lata 1794-1795	132
16.3 Reformy Napoleona	133
16.4 Laplace i Fourier	134

17 Getynga i Gauss	138
17.1 Początki uniwersytetu w Getyndze	139
17.2 Getynga przed Gaussem	141
17.3 Młodość Gaussa, głównie w Brunszwiku	142
17.4 Gauss w Getyndze	145
18 Szkoła Politechniczna i jej profesorowie	147
18.1 Szkoła Politechniczna	147
18.2 Trzej geometrzy	149
18.3 Cauchy	150
18.4 Liouville	152
19 Berlin Humboldtów i Journal Crelle'a	154
19.1 Wilhelm von Humboldt i początki Uniwersytetu Berlińskiego .	154
19.2 Jacobi i funkcje eliptyczne	156
19.3 Journal Crelle'a i dyplomacja Alexandra Humboldta	157
19.4 Dirichlet i Steiner	159
20 Kłopoty ze zrozumieniem I:	
Ruffini, Abel i teoria Galois	161
20.1 Pierwsze próby	161
20.2 Lagrange	162
20.3 Ruffini	163
20.4 Abel	163
20.5 Galois	165
21 Getynga po Gaussie: Dirichlet i Riemann	168
21.1 Dirichlet	168
21.2 Riemann	169
21.3 Dedekind, ETH i Brunszwik	170
22 Kłopoty ze zrozumieniem II:	
odkrycie geometrii nieeuklidesowych	172
22.1 Prekursorzy	173
22.2 Łobaczewski	175
22.3 Bolyai	175
22.4 Recepcja	176

23 Berlin Kummera, Weierstrassa i Kroneckera	179
23.1 Kummer	179
23.2 Weierstrass przed Berlinem	180
23.3 Seminarium Kummera i Weierstrassa	181
23.4 Szkoła Weierstrassa	182
23.5 Kronecker	183
24 Cambridge, Tripos i Maxwell	185
24.1 Tripos	185
24.2 Hopkins i Routh	188
24.3 Tripos się zmienia	190
24.4 Maxwell	193
25 Kwaterniony, wektory i algebra liniowa	195
25.1 Hamilton i kwaterniony	195
25.2 Grassmann	196
25.3 Gibbs, Heaviside i wektory	198
25.4 Cayley i macierze	199
26 Petersburg i Czebyszew	201
26.1 Petersburska Akademia Nauk po śmierci Eulera	201
26.2 Ostrogradski i Buniakowski	203
26.3 Powstanie Uniwersytetu Petersburskiego i Siergiej Uwarow . .	204
26.4 Czebyszew i szkoła petersburska	206
27 Oksford i reformy	208
27.1 Tutorzy	208
27.2 Czas reform: 1845-1945	209
27.3 Pierwsze egzaminy w Oksfordzie	212
27.4 Sylvester	213
28 Poincaré i inni politechnicy	215
28.1 Pokolenie 1822: Bertrand i Hermite	215
28.2 Poincaré	217
29 Getynga, Klein i Hilbert	220
29.1 Getynga przed Kleinem	220
29.2 Klein	221
29.3 Klein, Althoff i polityka	223
29.4 Hilbert	224
29.5 Getynga po Kleinie i Hilbercie	226

30 Paryż: dominacja Szkoły Normalnej	227
30.1 Co dawała Szkoła Normalna?	227
30.2 Darboux	229
30.3 Picard i Hadamard	230
31 Wielki powrót Włochów	233
31.1 Oświata i włoskie uniwersytety	233
31.2 Pawia i Brioschi	234
31.3 Piza i Betti	235
31.4 Rzym	236
31.5 Volterra i Severi	237
32 Oxbridge i Londyn na progu XX w.	240
32.1 Cambridge Hardy’ego i Littlewooda	240
32.2 Ramanujan	241
32.3 Hardy w Oksfordzie	242
32.4 Uniwersytet Londyński	244
32.5 Uniwersytety z czerwonej cegły	247
33 Sto lat przyspieszenia	249
33.1 Niemcy	250
33.2 Francja	252
33.3 Anglia	253
33.4 Rosja	254
III Na progu nowoczesności 1900-1950	255
34 Cantor i narodziny teorii mnogości	258
34.1 Cantor	258
34.2 Dobry porządek, aksjomat wyboru i Zermelo	261
34.3 Brouwer i intuicjonizm	263
34.4 Spór o podstawy i „bitwa żab z myszami”	264
35 Francja: początek nowoczesności	267
35.1 Od odkryć Cantora do deskryptywnej teorii mnogości	267
35.2 Borel	269
35.3 Lebesgue i Baire	270

36 Początki moskiewskiej szkoły matematycznej	272
36.1 Jegorow i Łuzin	272
36.2 Luzitania	273
36.3 Aleksandrow, Suslin i deskryptywna teoria mnogości	275
37 Kobiety w matematyce	277
37.1 Sophie Germain	278
37.2 Sofia Kowalewska	279
37.3 Charlotte Angas Scott	280
37.4 Emmy Noether	281
37.5 Nina Bari	283
38 Od Harvardu do Uniwersytetu Hopkinsa	284
38.1 Harvard i Yale	284
38.2 Charles William Eliot i Harvard	286
38.3 Daniel Coit Gilman i Uniwersytet Johnsa Hopkinsa	288
39 Powstanie polskiej szkoły matematycznej	290
39.1 W przededniu niepodległości	290
39.2 W dwadzieścia lat później	295
39.3 Trzy perły polskiej matematyki	297
39.4 Banach i Tarski	298
39.5 Spojrzenie zza oceanu	300
40 Chicago i Eliakim Hastings Moore	302
40.1 Chicago, Rockefeller i William Harper	302
40.2 Eliakim Hastings Moore	303
40.3 ...i jego uczniowie	305
41 Akademia Nauk, Mech.-Mat. i Kołmogorow	306
41.1 AN ZSRR	306
41.2 Mech.-Mat.	308
41.3 Leningrad	310
41.4 Specyfika trudnych czasów	311
41.5 Kołmogorow	312
42 Princeton, Princeton i von Neumann	314
42.1 Uniwersytet Princeton	314
42.2 Rodzeństwo L. i C. Bamberger, A. Flexner i Instytut	316
42.3 Von Neumann	318

43 Logiczne aspekty matematyki	319
43.1 Frege i Peano	320
43.2 Russell, Whitehead i <i>Principia mathematicae</i>	321
43.3 Program Hilberta i twierdzenia Gödla	323
43.4 Gödel	325
43.5 Turing i obliczalność	327
44 Nie tylko Harvard, Princeton i Chicago	329
44.1 Nowy Jork i Instytut Couranta	329
44.2 Berkeley	330
44.3 MIT i Caltech	331
44.4 Stanford	333
44.5 Doktoraty	334
44.6 Toronto	335
45 Bourbaki	337
45.1 Początki	338
45.2 Ogólna koncepcja dzieła	339
45.3 Tożsamość autora	340
45.4 Skład grupy	341
45.5 Zakres materiału i styl	342
45.6 Znaczenie Bourbakiego	343
46 Matematyka (niemal) elementarna i węgierski fenomen	345
46.1 Pólya, błędzenie losowe i mnóstwo innych tematów	345
46.2 Ramsey i teoria Ramseya	348
46.3 Erdős i jeszcze kilku Węgrów	350
46.4 Ernő Rubik i jego kostka	352
47 Martin Gardner i popularyzacja	353
47.1 Gardner	353
47.2 Polimina i kostki Somy	354
47.3 Conway, jego żołnierze i „Gra w życie”	355
47.4 Steinhaus	358
48 Między matematyką a historią	359
48.1 Wielkie syntezy	360
48.2 Starożytny Egipt i Babilon	362
48.3 Matematyka grecka	364
48.4 Średniowiecze	366
48.5 Renesans i wiek XVII	367

Spis treści	xiii
Epilog: 800 lat drogi do nowoczesnej profesji	368
Bibliografia	371
Indeks miast i osób	382

Przedmowa

Nie znam innej grupy [zawodowej] mniej zainteresowanej pieniędzmi.

Karl Compton — wieloletni prezydent MIT o naukowcach,
cyt. wg S. Shapin, *The Scientific Life*, s. 104.

Książka ma dwa rodzaje bohaterów: ludzi (zazwyczaj sławnych matematyków) i instytucje. Są to bohaterowie równorzędni, w tym samym stopniu interesuje mnie kariera zawodowa omawianych matematyków, co historia instytucji, w których pracowali.

Przy powierzchownym wertowaniu książki można odnieść wrażenie, że zawiera mnóstwo (ponad 100) biografii. Ale nie są to pełne biografie. Śledzę wyłącznie karierę zawodową moich bohaterów, przede wszystkim jej najtrudniejsze początki. Staram się też wyjaśnić, czym się interesowali i dlaczego. Na tyle, na ile moje źródła pozwalają, odnotowuję ich sytuację ekonomiczną i pozycję społeczną. Książka przedstawia też w ogólnym zarysie historię ponad 20 sławnych instytucji. Również w ich przypadku najbardziej zajmuje mnie, jak to się stało, że dana uczelnia zdobyła liczącą się pozycję.

Wiele spośród notek biograficznych poświęconych jest nie-matematykom: ministrom, wpływowym urzędnikom, rektorom czy prezydentom akademii. To od nich zależała pomyślność uniwersytetów i akademii, a pośrednio — sukcesy uczonych. Wiele wspomnianych w książce osób to postacie dziś kompletnie zapomniane. Obecność takich osób w tekście nie jest przypadkiem — to bardzo świadomy wybór. Dobrze jest czasem uświadomić sobie, że znaczący wpływ na historię matematyki mieli nie tylko uczeni klasy Newtona, Eulera czy Poincarého, ale także wielu szarych matematyków, choć rzadko kiedy wpływ ten wynika z ich publikacji.

Książka nie jest historią matematyki, ale Czytelnik, który przeczyta całość powinien zdobyć orientacyjną wiedzę o rozwoju matematyki w okresie od Starożytności do połowy XX w. Książka nie obejmuje zasadniczo ostatnich 80 lat z trzech powodów: powojenne kariery matematyków przebiegają dość podobnie, instytucjonalny krajobraz matematyki bardzo się w tym okresie komplikuje, wreszcie – brak odpowiedniej perspektywy historycznej.

Czytelnik znający moją wcześniejszą książkę *Świat matematyków* może zapytać, czym obie pozycje się różnią. Najprościej rzecz ujmując można powiedzieć, że wcześniejsza przedstawiała podstawowy model: jak zasadniczo przebiegała kariera matematyka w różnych epokach — obecna skupia się na szczegółach: jak ten ogólny model wyglądał w praktyce. *Świat matematyków* jest czymś w rodzaju mapy dającej obraz całości, obecna książka przygląda się jej fragmentom, tracimy obraz całości, ale poznajemy interesujące szczegóły. Z natury rzeczy nie dało się uniknąć pewnych powtórzeń, tylko dzięki nim książka jest samodzielną całością. W takich przypadkach starałem się narrację znacząco skracać albo wzbogacać o nowe, interesujące szczegóły.

Niniejsza książka — podobnie jak *Świat matematyków* — nie jest monografią naukową. Stanowi raczej popularne wprowadzenie do tematyki, która może zainteresować każdego matematyka, choćby trochę, zainteresowanego historią swojej dyscypliny.

Część nazwisk pisana jest KAPITALIKAMI. Ten szczególny krój używany jest tam, gdzie pojawiają się istotne informacje o istotnych postaciach bądź dłuższe omówienia wybranych bohaterów, nawet gdy są to bohaterowie drugiego planu. Oczywiście kryterium to jest niezbyt ściśle.

Podstawowym źródłem informacji biograficznych był dla mnie czterotomowy *Biographical Dictionary of Mathematicians* pod redakcją Charlesa C. Gillispiego. W przypadku mniej znanych postaci pomocna była Wikipedia, zwłaszcza jej wersje angielska, francuska, niemiecka i rosyjska. W książce nie ma odsyłaczy do tych oczywistych źródeł.



Gorąco dziękuję moim Wydawcom Marianowi Gewertowi i Zbigniewowi Skoczyłowskiemu za gotowość wydania kolejnej zdecydowanie niekomercyjnej książki i pomoc techniczną i redakcyjną w przygotowaniu tekstu do druku. Serdecznie dziękuję również Tomaszowi Żakowi za wnikliwą lekturę i cenne uwagi do końcowej wersji książki.

III

Na progu nowoczesności 1900-1950

Zjawiskiem najbardziej znaczącym po roku 1914 jest pojawienie się na scenie matematycznej aktywnych szkół narodowych w krajach, w których wcześniej tylko nieliczni uczeni zyskali renomę międzynarodową.[...] trzeba tu wspomnieć przede wszystkim o ZSRR i Polsce, gdzie pojawiła się nagle plejada matematyków pierwszej wielkości (Łuzin, Suslin, później Urysohn, P. Aleksandrow, Kołmogorow, Winogradow, Pontriagin, Pietrowski, Gelfand w ZSRR, Sierpiński, Janiszewski, Kuratowski, Banach, później Hurewicz, Eilenberg, Zygmund, Schauder w Polsce). To dzięki ich wysiłkom zawdzięczamy zwłaszcza rozwój podstaw topologii i współczesnej analizy funkcjonalnej.

Jean Dieudonné, *Abrégé d'histoire des Mathématiques 1700-1900*, Paris, Hermann 1978.

Od początków XX w. rośnie znaczenie matematyki amerykańskiej, ok. roku 1940 USA stają się matematyczną potęgą numer 1, być może przez pewien czas dzieląc ten tytuł z ZSRR. W latach międzywojennych nadspodziewanie dużą rolę odgrywa Polska, a także niewielkie Węgry. Niewątpliwie już około roku 1930 kończy się ostatecznie okres, w którym na Europę Zachodnią przypadało 70-80% światowej produkcji matematycznej.

W początkach XX w. zasadniczo kończy się również proces kształtowania się europejskiego uniwersytetu, nawet uniwersytety angielskie zaczynają wprowadzać doktorat. Europejski uniwersytet zacznie zmieniać się znacząco dopiero po Deklaracji Bolońskiej (1999).

Rok 1900 nie kończy epoki przyspieszenia. Trwa ona nadal, prawdopodobnie tempo zmian jest teraz jeszcze większe niż w wieku XIX. Następują też zasadnicze zmiany społeczne. Po zakończeniu I Wojny Światowej praktycznie wszędzie w Europie kobiety mają już dostęp do wyższego wykształcenia. We Francji, w Niemczech i Wlk. Brytanii ok. roku 1939 szkołę średnią kończy około 3-4% wszystkich uczniów odpowiedniej grupy wiekowej¹. Wciąż zatem studia mają charakter bardzo elitarny, ale liczba etatów akademickich w porównaniu z rokiem 1870 rośnie pewnie trzy-czterokrotnie.

¹F. Ringer, *Education and Society in Modern Europe*, s. 221.

W latach międzywojennych rośnie oczywiście także liczba etatów matematycznych poza szkolnictwem. Matematyków zatrudniają teraz coraz częściej urzędy statystyczne, towarzystwa ubezpieczeniowe, banki i niektóre inne instytucje. Można zaryzykować stwierdzenie, że przypada teraz jeden matematyk na 5-7 tysięcy mieszkańców, a liczba etatów akademickich dla matematyków rośnie w Europie do 3-5 tysięcy.



W pierwszej połowie XX wieku matematyka znacznie zmienia swój charakter. Z historycznego punktu widzenia zmiany te są trochę nieoczekiwane. Przynajmniej od początków XVII wieku głównym motorem rozwoju matematyki były fizyka i astronomia, czasem wewnętrzne problemy matematyki. W XX w. chyba po raz pierwszy tak dużą rolę zaczęli odgrywać matematycy o skłonnościach filozoficznych.

Jeszcze na wczesnych kongresach matematyków, na przełomie XIX i XX wieku, matematyka dzielona była na analizę, algebrę z teorią liczb, geometrię i zastosowania. Już w pierwszej połowie wieku ten prosty podział zaczął się komplikować. Powstają nowe dyscypliny: teoria mnogości, topologia, analiza funkcjonalna. Na miejsce dawnych zastosowań pojawiają się teoria prawdopodobieństwa, statystyka, fizyka matematyczna itd. Z drugiej strony najpóźniej około roku 1900 mechanika i astronomia uzyskują status odrębnych dyscyplin.

Rozdział 34

Cantor i narodziny teorii mnogości

Przynajmniej od czasów Newtona matematycy borykali się z formalizacją takich pojęć jak pochodna i całka. Gdy w XIX w. Cauchy, Riemann i Weierstrass zasadniczo z tymi problemami się uporali, na horyzoncie pojawiły się nowe. Tym razem głównym źródłem problemów była teoria mnogości. Matematycy bez trudu zaakceptowali wyniki nieoczekiwane — istnienie nieskończenie wielu piętér nieskończoności — a także wyniki nieintuicyjne, np. równoliczność prostej z płaszczyzną. Ale rosnące znaczenie dowodów niekonstruktwnych wzbudzało niepokój części matematyków. Pojawiły się kontrowersje wokół tzw. pewnika wyboru, a niektórzy radykałowie, jak Brouwer, podważyli nawet legalność stosowania zasad tak fundamentalnych, jak prawo wyłączonego środka.

34.1 Cantor

GEORG CANTOR (1845 - 1918) przeszedł do historii jako twórca teorii mnogości, ale jest też jednym z pionierów topologii metrycznej i autorem jednej z dwu najważniejszych definicji liczb rzeczywistych.

Cantor urodził się w Petersburgu, tam też spędził dzieciństwo. Ojciec był dobrze prosperującym kupcem, jego rodzina pochodziła z Danii, ale przynajmniej część bliskich krewnych też mieszkała w Rosji, jeden z kuzynów ojca był profesorem prawa w Kazaniu i nauczycielem Lwa Tołstoja. Matka Cantora pochodziła z rodziny liczących się muzyków, jej ojciec był kapelmistrzem cesarskiej opery w Petersburgu. Cantor nieraz żałował, że ojciec nie pozwolił mu zostać skrzypkiem.

W roku 1856 rodzina osiedla się we Frankfurcie nad Menem. Przez krótki czas Georg uczęszcza do tamtejszej szkoły prywatnej, potem zaś do gimnazjum w Wiesbaden. Od wiosny 1859 do jesieni 1860 uczy się w szkole realnej w Darmstadt. Dalsze dwa lata spędza w związanej z nią szkole rzemiosł. Zdobywa tam nadspodziewanie solidne wykształcenie matematyczne. W roku 1862 rozpoczyna studia na wydziale filozoficznym uniwersytetu w Zurychu, po roku przenosi się do Berlina. Studia Cantora przypadają na okres, gdy są tam Kummer, Weierstrass i Kronecker. Jeden semestr spędza w Getyndze. Po doktoracie (1867) i zdobyciu uprawnień do nauczania matematyki w gimnazjum (1868) przez dwa miesiące uczestniczy w renomowanym seminarium Karla Schelbacha (1805 - 1892). Miało ono zapewnić przyszłym nauczycielom matematyki i fizyki ugruntowanie przygotowania pedagogicznego i zdobycie praktyki.

W roku 1869 habilituje się na uniwersytecie w Halle, przez trzy lata jest tam docentem prywatnym. W roku 1872 dostaje nominację na stanowisko profesora nadzwyczajnego, początkowo bez wynagrodzenia.¹ Profesura nadzwyczajna bez wynagrodzenia jest w ówczesnych Niemczech zjawiskiem dość częstym, ale chyba żaden spośród czołowych matematyków niemieckich poza Cantorem oświadczyć z tym zjawiskiem się nie zetknął. Gdy w roku 1875 pojawia się wakat na katedrze nadzwyczajnej w Berlinie, Cantor zaczyna o nią zabiegać. Komisja wydziałowa (w składzie m.in. Kirchhoff, Kummer i Weierstrass) przedkładaając ministrowi listę proponowanych kandydatów na pierwszym miejscu umieszcza Cantora i Heinricha Brunsę; minister mianuje Brunsę. Uwieńczeniem formalnej kariery akademickiej Cantora jest nominacja na profesora zwyczajnego (1879) w Halle, uniwersytecie w owym czasie mało znaczącym. W roku 1885 był jednym z kandydatów do objęcia katedry w Getyndze, ale ostatecznie tę nominację otrzymał Klein. Mimo pewnego rozgoryczenia jest aktywnym członkiem środowiska matematycznego, w szczególności współzałożycielem i pierwszym prezesem Niemieckiego Towarzystwa Matematycznego (1890).

Pierwsza ważna praca Cantora ukazuje się w roku 1872. W zasadzie poświęcona jest szeregom trygonometrycznym, ale to w niej właśnie Cantor definiuje formalnie liczby rzeczywiste. Zajmując się szeregami trygonometrycznymi Cantor ma też okazję skonstruować ciąg zbiorów

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_\omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supset A_{\omega+1} \supset A_{\omega+2} \supset \dots$$

W ten sposób pojawiają się u niego po raz pierwszy nieskończone liczby porządkowe. Na razie tej tematyki nie rozwija. Nie jest jasne, jak przeszedł od

¹W. Purkert, H.-J. Ilgauds, *Georg Cantor 1845-1918*, s. 41, tamże wiele innych interesujących szczegółów.

niej do pytań o równoliczność. Szybko zauważył, że zbiór liczb wymiernych, a także zbiór liczb algebraicznych są przeliczalne. W liście z listopada 1873 do Dedekinda pyta go, czy można znaleźć odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna pomiędzy liczbami naturalnymi a punktami odcinka. W odpowiedzi (2 XII 1873) Dedekind stwierdza, że nigdy się takimi rzeczami nie zajmował i wydaje się, że nie mają one praktycznie żadnego znaczenia. Ale, gdy kilka dni później (7 grudnia) Cantor donosi, że taka odpowiedniość nie istnieje i wyciąga stąd wniosek, że istnieją liczby przestępne, Dedekind gratuluje mu wyniku i przyznaje, że ten niekonstruktywny dowód jest interesujący.

Nie wiemy, jak wyglądał oryginalny dowód nieprzeliczalności zbioru punktów odcinka. W pracy Cantora ukazał się dowód w wersji uproszczonej przez Dedekinda. Załóżmy, że odcinek $[a, b] = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Konstruujemy ciąg przedziałów domkniętych $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ takich, że $a_n \notin I_n$. Przekrój tych przedziałów zawiera punkt odcinka $[a, b]$ różny od wszystkich a_n . Zauważmy, że konstrukcja ta przypomina tę, w której pojawiły się liczby porządkowe. Popularny obecnie dowód metodą przekątniową pochodzi od Cantora, ale z czasów dużo później.

Najpóźniej w roku 1877 Cantor odkrywa równoliczność odcinka z kwadratem; początkowo uważał, że nie są one równoliczne i że jest to tak oczywiste, iż nie wymaga dowodu. Szybko jednak zrozumiał, że dowód jest konieczny. W roku 1890 ukazuje się praca Giuseppe Peany z konstrukcją sławnej krzywej pokrywającej kwadrat.

W późniejszych pracach Cantora pojawiają się liczby kardynalne i porządkowe (ale bez poprawnych definicji), pojęcie dobrego porządku, hipoteza continuum, a także znane twierdzenie Cantora głoszące, że rodzina wszystkich podzbiorów danego zbioru ma moc większą niż ten zbiór.

Cantor rozwija też teorię liczb porządkowych. Za ich pomocą dowodzi prawa trichotomii dla liczb kardynalnych:

$$m < n \quad \text{albo} \quad m = n \quad \text{albo} \quad m > n.$$

Dowód opiera się na założeniu, że każdy zbiór *można dobrze uporządkować*, tzn. uporządkować liniowo w taki sposób, aby w każdym jego niepustym podzbiorze był element najmniejszy. Jest o tym tak głęboko przekonany, że proponuje tę zasadę dobrego porządku uznać za prawo logiki (1883), czyli rzecz nie wymagającą dowodu. Ale przez kolejne dziesięć lat Cantor nikogo o oczywistości tej zasady nie przekonał. Z konieczności zaczął szukać dowodu.

Dość wcześnie Cantor sformułował przypuszczenie, że jeżeli $m \leq n$ oraz $n \leq m$, to $m = n$. Udowodnili to Felix Bernstein (1897) i Ernst Schröder (1898). Tak

więc zasadniczo około roku 1900 Cantor mógł zakładać, że podstawowe kwestie teorii mnogości — z wyjątkiem hipotezy continuum — zostały wyjaśnione, co najwyżej są pewne zastrzeżenia odnośnie ścisłości niektórych dowodów. Ale ta nieścisłość wkrótce okaże się poważnym problemem.

Początkowo prace Cantora przyjęto neutralnie: nie doceniono ich przełomowego znaczenia, ale nie spotkały się z krytyką. Dopiero, gdy Cantor dalej rozwijał swą teorię wszedł w głęboki konflikt z Kroneckerem i niektórymi innymi matematykami. Konflikt z Kroneckerem — zdecydowanym konstruktystą — mógł pozostać sporem ideowym, ale szybko zamienił się we wzajemną głęboką niechęć.

Z drugiej strony Mittag-Leffler umieszczał w swoich *Acta Mathematica* francuskie przekłady ważniejszych jego prac. W roku 1882 Klein powierza Cantorowi recenzję sławnej pracy Lindemanna o przestępności π , co też jest jakimś wyrazem uznania. Paryski wykład Hilberta (1900) zaczynający się od hipotezy continuum w zasadzie zamyka spory o historyczne znaczenie prac Cantora. Rok później Cantor zostaje członkiem honorowym towarzystw matematycznych Londynu i Charkowa, w następnych latach doktorem honoris causa uniwersytetów w Christianii (Oslo) i St Andrews, a także laureatem Nagrody Sylwestera.

Choć Cantor zajmuje się teorią mnogości niemal do końca życia, w późniejszych latach nie jest to jedyny przedmiot jego zainteresowań. Aktywnie włącza się w spór na temat, czy Francis Bacon był autorem dzieł Szekspira — w sporze uczestniczą też Lew Tołstoj, George Bernard Shaw i Mark Twain — i w szeregu publikacji próbuje wykazać prawdziwość tej kontrowersyjnej hipotezy. Dodatkowo aktywność naukową osłabiały silne kryzysy nerwowe, wymagające leczenia szpitalnego.

34.2 Dobry porządek, aksjomat wyboru i Zermelo

Rozwijając swą teorię Cantor szybko wszedł na niepewny grunt, choć nie od razu było to widoczne. Już w roku 1878 w dowodzie równoliczności $\mathbb{R}^n$ z $\mathbb{R}$ korzystał z faktu, że przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym. Cantor tego lematu nie dowodził, gdyż wydawał się on oczywisty. Rzeczywiście, skoro elementy A_n można ustawić w ciąg $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots$, to elementy ich sumy można ustawić w ciąg $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \dots$. Oczywiście zakładamy tu, że potrafimy dla każdego z nieskończenie wielu zbiorów A_n wybrać pewne ustawienie².

²O sporach wokół zasad wyboru G. H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice*.

W rozumowaniu tym korzystamy w istocie z tzw. pewnika wyboru. Głosi on, że dla dowolnej rodziny niepustych zbiorów istnieje funkcja f , zwana funkcją wyboru, taka, że dla dowolnego zbioru A z tej rodziny $f(A) \in A$. Wydaje się to oczywiste, ale wielu matematyków podchodziło do tego sceptycznie, wskazując że w przypadku nieskończonej rodziny zbiorów nie zawsze potrafimy taką funkcję skonstruować. A co to znaczy, że obiekt istnieje, skoro nie umiemy go jednoznacznie określić?

Tymczasem teoria mnogości się rozwija. W Niemczech, Francji, Anglii, Włoszech i USA interesują się nią liczni matematycy. Pojawiają się dowody kolejnych podstawowych twierdzeń. W roku 1895 Cantor, w 1898 Borel, w 1902 Russell dowodzą niezależnie, iż każdy zbiór nieskończony zawiera zbiór przeliczalny. Żaden z nich nie zauważa, że korzysta z kontrowersyjnego pewnika wyboru.

W tym momencie pojawia się ERNST ZERMELO (1871 - 1953). Jak na matematyka XX w. ma karierę nietypową, tylko w rzadkich okresach swego życia miał płatny etat³. Studiuje matematykę, fizykę i filozofię na uniwersytetach Berlina, Halle i Fryburga Bryzgowijskiego. W Halle słucha wykładów Husserla i Cantora, ale nie są to wykłady z teorii mnogości. Jego formalna kariera naukowa nie ma zresztą związku z teorią mnogości, doktoryzuje się pracą z rachunku wariacyjnego (1894), habilituje pracą z hydrodynamiki (1899). Zajmował się głównie mechaniką statystyczną, przez jakiś czas był asystentem Maxa Plancka. Z teorią mnogości zetknął się w Getyndze, gdzie przez kilka lat był docentem prywatnym. Już w roku 1900 prowadzi w Getyndze kurs teorii mnogości, podobny poprowadzi w roku 1906. W roku 1910 zostaje profesorem uniwersytetu w Zurychu, ale z powodów zdrowotnych po roku przestaje wykładać, pięć lat później przechodzi na emeryturę. W latach 1926-1935 i 1946-1952 jest profesorem honorowym uniwersytetu we Fryburgu Bryzgowijskim.

W roku 1904 Zermelo publikuje dowód twierdzenia o możliwości dobrego uporządkowania dowolnego zbioru. Przy tej okazji po raz pierwszy pojawia się w literaturze w sposób jawny pewnik wyboru — istotny element dowodu. Dowód Zermeli spotyka się ze zdecydowaną krytyką ze strony większości zainteresowanych matematyków, jawnie sformułowany pewnik wyboru budzi stanowczy opór. W odpowiedzi Zermelo proponuje siedem aksjomatów teorii mnogości (1907), pewnik wyboru staje się jednym z aksjomatów. Spory wokół aksjomatu wyboru trwać będą przez kolejne kilkanaście lat. W szczególności, w roku 1917 ukazuje się przeglądowa praca Sierpińskiego, w której starannie analizuje wszelkie, na ogół ukryte, zastosowania aksjomatu wyboru. Sierpiński pokazał,

³Więcej o jego nietypowej karierze w H.-D. Ebbinghaus, *Ernst Zermelo*.

że w istocie postawa wielu krytyków — w tym Poincarégo i Lebesgue’a — jest wewnętrznie sprzeczna: akceptują pewne twierdzenia teorii mnogości jednocześnie odrzucając twierdzenia im równoważne.

Pojawienie się paradoksów takich, jak słynny paradoks kuli Banacha-Tarskiego (1924), oczywiście wzmacnia tendencję, by aksjomat wyboru odrzucić. Ale stopniowo większość matematyków zaczyna rozumieć, że musi go zaakceptować, nowoczesna abstrakcyjna matematyka byłaby bez niego znacznie uboższa, a może nawet niemożliwa. W latach międzywojennych pokazano, że aksjomat wyboru jest równoważny wielu innym twierdzeniom, w szczególności twierdzeniu o dobrym porządku, prawu trichotomii, lematowi Kuratowskiego-Zorna i twierdzeniu Tichonowa.

Status aksjomatu wyboru (a równocześnie hipotezy continuum) wyjaśnia ostatecznie Kurt Gödel i Paul Joseph Cohen. Gödel wykazuje (1940), że aksjomat wyboru i hipoteza continuum są niesprzeczne z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości, Cohen — że są one od nich niezależne (1963).

34.3 Brouwer i intuicjonizm

LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER (1881 – 1966), to jeden z najoryginalniejszych matematyków XX wieku. Twórca intuicjonizmu, ale też jedna ze znaczących postaci w dziejach topologii.

Brouwer studiował matematykę na uniwersytecie w Amsterdamie (1897-1904) pod kierunkiem D. J. Kortewega. Od początku wykazuje poważne zainteresowanie filozofią i mistycyzmem, w roku 1905 ukazuje się jego książka *Życie, sztuka i mistycyzm*. Dwa lata później w swojej pracy doktorskiej *O podstawach matematyki* kreśli swoje poglądy filozoficzne w tej materii. W szczególności krytykuje formalizm Hilberta i Russella, krytykuje nawet Poincarégo, który reprezentował stanowisko z pozoru bardzo mu bliskie. Już w tym czasie Brouwer przyjmuje radykalne stanowisko w kwestii, co w matematyce oznacza *istnieć*. Dla Brouwera obiekt istnieje tylko wówczas, gdy można go jawnie skonstruować.

Prowadzi to czasem do kwestii dość subtelnych. Skonstruujemy parę liczb niewymiernych a , b takich, że a^b jest wymierna. Niech $a = \sqrt{2}$ i $b = \sqrt{2}$, jeżeli a^b jest wymierna, to mamy żądany przykład. W przeciwnym razie żądanym przykładem jest para $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ oraz $b = \sqrt{2}$. Rzeczywiście,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2.$$

Skonstruowaliśmy tu dwa przykłady, ale bez dalszych badań nie potrafimy rozstrzygnąć, który z nich odpowiada wymaganiom zadania. Czy to już jest konstrukcja? Dla Brouwera — nie.

Źródłem takich niejasności bywa — tak jest i w tym przypadku — zasada wyłączonego środka: zachodzi p albo negacja p . Dlatego Brouwer i inni intuicjoniści odrzucają zasadę wyłączonego środka. Odrzucają też zasadę podwójnego przeczenia. Zgadza się, że p implikuje $\sim(\sim p)$, ale nie akceptują implikacji odwrotnej.

Takie rozumienie istnienia i tak ograniczona logika podważają znaczną część podstaw teorii mnogości (i oczywiście wielu innych części matematyki). W szczególności Brouwer nie akceptuje takich liczb, jak ω_1 , a pośród podzbiorów prostej zna tylko zbiory przeliczalne i ich dopełnienia. Przy takim podejściu Brouwer może nawet udowodnić — choć robi to dość mętnie — hipotezę continuum.

Choć Brouwer swoją karierę naukową zaczynał od intuicjonizmu, wybitną pozycję w matematyce przyniosło mu twierdzenie o punkcie stałym. Wynika z niego w szczególności, że dla $k \neq n$ przestrzenie $\mathbb{R}^k$ i $\mathbb{R}^n$ nie są homeomorficzne. Od czasów, gdy Cantor odkrył, że przestrzenie te są równoliczne, matematycy czekali na jakieś kryterium, które by je odróżniało. Dowód Brouwera tę kwestię zamyka⁴.

34.4 Spór o podstawy i „bitwa żab z myszami”

Dzięki swoim osiągnięciom w topologii Brouwer szybko zdobywa opinię jednego z najbardziej utalentowanych matematyków europejskich. W roku 1914 zostaje zaproszony do komitetu redakcyjnego *Mathematische Annalen*, w owym czasie najbardziej prestiżowego matematycznego pisma świata. Dzięki takiej pozycji Brouwera również jego intuicjonizm zaczyna zyskiwać pozycję znaczącą.

W latach 20. XX w. intuicjonizm był jednym z trzech głównych kierunków filozofii matematyki. Dwa inne to logicyzm reprezentowany przez Russella i Whiteheada oraz formalizm Hilberta. Te dwa kierunki różniły się przede wszystkim stosunkiem do podstaw matematyki. Zwolennicy logicyzmu zakładali, że całą matematykę można zredukować do logiki. Zwolennicy formalizmu traktowali matematykę jako formalną grę symboli, a podstawowym problemem było wykazanie niesprzeczności matematyki. Mimo tych różnic filozoficznych logicyści i formaliści uprawiali zasadniczo tę samą matematykę.

⁴D. van Dalen *L. E. J. Brouwer* omawia wszystkie aspekty jego twórczości.

Inaczej było w przypadku intuicjonizmu. Rezygnując z tak fundamentalnych środków logicznych jak zasada wyłączonego środka czy prawo podwójnego przeczenia, intuicjoniści przekreślali spore obszary klasycznej matematyki, w tym niemal całą teorię mnogości. Dla Hilberta było to zjawisko niepokojące, tym bardziej, że pod silnym wpływem intuicjonizmu znalazł się nawet tak wybitny matematyk jak Hermann Weyl. Na to trudno było się Hilbertowi zgodzić. Sławne zdanie „Nikt nie zdoła nas wygnać z raj, który stworzył dla nas Cantor” wypowiedziane przez niego na konferencji w Münsterze (1925) jasno wyraża jego zdecydowaną niechęć do intuicjonizmu.

Mimo tak kategorycznych wypowiedzi niemal do końca lat 20. spór między formalistami a intuicjonistami przebiegał w atmosferze dość beznamietnej⁵. Jednak na ten czysto intelektualny spór stopniowo zaczynały się nakładać rozmaite wydarzenia, które prowadziły do otwartego konfliktu między Brouwerem a Hilbertem. Najważniejszym była zapewne postawa Brouwera wobec Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Bolonii (1928).

Po zakończeniu I Wojny Światowej Niemcy i inne państwa osi zostały wykluczone z udziału w kolejnych kongresach (Strasburg 1920, Toronto 1924). Choć emocjonalnie jest to zrozumiałe, to zważywszy na wybitną pozycję niemieckiej matematyki była to sytuacja dość kontrowersyjna i mocno dzieliła europejskie i północnoamerykańskie środowisko matematyczne. Włoscy organizatorzy kongresu w Bolonii włożyli sporo starań, by praktyce tej położyć kres. Udział matematyków niemieckich w kongresie mocno popierał Hilbert. Ale Brouwer uważał, że matematycy niemieccy są traktowani przez społeczność międzynarodową jako partnerzy gorszej kategorii i wzywał ich do bojkotu kongresu. Ostatecznie dzięki staraniom Hilberta do tego bojkotu nie doszło. Gdy grupa matematyków niemieckich pod jego przewodnictwem wchodziła na obrady kongresu zostali powitani owacjami.

Hilbert powrócił z kongresu zmęczony i osłabiony. Niedługo po jego zakończeniu znalazł się na pięć tygodni w szpitalu. W tych okolicznościach dochodzi do poważnego kryzysu w niemieckim środowisku matematycznym. Pod koniec października 1928 roku Hilbert powiadamia Brouwera formalnym listem, że z powodu zasadniczych różnic w poglądach na podstawy matematyki nie widzi możliwości dalszej z nim współpracy i usuwa go z komitetu redakcyjnego *Mathematische Annalen*.

Mathematische Annalen wydawał w tym czasie Springer (wcześniej Teubner), pod formalną redakcją Hilberta, Einsteina, Constantina Carathéodory’ego

⁵Dalsza historia na podstawie D. van Dalen, *The War of the Frogs and the Mice, or the Crisis of The Mathematische Annalen*, *The Mathematical Intelligencer*, vol.12. no. 4.

i Ottona Blumenthala przy współpracy z komitetem redakcyjnym w składzie: Ludwig Bieberbach, Harald Bohr (brat sławnego fizyka), L. E. J. Brouwer, Richard Courant, Walther v. Dyck, Otto Hölder, Theodore v. Kármán i Arnold Sommerfeld. Niewątpliwie ostateczne decyzje należały do Hilberta, a codzienną redakcją zajmował się Blumenthal. Ale ani statut pisma, ani umowa z wydawcą nie dawały Hilbertowi wszechwładzy. A dla Brouwera usunięcie z komitetu redakcyjnego prestiżowego pisma stanowiło poważny dyshonor.

Brouwer nie widzi powodów, by decyzję Hilberta zaakceptować bez walki. Tym bardziej, że wymaga ona akceptacji przynajmniej większości redaktorów. A ani Einstein, ani Carathéodory na to się nie godzą. Przez dalsze pół roku trwają dyplomatyczne zabiegi, by rozwiązać kryzys. Ze względu na niepewny stan zdrowia Hilberta, wszystko to rozgrywa się poza jego plecami. Brouwer dodatkowo komplikuje sytuację grożąc wydawcy wejściem na drogę prawną i strasząc go konsekwencjami finansowymi. Ostatecznie za radą Haralda Bohra komitet redakcyjny decyduje się w całości rozwiązać, a kolejny, 101. tom pisma ukazuje się już wyłącznie pod redakcją Hilberta, przy współpracy redakcyjnej Ottona Blumenthala i Ericha Heckego. Zauważmy, że przy tej okazji Einstein i Carathéodory z redakcji odchodzą.

Motywy Hilberta nie są do końca jasne. Oprócz rosnącej niechęci do Brouwera mogły pewną rolę odegrać obawy o przyszłość pisma, Hilbert mógł bać się, że energiczny Brouwer przekształci jego ukochane pismo w tubę propagandową intuicjonizmu. Einstein w liście do Maxa Borna nazwał ten konflikt „wojną żab z myszami” — nawiązując do starożytnego poematu heroikomicznego nieznanego autorstwa, ale chyba nie doceniał temperatury sporu.

W roku 1929, gdy trwał ten kryzys, Hilbert zbliżał się już ku końcowi swej aktywności naukowej. Brouwer był jeszcze w wieku twórczym. Konflikt przeżył boleśnie, a jego aktywność naukowa znacznie osłabła.

Rozdział 35

Francja: początek nowoczesności

Niemal przez cały wiek XIX matematycy zajmujący się teorią funkcji koncentrowali się na funkcjach zespolonych. Pracowali nad tym Cauchy, Riemann i Weierstrass, a na początku stulecia Abel i Jacobi. To w tej dziedzinie pojawiały się najgłębsze wyniki. Przypomnijmy, że najsławniejszy problem współczesnej matematyki — hipoteza Riemanna — dotyczy funkcji zespolonych.

Oczywiście równolegle trwały prace Cauchy’ego, Weierstrassa i innych matematyków nad budowaniem ścisłych podstaw analizy rzeczywistej. Ale w pewnym sensie była to tylko kosmetyka. Istotne, rzeczywiście oryginalne, wyniki w teorii funkcji rzeczywistych pojawiają dopiero na przełomie XIX i XX wieku, głównie za sprawą matematyków francuskich¹

35.1 Od odkryć Cantora do deskryptywnej teorii mnogości

Odkrycia Cantora zainteresowały matematyków „czystymi zbiorami”, tzn. zbiorami pozbawionymi wszelkiej struktury, ale zarazem skierowały uwagę na podzbiory jednego z zasadniczych obiektów matematyki — podzbiory $\mathbb{R}$. Jest oczywiste, że nie wszystkie są takie same: dyskretny zbiór liczb całkowitych różni się zasadniczo od gęstego zbioru liczb wymiernych. W latach 90. XIX w. Émile Borel zdefiniował hierarchię zbiorów kojarzoną dziś z jego nazwiskiem. Przypomnijmy, zbiorami borelowskimi prostej (lub ogólnie: ustalonej przestrzeni topologicznej) nazywamy elementy najmniejszej rodziny jej podzbiorów zamkniętej na dopełnienia, przeliczalne sumy i przeliczalne przekroje.

¹Pisząc ten rozdział korzystałem z książek W. Dunham, *The Calculus Gallery* oraz F. A. Miedwiediew *Francuska szkoła teorii funkcji i mnogości na рубеżu XIX–XX ww.*

W wyniku badań matematyków francuskich, rosyjskich i polskich udało się wkrótce lepiej zrozumieć hierarchię borelowską. Najprościej budować równocześnie dwie hierarchie:

$$\Sigma_1^0 \text{ — zbiory otwarte,} \quad \Pi_1^0 \text{ — zbiory domknięte,}$$

dalej

$$\begin{aligned} \Sigma_2^0 &\text{ — przeliczalne sumy zbiorów domkniętych,} \\ \Pi_2^0 &\text{ — przeliczalne przekroje zbiorów otwartych.} \end{aligned}$$

Przykładem zbioru klasy Σ_2^0 jest zbiór liczb wymiernych, a przykładem zbioru klasy Π_2^0 zbiór liczb niewymiernych. Ogólnie dla $\alpha < \omega_1$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha+1}^0 &\text{ — przeliczalne sumy zbiorów klasy } \Pi_{\alpha}^0, \\ \Pi_{\alpha+1}^0 &\text{ — przeliczalne przekroje zbiorów klasy } \Sigma_{\alpha+1}^0, \end{aligned}$$

a dla liczb granicznych $\alpha < \omega_1$ klasy Σ_{α}^0 oraz Π_{α}^0 określamy jako sumę odpowiednich klas wcześniejszych. Nietrudno wykazać, że

$$\bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_{\alpha}^0 = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Pi_{\alpha}^0,$$

przy czym suma ta pokrywa się z rodziną zbiorów borelowskich. Dużo trudniej pokazać, że każde kolejne piętro jest większe od poprzedniego.

Nietrudno uzasadnić, że rodzina borelowskich podzbiorów prostej ma moc continuum. Ponieważ prosta ma 2^c podzbiorów, więc większość podzbiorów prostej to zbiory nieborelowskie. Zbiory takie pojawiają się w dość naturalny sposób, przekonamy się o tym w następnym rozdziale.

Zauważmy, że problematyka ta nie mogła pojawić się przed odkryciami Cantora. Matematycy musieli nauczyć się odróżniać zbiory przeliczalne od nieprzeliczalnych i poznać nieskończone liczby porządkowe.

W roku 1899 René Baire w swojej rozprawie doktorskiej buduje pokrewną hierarchię funkcji. Funkcje ciągle to w jego hierarchii funkcje klasy 0, punktowe granice takich funkcji tworzą klasę 1 itd. Na przykład sławna funkcja Dirichleta

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \text{ wymierna;} \\ 0, & \text{gdy } x \text{ niewymierna} \end{cases}$$

okazuje się funkcją klasy 2, ponieważ

$$d(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos k! \pi x)^{2m} \right].$$

Uwieńczeniem tych francuskich badań była miara Lebesgue'a. Początków nowoczesnego pojęcia miary należy pewnie szukać w pracach związanych z całką Riemanna. Wiadomo, że funkcja ograniczona mająca skończenie wiele punktów nieciągłości jest całkowalna w sensie Riemanna. Ale funkcja *może być* całkowalna, także gdy ma nieskończenie wiele punktów nieciągłości, o ile punkty te tworzą zbiór odpowiednio mały. Wychwycenie tej „małości” wymagało zdefiniowania odpowiedniej miary. Próby takie podejmowali już w latach 80. XIX w. m.in. Jordan i Peano. Było oczywiste, że miara powinna być skończenie addytywna, tzn. dla dowolnych zbiorów A_i parami rozłącznych powinna zachodzić równość

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = m(A_1) + m(A_2) + \dots + m(A_n).$$

Lebesgue przyjął, że musi ona być też przeliczalnie addytywna, w szczególności oznacza to, że każdy zbiór przeliczalny ma miarę zero. Po pokonaniu kilku dalszych problemów technicznych Lebesgue zdefiniował miarę, która okazała się dobrym fundamentem dla dalszego rozwoju analizy. W szczególności, dowodzi się, że funkcja ograniczona na przedziale jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej punktów nieciągłości ma miarę zero.

Początkowo mogło się wydawać, że każdy podzbiór prostej czy płaszczyzny jest mierzalny w sensie Lebesgue'a, ale już w roku 1905 Giuseppe Vitali pokazał, że istnieją zbiory niemierzalne. Każda taka konstrukcja wymaga zastosowania aksjomatu wyboru.

35.2 Borel

ÉMILE BOREL (1871 - 1956), urodził się w Saint-Affrique, niewielkiej miejscowości na południu Francji, jako syn pastora. W domu, w którym mieszkali, pastor prowadził szkołę, tam też Émile otrzymał podstawowe wykształcenie. Od 12 roku życia uczył się w liceum w Montauban, następnie w Paryżu w Collège Saint-Barbe i liceum Ludwika Wielkiego. W roku 1889 przystępuje do egzaminów wstępnych do ENS i Szkoły Politechnicznej. W obu — jak przed nim Darboux i Hadamard — uzyskuje najwyższą lokatę. Po trzech latach nauki w ENS uzyskuje agregację (1892), rok później doktoryzuje się pod kierunkiem Darboux. Już w roku 1893 obejmuje stanowisko *maître de conférences* na Fakultecie Nauk w Lille. Cztery lata później opuszcza Lille i obejmuje podobne stanowisko w ENS. Pozostanie tam do roku 1920, od roku 1911 jest tam dyrektorem studiów, kiedyś tę funkcję pełnił Pasteur. W roku 1909 obejmuje też katedrę teorii funkcji na Sorbonie, w roku 1923 zamienia ją na katedrę teorii

prawdopodobieństwa i fizyki matematycznej. Od roku 1923 członek Akademii Nauk, od roku 1937 jej wiceprezes, w roku 1938 prezes. Był pierwszym dyrektorem Instytutu Henri Poincarégo (1928-1940).

Podczas I Wojny Światowej jako ochotnik dowodził baterią artylerii. Brał też udział w organizacji badań naukowych na rzecz wojska. W latach 1924-1936 członek Izby Deputowanych, przez kilka miesięcy minister marynarki.

Borel jest autorem około 300 prac i kilkunastu książek. Jego twórczość dzieli się na dwa wyraźne okresy. W pierwszym, trwającym do ok. roku 1920 zajmuje się teorią funkcji i teorią miary, w drugim teorią prawdopodobieństwa i do pewnego stopnia teorią gier. Do najważniejszych osiągnięć z pierwszego okresu należy oczywiście koncepcja zbiorów borelowskich, a także twierdzenie Heinego-Borela. W tym wczesnym okresie Borel wykazał też (1909), że prawie wszystkie liczby rzeczywiste są normalne, tzn. kolejne cyfry ich rozwinięcia dziesiętnego zachowują się w sposób całkowicie losowy.

Z okresu późniejszego pochodzą jego klasyczne wyniki z teorii prawdopodobieństwa: lemat Borela-Cantellego oraz mocne prawo wielkich liczb. Zajmował się też grami dwuosobowymi o sumie zerowej, w tym także grami o ciągłym zbiorze strategii. W teorii gier jest prawdopodobnie najważniejszym obok Ernsta Zermelo prekursorem von Neumanna.

Wspólnym doktorantem Borela i Lebesgue'a jest Paul Montel, promotor przyszłych bourbakistów: Henri Cartana i Jeana Dieudonnego.

35.3 Lebesgue i Baire

HENRI LEBESGUE (1875 - 1941), urodził się w Beauvois jako syn zecera. W wieku trzech lat osierocony przez ojca. Dzięki wsparciu władz miasta mógł ukończyć miejscowe kolegium i kontynuować naukę w prestiżowych liceach Paryża, najpierw Ludwika Świętego, potem zaś Ludwika Wielkiego. W roku 1894 rozpoczyna naukę w ENS. Po uzyskaniu agregacji, przez jakiś czas pozostaje w Paryżu, pełniąc funkcję bibliotekarza w swojej *alma mater*. Dostęp do świetnie zaopatrzonej biblioteki pozwala mu intensywnie pracować naukowo. W roku 1899 zostaje nauczycielem w liceum w Nancy, a w roku 1902 doktoryzuje się pod kierunkiem Borela pracą *Intégrale, longueur, aire* opublikowaną we włoskim (a nie francuskim!) periodyku *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. Tam właśnie pojawiają się miara i całka Lebesgue'a. W tymże roku obejmuje stanowisko *maître de conférences* na uniwersytecie w Rennes, a cztery lata później przenosi się na uniwersytet w Poitiers. W roku 1910 zaczyna wykłady na Sorbonie, wciąż w charakterze *maître de conférences*. Od roku 1918

jest profesorem Sorbony, od roku 1921 Collège de France. Rok później zostaje członkiem Paryskiej Akademii Nauk, w roku 1934 członkiem Royal Society.

Doktorat Lebesgue'a powstał pod znaczącym wpływem prac Borela i Baire'a. Spór pomiędzy Borelem a Lebesgue'em odnośnie roli tego pierwszego w odkryciu miary popsuł na długie lata stosunki pomiędzy nimi.

Przez cały okres swej kariery Lebesgue przywiązywał ogromną wagę do nauczania. Publikowane notatki z jego wykładów odznaczają się wyjątkową starannością. Ostatnie wykłady w Collège de France prowadził jeszcze w trakcie niemieckiej okupacji. Ponieważ normalna komunikacja nie działała, Lebesgue dojeżdżał na uczelnię odpowiednio przystosowanym rowerem trójkołowym. Od końca lat 20. Lebesgue interesuje się też poważnie historią matematyki. W szczególności jest autorem obszernych biografii wielu matematyków francuskich (m. in. Viète'a, Ramusa, Roberval'a, Vandermonde'a i Baire'a), a także historycznego szkicu o rozwoju pojęcia całki.

RENÉ BAIRE (1874 - 1932) przyszedł na świat w Paryżu w rodzinie robotniczej. Dzięki uzyskaniu stypendium mógł uczęszczać do paryskich liceów: najpierw Lacanala, potem do klasy matematycznej liceum Henryka IV. W latach 1892-1897 studiuje w ENS, po uzyskaniu agregacji przez dwa kolejne lata pracuje jako nauczyciel prowincjonalnych liceów. W roku 1899 doktoryzuje się pod kierunkiem Picarda, po czym wyjeżdża na rok do Włoch, gdzie nawiązuje kontakt z matematykami włoskimi, m.in. z Volterrá, Peanem i Dinim. Po powrocie podejmuje pracę na uniwersytecie Dijon, a potem Montpellier w charakterze *maître de conférences*. Wkrótce otrzymuje w Dijon katedrę. Przez krótki czas prowadzi też serię wykładów na Collège de France.

W roku 1914 dla podreperowania zdrowia wyjeżdża do Szwajcarii. Tam zastaje go wybuch wojny. Pozostaje tam przez całe cztery lata, w kiepskim stanie zdrowia i trudnych warunkach finansowych. W roku 1922 zostaje członkiem Akademii Nauk w Paryżu. Od roku 1925 otrzymuje emeryturę, ale dewaluacja franka mocno obniża jej wartość. Umiera w Szwajcarii w roku 1932.

Kariera zawodowa Baire'a wygląda dużo skromniej niż Borela, a nawet Lebesgue'a. Ale jego dorobek naukowy jest wybitny, a jego znaczenie dla topologii i teorii funkcji wręcz zasadnicze. Od niego pochodzi wspomniana wcześniej klasyfikacja funkcji (klasy Baire'a), twierdzenie Baire'a o kategoriach, wczesne zastosowania indukcji pozaskończonej. On też pokazał, że zbiór liczb niewymiernych jest topologicznie równoważny przestrzeni $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ z topologią produktową.

Rozdział 36

Początki moskiewskiej szkoły matematycznej

Choć już od roku 1755 Moskwa ma uniwersytet, jednak przez blisko sto lat pozostaje matematycznym zaściankiem. Sytuacja nieco się zmienia w połowie XIX w. W roku 1864 powstaje Moskiewskie Towarzystwo Matematyczne, jedno z pierwszych towarzystw matematycznych na świecie. Jednym z założycieli i pierwszym przewodniczącym jest NIKOŁAJ DMITRIEWICZ BRASZMAN (1796 - 1866). Pochodził z Czech (wówczas w granicach Austrii), wykształcenie zdobył na Politechnice Wiedeńskiej i tamtejszym uniwersytecie. W latach 1825-34 był profesorem uniwersytetu w Kazaniu, od roku 1834 profesor matematyki stosowanej i mechaniki na Uniwersytecie Moskiewskim. Jego uczniami byli Czebyszew i O. I. Somow, ale pierwszy porzucił Moskwę na rzecz Petersburga od razu, drugi po sześciu latach. Jednak wielu utalentowanych matematyków w Moskwie zostawało. Do najważniejszych należą Nikołaj Wasiliewicz Bugajew (1837 - 1903) oraz Nikołaj Jegorowicz Żukowski (1847 - 1921). Uczniami Żukowskiego są m.in. Andriej Nikołajewicz Tupolew i Siergiej Aliksiejewicz Czapłygin, najważniejszym uczniem Bugajewa — Dmitrij F. Jegorow.

36.1 Jegorow i Łuzin

Życie w Rosji nigdy nie było łatwe, a w pierwszej połowie XX w. szczególnie trudne. Życie obu matematyków tę ogólną konstatację tylko potwierdza¹.

DMITRIJ FIODOROWICZ JEGOROW (1869 - 1931) urodził się jako syn nauczyciela matematyki. Po studiach na wydziale matematyczno-fizycznym Uniwersytetu Moskiewskiego (1887-1891) zostaje asystentem, w roku 1892 pojawia

¹Sylwetki Jegorowa i Łuzina powstały głównie na podstawie L. Graham, J.-M. Kantor, *Naming infinity: a true story of religious mysticism and mathematical creativity*.

się pierwsza publikacja, rok później zdaje egzaminy magisterskie, po czym w styczniu 1894 obejmuje stanowisko docenta prywatnego. Oprócz prowadzenia zajęć na uniwersytecie uczy też w gimnazjach i szkołach żeńskich. W roku 1899 broni pracy magisterskiej — pięć lat po egzaminach, w XIX-wiecznej Rosji jest to sytuacja naturalna. Dwa lata później broni pracy doktorskiej, a w lipcu roku 1902 wyrusza w roczną podróż naukową do Berlina, Getyngi, Marburga i Paryża. Od roku 1903 profesor nadzwyczajny, od 1909 — zwyczajny. Od roku 1924 członek-korespondent Akademii Nauk ZSRR.

Jegorow poślubił córkę sławnego w ówczesnej Rosji czesko-rosyjskiego skrzypka Iwana W. Gżimalego. Dzięki temu małżeństwu miał żywe kontakty z moskiewskim środowiskiem artystycznym i stykał się na płaszczyźnie towarzyskiej z takimi sławami, jak Czajkowski, Liszt czy Szalapin.

Jegorow był człowiekiem głęboko religijnym. W roku 1930 zostaje aresztowany w ramach represji wobec środowisk religijnych i zesłany do Kazania. W więzieniu podejmuje głodówkę, wkrótce w wyniku komplikacji zdrowotnych umiera. Pochowany w Kazaniu, obok grobu Łobaczewskiego, dzięki odwadze i determinacji Nikołaja Czebotariewa, jednego z uczniów Łuzina.

NIKOLAJ NIKOLAJEWICZ ŁUZIN (1883 - 1950) urodził się w Tomsku lub Irkucku, na dalekiej Syberii, jako syn kupca. Pochodził z rodziny częściowo buriackiej, jeszcze jego dziad był prawdopodobnie chłopem pańszczyźnianym. Do gimnazjum uczęszczał w Tomsku w latach 1893-1901 (przez rok w Irkucku). W latach 1901-1905 studiuje na Uniwersytecie Moskiewskim, jego najważniejszym nauczycielem jest Jegorow. Silnie przeżywa rewolucję 1905 roku — widząc okropności rewolucji i skrajną nędzę popada w głęboki kryzys duchowy. Nie pomaga nawet wyjazd do Paryża umożliwiony dzięki staraniom Jegorowa. Równowagę odzyskuje dopiero w roku 1908. Zdaje egzaminy magisterskie — pracę obroni 5 lat później — i otrzymuje stanowisko docenta prywatnego. Lata 1910-1914 spędza głównie w Getyndze i Paryżu, gdzie poznaje Borela i Lebesgue'a.

W roku 1915 na podstawie znakomitej pracy magisterskiej otrzymuje na wniosek Jegorowa doktorat, dwa lata później stanowisko profesora matematyki czystej na moskiewskim uniwersytecie. Dalsza kariera przypada na czas Luzitanii.

36.2 Luzitania

Przynajmniej od roku 1914 Jegorow i Łuzin prowadzą wspólne seminarium. W roku 1914 Jegorow ma lat 45, od kilku lat jest profesorem zwyczajnym, a jego powiązania towarzyskie jeszcze przydają mu prestiżu. Trzy razy do

roku — w dzień Bożego Narodzenia, w Wielkanoc i w dzień swoich imienin — gości uczestników seminarium w swoim mieszkaniu, ale tradycyjny dystans pomiędzy starszym profesorem a studentami jest przestrzegany.

Łuzin ma w tym momencie lat 31, na razie jest tylko profesorem nadzwyczajnym, a jego kontakt ze studentami jest bardzo bezpośredni. Przypomina to sytuację z Getyngi, gdzie Klein zachowywał tradycyjny dystans nawet wobec docentów, a o wiele młodszy Hilbert ten dystans systematycznie przełamywał. Po wykładach i seminariach Łuzin często odprowadzany jest do domu, gdzie toczą się dalsze dyskusje. Tak rodzi się LUZITANIA — grupa młodych matematyków skupionych wokół Łuzina i w mniejszym stopniu Jegorowa, którzy dzielą wspólne zainteresowania matematyczne i styl pracy.

Luzitania była grupą nieformalną, ale przypominającą trochę zakon. Łuzin pełnił funkcję komandora, Jegorow był wielkim mistrzem. Pozycję naukową w Luzitanii określano wykorzystując skalę alefów. Nowi członkowie mieli rangę $\aleph_0$, ale każde kolejne znaczące osiągnięcie tę rangę podnosiło. Aleksandrow i Urysohn mieli rangę $\aleph_5$, Łuzin $\aleph_{17}$, a Jegorow $\aleph_\omega$.

Przyjmuje się, że pierwszymi członkami Luzitanii byli P. S. Aleksandrow (w roku 1914 ma 18 lat), M. J. Suslin (20 lat), D. J. Mieńszow (22 lata) i A. J. Chinczyn (20 lat). Niedługo później dołączą Kołmogorow, Urysohn, Niemycki, Nina Bari, Sznirelman i Lusternik. Ten ostatni wstąpił do Luzitanii mając lat 15. Większość członków grupy zostanie w przyszłości członkami Akademii Nauk ZSRR, Dwa najważniejsze wyjątki to Suslin (zmarł na tyfus w roku 1919) i Urysohn (utonął w Zatoce Biskajskiej w roku 1924).

Z grupą tą związany był też przebywający od roku 1915 w Moskwie Wacław Sierpiński. W momencie wybuchu wojny (28 lipca 1914) przebywał u teściów pod Witebskiem. Jako poddany Austro-Węgier został internowany i skierowany do Wiatki. Dzięki staraniom swych moskiewskich przyjaciół, w szczególności Jegorowa i polskiego matematyka Bolesława Młodziejewskiego, otrzymuje zgodę na zamieszkanie w Moskwie.

Początkowo główną tematyką zainteresowań Luzitanii była teoria funkcji rzeczywistych i topologia metryczna. Ale stopniowo tematyka ta rozszerzała się na topologię ogólną i algebraiczną (Aleksandrow, Urysohn, Lusternik), teorię prawdopodobieństwa (Kołmogorow), teorię liczb (Sznirelman) i wiele innych dyscyplin.

Rozbieżność zainteresowań i osobiste ambicje młodych wybitnych matematyków spowodowały, że najpóźniej ok. roku 1930 grupa się rozpadła. Przypomnijmy, że w roku 1931 w tragicznych okolicznościach wspomnianych wyżej umiera Jegorow. Łuzin ma więcej szczęścia, ale jego dalsza kariera też napotyka na

komplikacje. W roku 1936 jest obiektem ostrej nagonki prasowej. Jego postawa polityczna jest przedmiotem szczegółowych przesłuchań przez powołaną do tego celu komisję Akademii Nauk ZSRR. Po stronie oskarżycieli znaleźli się niektórzy spośród jego najwybitniejszych uczniów, w tym Aleksandrow. Ostatecznie zarzuty wobec Łuzina zostały mocno złagodzone, ograniczono się do potępienia jego postawy, ale poczucie niepewności pozostało. W szczególności, od tej pory nie publikuje już w *Fundamenta Mathematicae*, ani w innych „burżuazyjnych” periodykach. Nazwisko Łuzina usunięto też z kolejnego wydania radzieckiej encyklopedii.

36.3 Aleksandrow, Suslin i deskryptywna teoria mnogości

Żywe kontakty ze środowiskiem paryskim, w szczególności z Borelem i Lebesgue’em, spowodowały, że Jegorow i Łuzin zetknęli się bardzo wcześnie z rozwijaną wówczas przez Francuzów teorią funkcji rzeczywistych. Dzięki temu już w latach 1911-1912 uzyskali klasyczne wyniki, które wciąż należą do podstawowych twierdzeń tej teorii.

Podobną tematyką zajmują się też młodzi matematycy z kręgu Luzitanii. Równolegle zajmują się też teorią mnogości. Centralnym problemem teorii mnogości jest wówczas hipoteza continuum. Do zajęcia się tym problemem Łuzin zachęca PAWŁA SIERGIEJEWICZA ALEKSANDROWA (1896 - 1982). W roku 1915 dziewiętnastoletni Aleksandrow uzyskuje wynik częściowy: każdy nieprzeliczalny borelowski podzbiór prostej ma moc continuum. Niezależnie wynik ten uzyskuje też Felix Hausdorff z Bonn.

Rok 1916 przynosi matematykom Luzitanii kolejne kluczowe odkrycie. MICHAŁ JAKOWLEWICZ SUSLIN (1896 - 1919) w trakcie uważnej lektury jednej z prac Lebesgue’a odkrywa zasadniczy błąd. Lebesgue uważał, że obraz borelowskiego podzbioru płaszczyzny przy rzutowaniu wzdłuż osi jest zbiorem borelowskim. Suslin zauważył, że tak być nie musi: rzutowanie wyprowadza poza klasę zbiorów borelowskich. Dziś rzuty zbiorów borelowskich nazywamy zbiorami analitycznymi (rzadziej zbiorami Suslina), a klasę tych zbiorów oznaczamy literą A . Z perspektywy historycznej odkrycie zbiorów analitycznych to jeden z największych sukcesów ówczesnej matematyki rosyjskiej, ale spory o priorytet — pewną rolę odegrali tu także Aleksandrow i Łuzin — na zawsze popsuły relacje pomiędzy Łuzinem a obu młodszymi matematykami²

²A. P. Juszkiewicz bardzo dokładnie opisuje okoliczności odkrycia w swym artykule *Encounters with mathematicians* w tomie *Golden Years of Moscow Mathematics*.

Dowodzi się, że dopełnienie zbioru analitycznego nie musi być zbiorem analitycznym, klasę tych dopełnień oznaczamy przez CA (complements of analytic sets), ich rzuty przez PCA (projection of CA -sets) itd. Ta tzw. hierarchia rzutowa jest głównym przedmiotem deskryptywnej teorii mnogości. Pionierami tej dyscypliny byli Rosjanie, w odkryciu związków tej hierarchii z logiką istotną rolę odegrali matematycy polscy: Alfred Tarski i Kazimierz Kuratowski.

Tymczasem Aleksandrow dalej pracuje nad hipotezą continuum, ale bez powodzenia. Dziś wiemy, że Aleksandrow był na tę porażkę skazany, ale on tego nie wiedział. W roku 1917 krótko po zakończeniu studiów, rozczarowany brakiem sukcesów, przeżywa ostry kryzys. Wyjeżdża do Czernichowa, gdzie zajmuje się organizacją teatru i reżyserią. W Czernichowie i innych okolicznych miastach daje wykłady o literaturze rosyjskiej. Do matematyki wraca dopiero w roku 1920. W tym czasie życie w Rosji stopniowo się normuje. Wykorzystując ten chwilowy spokój Aleksandrow wspólnie z Urysohnem wyjeżdżają do Getynghi. Jako pierwsi Rosjanie po rewolucji witani są bardzo serdecznie i robią na gospodarzach bardzo dobre wrażenie. Na nich zaś największe wrażenie robią wykłady Emmy Noether. Do Getynghi przyjeżdżają też Kołmogorow, Pontryagin, Lusternik, Sznirelman, Gelfond i wielu innych.³

Teoria mnogości nie jest jedynym przedmiotem zainteresowań Aleksandrowa. Równolegle zajmuje się topologią. W Getyndze zaprzyjaźnia się z Heinzem Hopfem (1894 - 1971). Rok 1927-28 obydwaj spędzają w Princeton korzystając ze stypendium Fundacji Rockefellera. Tam stykają się z czołówką amerykańskich topologów: Veblenem, Lefschetzem i Alexanderem. Kilka lat później ukazuje się sławna *Topologie* Aleksandrowa i Hopfa. Dziś Aleksandrow pamiętany jest przede wszystkim właśnie jako topolog.

³C. Reid, *Courant*, s. 106-107.

Rozdział 37

Kobiety w matematyce

Matematyczne aspiracje kobiet zawsze napotykały podwójną barierę. Pierwszą stanowiło zdobycie wykształcenia — ta zazwyczaj była pokonywana przez naukę domową i samokształcenie, drugą był dostęp do adekwatnych stanowisk pracy.

W nowożytnej historii szeroko rozumianych nauk matematycznych pierwszą kobietą o wyraźnym dorobku naukowym jest prawdopodobnie MARIA CUNITZ (1610 - 1664), pochodząca ze Śląska. Jej ojciec był matematykiem i radcą na dworze księcia legnickiego. Znała łacinę, grekę, hebrajski, francuski, niemiecki, włoski i polski. Interesowała się medycyną, astronomią, matematyką, muzyką i historią. Jej najważniejsze dzieło *Urania propita* (Oleśnica 1650) udoskonalenie *Tablic Rudolfskich* Keplera przyniosło jej sławę europejską. Nazywano ją „drugą Hypatią”.

W historii nowożytnej matematyki pierwszą kobietą, która uzyskała znaczącą pozycję była MARIA GAETANA AGNESI (1718 - 1799), córka profesora matematyki. Jej dwutomowy podręcznik *Zasady analizy [matematycznej] dla młodzieży włoskiej* (1748) uchodził przez pewien czas za najlepsze wprowadzenie do dzieł Eulera. Papież Benedykt XIV powierzył jej katedrę matematyki i filozofii przyrody na uniwersytecie w Bolonii, ale z tego przywileju nie skorzystała. Niemal w tym samym czasie Laura Bassi (1711 - 1778) wykładała w Bolonii fizykę.

W pierwszej połowie XVIII wieku żyła też markiza ÉMILIE DU CHÂTELET (1706 - 1749), przyjaciółka Voltaire’a, której Francuzi zawdzięczają pierwszy francuski przekład *Principiów* Newtona.

Agnesi, du Châtelet — i kilka innych mniej znanych — odgrywały istotną rolę w upowszechnianiu wiedzy, ich osobisty dorobek nie ma większego znaczenia. Dopiero w XIX w. pojawiają się kobiety, które mają wybitne oryginalne osią-

gnięcia. Stopniowo uzyskują też dostęp do regularnych studiów: we Francji, w Anglii (na niektórych uczelniach) i we Włoszech w latach 70. XIX w., w państwach niemieckich pod koniec wieku, w Rosji po roku 1914. Przyjrzyjmy się karierom kilku wybitnych matematyczek XIX i początków XX wieku.¹

37.1 Sophie Germain

SOPHIE GERMAIN (1776 - 1831) była córką zamożnego kupca. Podobno matematyką zainteresowała się dzięki lekturze *Historii matematyki* Montuclii. Jedną z jej najwcześniejszych lektur był *Traité d'arithmétique* Bézouta, kolejną *Calcul différentiel* Cousina. Najlepszym miejscem do studiowania matematyki była wówczas Szkoła Politechniczna. Co prawda Sophie nie miała do niej wstępu, ale znajomy student dostarczał jej notatki z wykładów. Ukrywając się pod pseudonimem LeBlanc, Sophie co jakiś czas przekazywała Lagrange'owi uwagi odnośnie wykładów. Były one na tyle wnikliwe, że Lagrange wyraził chęć poznania pana LeBlanc. Lagrange był oczywiście zdziwiony tożsamością studenta, ale odtąd chętnie wspierał jej naukowe zainteresowania. Również inni matematycy paryscy okazywali jej życzliwość i pomoc.

Wkrótce po ukazaniu się *Théorie des nombres* Legendre'a zainteresowała się teorią liczb i podjęła intensywną korespondencję z autorem. Od roku 1804, gdy zaczyna studiować *Disquisitiones* koresponduje również z Gausssem. Genialny uczony nie zawsze śpieszy się z odpowiadaniem na listy francuskiego amatora, ale przez kolejne dwa-trzy lata jakiś kontakt korespondencyjny z panem LeBlanc utrzymuje.

Być może Sophie nigdy by nie ujawniła Gaussowi swojej prawdziwej tożsamości, gdyby nie wojny napoleońskie. Gdy w roku 1806 wojska francuskie zajęły Brunszwik, Sophie Germain zaniepokojona o bezpieczeństwo Gaussa poprosiła znajomego generała o zorientowanie się w sytuacji. Wysłany do Gaussa oficer wyjaśnił, że działa na prośbę panny Germain z Paryża, na co Gauss odparł, że nie zna takiej osoby. Wkrótce w obszernym liście Sophie ujawniła swoją tożsamość i wyjaśniła powody ukrywania swojej płci. Uważała, że jako kobieta nie będzie traktowana poważnie.

Sophie do końca życia pisała do Gaussa o swoich wynikach, jednak po roku 1808 Gauss chyba nigdy na nie nie odpowiadał. Ale w roku 1830 podjął starania — okazały się bezskuteczne — by getyngueński uniwersytet przyznał jej doktorat honoris causa.

¹Pisząc ten rozdział korzystałem z L. Grinstein, P. Campbell, *Women in Mathematics*.

Sophie Germain w dwu dziedzinach matematyki odniosła wyraźny sukces: w teorii liczb i teorii sprężystości. W teorii liczb uzyskiwała częściowe wyniki w pracach nad wielkim twierdzeniem Fermata. W teorii sprężystości zajęła się matematyczną teorią drgań cienkich powierzchni. Zbudowanie takiej teorii było treścią konkursu Paryskiej Akademii Nauk. W roku 1811 nie otrzymała żadnej nagrody, choć nikt poza nią do tego trudnego konkursu nie przystąpił. Akademia powtórzyła pytanie w kolejnej edycji konkursu, tym razem wzbogacona wersja pracy uzyskała wyróżnienie. Akademia jeszcze raz powtórzyła ten konkurs, nowa znacznie rozszerzona wersja pracy została nagrodzona. Za każdym razem Sophie była jedyną uczestniczką konkursu.

W XIX-wiecznej Francji Sophie Germain nie znalazła kontynuaterek. Zmienia się to dopiero w wieku XX. W roku 1931 doktorat z matematyki uzyskuje Marie Charpentier (1903 - 1994), jedna z dwu kobiet, które w okresie międzywojennym znalazły się pośród 130 matematyków-stypendystów Fundacji Rockefellera (drugą była Nina Bari).

Kolejny doktorat uzyskuje (1934) Marie-Louise Dubreil-Jacotin (1905 - 1972), jest ona zarazem pierwszą Francuzką, która zostaje profesorem matematyki na uniwersytecie.

37.2 Sofia Kowalewska

Sofia Wasiliewna Korwin-Krukowskaja, znana pod nazwiskiem męża jako SOFIA KOWALEWSKA (1850 - 1891) urodziła się w Moskwie jako córka generała artylerii, ze strony matki była prawnuczką matematyka F. T. von Schuberta, członka Akademii Nauk w Petersburgu. W swoich wspomnieniach twierdzi, że jej dziecinny pokój wytapetowany był kartkami z podręcznika Ostrogradskiego. Nie jest jasne, na ile te „hieroglify” wpłynęły na jej zainteresowanie matematyką. Za namową przyjaciół ojciec zapewnia jej prywatne lekcje rachunku różniczkowego i całkowego. Aby móc wyjechać na studia za granicę (w Rosji kobiety studiować nie mogą) zawiera w roku 1868 „fikcyjne” małżeństwo z wydawcą i przyszłym paleontologiem Władimirem Kowalewskim. Małżeństwo z założenia fikcyjne, okazało się trwałym dość nieudanym związkiem. W roku 1869 wspólnie wyjeżdżają do Heidelbergu. Otrzymuje zgodę na udział w zajęciach, pod warunkiem, że zgodzą się na to prowadzący zajęcia. Uczęszcza na wykłady Gustava Kirchhoffa i Hermanna von Helmholtza z fizyki, Leo Königsbergera i Paula du Bois-Reymonda z matematyki, uczestniczy w laboratoriach chemicznych Roberta Wilhelma Bunsena. Mimo intensywnych studiów małżonkowie wyjeżdżają na jakiś czas do Anglii, gdzie poznają m.in. Charlesa Darwina, Thomasa Huxleya i pisarkę George Eliot.

Po rocznym pobycie w Heidelbergu Sofia przenosi się do Berlina, gdzie zachwycony jej talentem Weierstrass udziela jej lekcji prywatnych. Weierstrass pozostanie jej najważniejszym nauczycielem, a ona jego najważniejszą uczennicą. W okresie berlińskim prowadzi intensywne badania, zajmuje się głównie równaniami różniczkowymi i fizyką matematyczną. Statuty Uniwersytetu Berlińskiego nie przewidują możliwości doktoryzowania kobiet, ale getyngeski taką możliwość dopuszcza. W roku 1874 getyngeska Georgia Augusta nadaje jej doktorat *in absentia*. Jeszcze w tym roku małżonkowie wracają do Rosji licząc na znalezienie tam pracy. W przypadku Sofii barierę stanowi brak dyplomu magisterskiego (w istocie równoważnego niemieckiemu doktoratowi), a nie może go uzyskać ze względu na obowiązujące w Rosji przepisy. Mąż dyplom zdobywa, ale żadnej odpowiedniej pracy nie dostaje. Nie znajdując pracy, Władimir Kowalewski angażuje się w rozmaite operacje finansowe. Wkrótce popada w długi i depresję. Kilka lat później (1883) popełni samobójstwo.

W roku 1881 Sofia opuszcza Rosję udając się najpierw do Berlina, potem do Paryża. Trzyletnią córkę pozostawia pod opieką krewnych. Tymczasem Gösta Mittag-Leffler szwedzki matematyk oczarowany jej talentem, urodą i urokiem osobistym zabiega o znalezienie jej stanowiska na uczelniach Szwecji bądź Finlandii. W roku 1884 Kowalewska rozpoczyna w charakterze docenta prywatnego wykłady w sztokholmskiej szkole wyższej (status uniwersytetu uczelnia uzyska dopiero w roku 1960), rok później zostaje tam profesorem nadzwyczajnym. Prawdopodobnie jest pierwszą kobietą pełniącą taką funkcję od czasów Laury Bassi i Marii Gaetany Agnesi. W roku 1888 otrzymuje prestiżową Nagrodę Bordina (znaczny honor i 5000 franków), rok później zostaje profesorem zwyczajnym. W tymże samym 1889 roku zostaje członkiem-korespondentem Petersburskiej Akademii Nauk. Pasma sukcesów przerywa śmierć, zapewne wynik zapalenia płuc.

W Sztokholmie Kowalewska angażuje się też w prace redakcyjne właśnie założonego pisma *Acta Mathematica*. Przyjaźni się z żoną Mittag-Lefflera, wspólnie piszą sztukę, wystawioną w Moskwie, ale chyba bez większego powodzenia. Jej najważniejsze wyniki należą do fizyki matematycznej, dotyczą przede wszystkim równań różniczkowych cząstkowych i obrotu bryły sztywnej.

37.3 Charlotte Angas Scott

CHARLOTTE ANGAS SCOTT (1858 - 1931) jest matematyczką o talencie skromniejszym niż Germain, Kowalewska czy późniejsza od nich Noether, ale może jej życie dobrze ilustruje zwykłą, w miarę udaną karierę kobiety, która zdecydowała się zająć matematyką.

Urodziła się jako córka i wnuczka pastorów Kościoła kongregacyjnego (poza Kościołem anglikańskim). Do 18. roku życia uczyła się głównie w domu. W latach 1876-1880 studiowała w Girton College, Cambridge, pierwszym kolegium żeńskim. Większość słuchaczek, podobnie jak Charlotte, nie ma za sobą formalnego wykształcenia. W roku 1880 Scott przystępuje do dziewięciodniowego maratonu egzaminacyjnego Tripos. Formalnie nie jest klasyfikowana, ale wszyscy wiedzą, że zajęła bardzo dobre ósme miejsce. Dopiero 10 lat później przyćmi ten sukces Philippa Fawcett zajmując miejsce pierwsze (znów poza konkursem).

Girton College znajdowało się na obrzeżach Cambridge, co umożliwia studentkom słuchanie wykładów profesorów uniwersytetu, oczywiście o ile się na to zgodzą. W latach 1880-1885 Scott wykłada w Girton College i słucha wykładów Cayleya. Pod jego kierunkiem pisze rozprawę doktorską, na podstawie której Uniwersytet Londyński nadaje jej doktorat. Uniwersytet Cambridge kobietom w owym czasie żadnych tytułów nie nadawał.

W roku 1885 zostaje otwarte w Pensylwanii Bryn Mawr College — pierwsze w USA kolegium zapewniające kobietom pełną edukację na poziomie akademickim. Ponieważ w Anglii podobnych instytucji nie ma, Scott decyduje się wyjechać do USA. W Bryn Mawr będzie nauczać przez blisko 40 lat, pod jej kierunkiem powstanie osiem doktoratów. W roku 1924 przeszła na emeryturę i powróciła do Cambridge. Nigdy nie wyszła za mąż, w tych czasach panowało przekonanie, że kariera akademicka i małżeństwo są dla kobiety nie do pogodzenia.

Najważniejszą częścią jej dorobku jest zapewne podręcznik *An Introductory Account of Certain Modern Ideas and Methods in Plane Analytical Geometry* (1894), wznowiona 30 lat później. Była pierwszą kobietą członkiem Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego i członkiem wielu towarzystw europejskich. Była też jedną z czterech uczestniczek I Międzynarodowego Kongresu Matematycznego w Zurychu (1897), trzy pozostałe przybyły z Getyngi, Rzymu i Sankt Petersburga. Była też jedną z nielicznych uczestniczek II Kongresu w Paryżu (1900). W swej 23-stronicowej relacji z kongresu krytycznie oceniła dość bezładną dyskusję po wykładzie Hilberta. A większość wykładów była jej zdaniem na niskim poziomie, czytane były z kartki, często pośpiesznie.

37.4 Emmy Noether

EMMY NOETHER (1882 - 1935) urodziła się w Erlangen jako córka Maxa Noethera (1844 - 1921) profesora miejscowego uniwersytetu. Także jej młodszy

brat Fritz był matematykiem. Po ukończeniu gimnazjum zdała egzamin państwowy uprawniający do nauczania angielskiego i francuskiego w szkołach dla dziewcząt. W latach 1900-1902 słucha jako wolny słuchacz (tylko taki status jest możliwy) wykładów ojca i Paula Gordana (1837-1912) na erlangenśkim uniwersytecie. Zimowy semestr 1903/1904 spędza w Getyndze słuchając wykładów Hilberta, Kleina i Minkowskiego, oczywiście też w charakterze wolnego słuchacza. Wraca do Erlangen, gdzie właśnie przyznano studentkom pełne prawa. W grudniu 1907 uzyskuje doktorat na podstawie rozprawy napisanej pod kierunkiem Gordana.

Stopniowo jej dorobek naukowy zaczyna być coraz bardziej doceniany, w roku 1915 Klein i Hilbert zapraszają ją do Getyngi. Wniosek o rozpoczęcie przewodu habilitacyjnego zostaje odrzucony, ale w Getyndze prowadzi wykłady oficjalnie anonsovane jako wykłady Hilberta. W końcu, w roku 1919 uzyskuje habilitację i zostaje docentem prywatnym, trzy lata później zostaje profesorem nadzwyczajnym (ale bez wynagrodzenia). Tylko wykłady z algebry zapewniają jej skromny dochód. W semestrze zimowym 1928/1929 na zaproszenie P. S. Aleksandrowa spędza jakiś czas w Moskwie. W roku 1932 wygłasza wykład plenarny na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Zurychu, stając się tym samym pierwszą kobietą, która dostąpiła takiego zaszczytu. Kolejną będzie KAREN UHLENBECK (ur. 1942), która wygłosi wykład plenarny na kongresie w Kioto (1990), ponad pół wieku później.

W styczniu 1933 Hitler zostaje kanclerzem, a już w kwietniu wchodzi w życie ustawa zakazująca pełnienia urzędów publicznych przez osoby „niearyjskiego” pochodzenia. W szczególności obejmuje ona profesorów akademickich. W tej sytuacji Noether decyduje się — jak wiele innych osób mających taką możliwość — na emigrację. Noether znana była ze swych mocno lewicowych poglądów. Początkowo rozważa Moskwę, ale brak wyraźnej decyzji ze strony radzieckiej administracji powoduje, że w sierpniu 1933 decyduje się na przyjęcie posady w żeńskim kolegium w Bryn Mawr, ok. 90 km od Princeton. Jej brat Fritz wyjechał do Tomsk na Syberii. Wkrótce został aresztowany i prawdopodobnie rozstrzelany.

Oczywiście to skromne kolegium nie jest miejscem pracy adekwatnym do jej pozycji naukowej. Z założenia miało to być rozwiązanie prowizoryczne, ale żadna z czołowych uczelni amerykańskich nie oferuje jej odpowiedniego stanowiska. Nawet w Bryn Mawr College przedłużenie kontraktu na kolejny rok uzyskała dzięki zabiegom amerykańskich kolegów, w tym Birkhoffa, Lefschetza i Wienera. W roku 1934 prowadzi też wykłady w nieodległym Princeton. W kwietniu 1935 umiera w szpitalu, prawdopodobnie w wyniku powikłań pooperacyjnych.

Noether ma wybitne wyniki w fizyce teoretycznej, ale najgłębiej wpłynęła na ostateczny kształt algebry abstrakcyjnej. W pewnym sensie jej prace kończą pewien proces rozpoczęty pracą Galois. Wywarła znaczący wpływ m.in. na Emila Artina (1898 - 1962), Helmuta Hessego (1898 - 1979) i Bartela Leenderta van der Waerdena (1903 - 1996). Słynna *Moderne Algebra* tego ostatniego powstała na podstawie notatek z jej wykładów. Bardzo wysoko ceniła Dedekinda, o swoich wynikach twierdziła, że to wszystko jest już u niego. Wydała jego dzieła zebrane i korespondencję z Cantorem.

37.5 Nina Bari

Wraz z nadejściem XX w. matematyczne kariery kobiet przebiegają już w sposób dość regularny. Kariera NINY KARLOWNEJ BARI (1901 - 1961) może posłużyć za przykład, choć fakt, że część jej młodości przypada na okres rewolucji i wojny domowej jej życie nieco komplikuje. Gdy w roku 1918 Uniwersytet Moskiewski wznawia zajęcia, Bari zapisuje się na Wydział Matematyczno-Fizyczny. Szybko trafia w krąg uczniów Łuzina, należy do najwcześniejszych członków Łuzitanii. Pozostała na zawsze wierną uczennicą Łuzina zarówno, jeśli chodzi o tematykę badawczą (teoria funkcji rzeczywistych), jak przywiązanie emocjonalne do dawnego mistrza. Po zakończeniu studiów wykłada jakiś czas w wyższej szkole rolniczej, na politechnice, a także w Instytucie Komunistycznym Swierdłowa. Jednocześnie prowadzi intensywną pracę naukową. w roku 1927 korzystając ze stypendium Rockefellera wyjeżdża na pół roku do Paryża. Wyjeżdża też do Lwowa i na kongres do Bolonii. Od roku 1932 jest profesorem zwyczajnym moskiewskiego uniwersytetu. Zginęła śmiercią samobójczą rzucając się pod jadący pociąg metra.

Jej mężem był znany topolog Wiktor Władimirowicz Niemycki (1900 - 1967). W czasach studenckich Niemycki wraz ze sławnym w przyszłości topologiem Andriejem Nikołajewiczem Tichonowem (1906 - 1993) odkryli nieznaną przełęcz w górach Kaukazu, znaną obecnie jako przełęcz Niemyckiego-Tichonowa.

Od czasów, gdy kobiety mogą robić karierę akademicką w matematyce małżeństwa matematyczne — jak Bari i Niemyckiego — stają się zjawiskiem coraz częstszym. Do najbardziej znanych należą Grace Chisholm Young (1868 - 1944) i William Henry Young (1863 - 1942), Julia Robinson (1919 - 1985) i Abraham Robinson (1918-1974) oraz Mary Ellen Rudin (1924 - 2013) i Walter Rudin (1921 - 2010).

Rozdział 38

Od Harvardu do Uniwersytetu Hopkinsa

Pierwsze kolegium na ziemi amerykańskiej powstało w roku 1636 w Newtown, przemianowanym dwa lata później na Cambridge, by kojarzyło się jakoś z czcigodnym uniwersytetem angielskim. Nazwa Harvard College upamiętnia pierwszego dobroczyńcę — pastora JOHN A HARVARDA (1607 - 1638). Minęło ponad 250 lat zanim najlepsze amerykańskie kolegia zaczęły przypominać europejskie uniwersytety. Historycznym momentem jest założenie Uniwersytetu Johnsa Hopkinsa — pierwszego uniwersytetu badawczego w USA.

38.1 Harvard i Yale

Najstarsze kolegia to Harvard (1636), William and Mary (Williamsburg 1693), Yale (New Haven 1701) oraz College of New Jersey (Princeton 1746). Przynajmniej do końca XIX w. Harvard i Yale uchodzą za dwa najbardziej prestiżowe. Nauka w kolegium trwa cztery lata. Warunkiem przyjęcia na studia była jakaś znajomość łaciny i podstaw greki. Nie było zorganizowanej sieci szkół elementarnych, więc te umiejętności trzeba było zdobyć poprzez lekcje prywatne czy nieliczne szkoły.

W połowie XVII w. program Harvardu przedstawia się z grubsza następująco¹. Pierwszy rok to ugruntowanie znajomości łaciny i greki, a także hebrajski, logika i retoryka. Na drugim roku kontynuacja tych trzech ostatnich dyscyplin, czasem też greki i wstęp do filozofii naturalnej. Na trzecim roku filozofia naturalna, filozofia umysłu, filozofia moralna i nieco geografii. Na ostatnim ro-

¹F. Rudolph, *Curriculum*, s. 31.

ku utrwalanie wcześniejszej wiedzy i początki matematyki. Przez cztery lata studiowano też katechizm. Do tego dochodziła domieszka historii i botaniki. Wychowanek Harvardu powinien umieć przełożyć z hebrajskiego na łacinę Stary Testament, a z greki na łacinę — Nowy Testament.

Program Harvardu był wzorem dla kolegów późniejszych, ich programy różniły się w szczegółach. Ale w najlepszych kolegiach wymagania rosły. W połowie XVIII w. w Yale zakłada się, że studenci potrafią tłumaczyć Biblię z angielskiego i łaciny na grekę i hebrajski. Trudno uwierzyć, by te wymagania były osiągalne.

Przez kolejne sto lat program się trochę zmienia. Łaciny i greki studenci uczą się teraz głównie na tekstach klasyków, a nie Biblii. Znaczące miejsce zajmuje już matematyka, także filozofia naturalna zaczyna odgrywać większą rolę.

Zasadniczo w XIX w. Harvard kojarzy się z postępem, Yale jest uniwersytetem dość konserwatywnym. Ale pierwsze amerykańskie doktoraty nadał właśnie Yale. Przyszły doktor miał mieć za sobą przynajmniej dwa lata dalszych studiów po uzyskaniu stopnia bakałarza, zdać odpowiedni egzamin i przedstawić rozprawę będącą świadectwem znaczących osiągnięć w studiowanej dyscyplinie. W roku 1861 Yale nadało trzy pierwsze doktoraty. Jednym z promowanych doktorów był fizyk Arthur Wright.

Rozprawa Wrighta *Znając prędkość i kierunek meteoru w momencie wejścia w atmosferę Ziemi wyznaczyć jego orbitę wokół Słońca uwzględniając siłę przyciągania obu ciał* nie zachowała się. Wiadomo, że zdawany przez niego egzamin obejmował matematykę, języki nowożytne, mineralogię i botanikę. Wkrótce został profesorem Yale i dyrektorem fizycznego laboratorium. Jego faktycznym promotorem był Hubert Newton (1830 - 1896), syn geologa, inżyniera górnictwa. Newton był w matematyce niemal samoukiem, tylko w roku 1855/1856 studiował na Sorbonie.

Dwa lata później, także w Yale, doktorat uzyskał JOSIAH WILLARD GIBBS (1839 - 1903), pierwszy Amerykanin z doktoratem mający znaczącą pozycję w światowej matematyce. Doktoryzował się pracą *O kształcie zębów kół w przekładni zębatej walcowej*, tematyka egzaminów obejmowała matematykę, etykę i języki nowożytne. Gibbs jest ważną postacią w dziejach analizy wektorowej, w termodynamice i fizyce statystycznej, w teorii szeregów trygonometrycznych znany jest efekt Gibbsa. W latach 1863-66, czyli już po doktoracie, jest w Yale tutorem łaciny. Kolejne trzy lata spędza w Europie studiując w Paryżu, Berlinie i Heidelbergu. W latach 1871-1903 jest profesorem fizyki matematycznej, przy czym do roku 1880 pracuje bez wynagrodzenia.

Wprowadzenie doktoratu do amerykańskiego życia akademickiego było trudne z wielu względów. Tradycyjny model amerykańskiego wykształcenia nie przewidywał specjalizacji, z tym samym problemem zmagaly się pod koniec XIX w. uniwersytety angielskie. Amerykańskie kolegia, nawet gdyby chciały, nie mogły zapewnić specjalistycznego wykształcenia — nie było specjalistów. W przypadku matematyki, Nathaniel Bowditch — najwybitniejszy matematyk amerykański sprzed roku 1850 — zajmował się przede wszystkim astronomią i nawigacją; co gorsza nie był zainteresowany pracą na uczelni — nawet na Harvardzie.

Te pierwsze doktoraty z Yale są sygnałem powolnych stopniowych zmian. W latach 30. XIX w. na Harvardzie, Yale i niektórych innych uczelniach pojawiają się profesorowie matematyki, w Yale Denison Olmsted (1791 - 1859) i Elias Loomis (1811 - 1889). Loomis jest autorem podręczników matematyki tłumaczonych na chiński i w XIX w. szeroko w Chinach wykorzystywanych. Na Harvardzie wykłada Benjamin Peirce (1809 - 1880), a po nim jego syn Charles — matematyk o skromnym dorobku, ale znacznym talencie pedagogicznym.

Przynajmniej od początku XIX w. Harvard i Yale zaczynają wysyłać wybranych najzdolniejszych absolwentów na uzupełniające studia do Europy. W ten sposób kształceni są przyszli profesorowie. Jest to oczywiście metoda dość kosztowna. Szybszy dopływ wyspecjalizowanych kadr akademickich zapewniają dopiero reformy wprowadzone na Harvardzie.

38.2 Charles William Eliot i Harvard

CHARLES WILLIAM ELIOT (1834 - 1926) pochodził z zamożnej, kulturalnej rodziny kupieckiej². Jego dziad ufundował katedrę literatury greckiej na Harvardzie, sam Charles mógł prowadzić życie wolne od trosk finansowych. Podczas studiów na Harvardzie zainteresował się chemią. Po ukończeniu studiów (1854) zostaje tutorem matematyki na swojej macierzystej uczelni, z wynagrodzeniem 645 \$, pensja profesora wynosiła wówczas 2 200 \$. Stopniowo awansuje, w roku 1858 zostaje adiunktem (assistant professor) z wynagrodzeniem 1 200 \$. Prowadzi zajęcia z matematyki i chemii. Uczelnia ma wówczas prezydenta, siedmiu profesorów i czterech tutorów.

Ówczesny Harvard składa się z kolegium, wydziałów prawa, medycyny i teologii oraz Lawrence Scientific School — czegoś w rodzaju wydziału nauk podstawowych i technicznych. W wyniku konfliktu z profesorem chemii, swym najważniejszym nauczycielem, Eliot przechodzi na ten wydział. Wkrótce zostaje

²S. Batterson, *American Mathematics 1890-1913*, s. 52-65.

jego dziekanem i odkrywa swoje talenty administracyjne. Ale gdy profesor chemii opuszcza swą katedrę, prezydent sprowadza na to miejsce wybitnego chemika z Nowego Jorku, rozzarowany Eliot z Harvardu odchodzi (1863).

Na dwa lata wyjeżdża z rodziną do Europy. Odwiedza Paryż, Marburg, Karlsruhe, kończy we Włoszech. Nawet jeśli planował pogłębiać swą wiedzę chemiczną, wyraźnie zmienił plany: wnikliwie studiuje europejskie szkoły wyższe. Po powrocie do Ameryki otrzymuje świetnie płatną propozycję pracy w przemyśle — odrzuca ją i przyjmuje propozycję skromniejszą, stanowisko profesora w nowej bostońskiej uczelni technicznej (przyszłe MIT) z wynagrodzeniem 2000 \$. Jesienią 1865 obejmuje tę profesurę, jednocześnie aktywnie uczestnicząc w życiu swej dawnej *alma mater*. Publikuje szeroko dyskutowany artykuł o amerykańskim szkolnictwie wyższym. Gdy w roku 1868 pojawia się wakat na stanowisku prezydenta Harvardu, okazuje się poważnym kandydatem na to stanowisko. Trzydziestopięcioletni Eliot nie jest kandydatem idealnym — w szczególności nie ma żadnego dorobku naukowego. Rada powiernicza uczelni zatwierdza go z trudem: Eliot otrzymuje tylko jeden głos ponad wymagane minimum.

Eliot będzie prezydentem Harvardu przez 40 lat, do roku 1909. Jego plan zakładał zwiększenie obsady akademickiej i wprowadzenie stypendiów na studia w Europie. Reformy były kosztowne, ale Eliot miał trochę szczęścia na początku urzędowania: właśnie wchodziła w życie wcześniej uchwalona podwyżka czesnego (ze 105 \$ do 150 \$), uczelnia otrzymała też kilka nieoczekiwanych donacji.

W historii amerykańskiego szkolnictwa wyższego Eliot kojarzony jest przede wszystkim z wprowadzeniem wybieralności przedmiotów. W ten sposób Harvard stopniowo zbliżał się do modelu niemieckiego. Ale tradycyjny kanon wykształcenia był tak głęboko zakorzeniony, że w tej materii napotykał Eliot na spory opór. Takt i cierpliwość pozwoliły mu ten opór pokonać. Od roku 1869 student Harvardu może się specjalizować. Także za jego prezydentury, od roku 1872 Harvard zaczął nadawać doktoraty.

Może łatwiej zrozumiemy opór konserwatywnej profesury, gdy uświadomimy sobie, że sam Eliot, gdy w Marburgu uzupełniał swe studia, był przynajmniej początkowo przekonany, że jakiegokolwiek kopiowanie modelu niemieckiego jest skazane na porażkę. Nie jest jasne, kiedy zmienił pogląd.

Wpływ Eliota nie ogranicza się do Harvardu. Harvardzkie reformy posłużyły za wzór innym kolegom. Na nich wzorowali się prezydenci Cornella, Stanfordu i Chicago — odpowiednio historyk Andrew White (1832 - 1918), ichtiolog David Starr Jordan (1851 - 1931) i orientalista William Rayner Harper (1856 - 1906).

38.3 Daniel Coit Gilman i Uniwersytet Johnsa Hopkinsa

Na harwardzkich reformach wzorował się też Daniel Coit Gilman³ tworząc Uniwersytet Johnsa Hopkinsa.

DANIEL COIT GILMAN (1831 - 1908), w latach 1848-1852 studiował w Yale, najbardziej interesowała go geografia. Przez pewien czas pracował jako attaché w poselstwie w Petersburgu, zimę 1854/1855 spędził w Berlinie, a latem 1855 reprezentował rodzinny stan Connecticut na Wystawie Światowej w Paryżu. Wszędzie z zainteresowaniem śledził miejscowe instytucje edukacyjne. Od roku 1855 związany z Yale, ale pełni tam funkcję nietypową: zajmuje się pozyskiwaniem funduszy. Przez kilka lat pracuje tam też w charakterze bibliotekarza.

W roku 1862 prezydent Abraham Lincoln podpisuje *Morrill Act* — jedną z najważniejszych ustaw w dziejach amerykańskiego szkolnictwa wyższego. Ustawa przyznawała stanom ziemię federalną, którą mogły przeznaczyć na założenie stanowych wyższych uczelni o profilu rolniczo-inżynierskim. Gilman wraz ze swoim przyjacielem przekonali władze stanowe Connecticut, by ziemię tę i specjalną dotację przeznaczyć na założenie Yale Scientific School. W nowej placówce Gilman zostaje profesorem geografii fizycznej. W pierwszych latach istnienia instytucja ta swoje przetrwanie zawdzięcza coraz bardziej widocznym talentom administracyjnym Gilmana. W roku 1870 ubiega się o stanowisko prezydenta Yale College, przegrywa nieznacznie ze swym mocno konserwatywnym rywalem. Przez krótki czas pełni funkcję prezydenta Uniwersytetu Kalifornijskiego, to za jego czasów został przeniesiony z Oakland do Berkeley.

JOHNS HOPKINS (1795 - 1873) umierając przeznacza w swym testamencie 7 milionów dolarów (pod względem siły nabywczej równoważność około 180 milionów dolarów dzisiejszych) na założenie nowego uniwersytetu i szpitala w Baltimore. Kiedy rada powiernicza funduszu zarządzającego tym majątkiem konsultuje prezydentów Harvardu, Yale i Cornella prosząc o wskazanie osoby mogącej objąć funkcję prezydenta w przyszłej uczelni, wszyscy trzej wskazują Gilmana. Wkrótce Gilman obejmuje funkcję prezydenta (1875), będzie nim do roku 1901.

Uniwersytet Johnsa Hopkinsa jest pierwszym uniwersytetem badawczym w USA. Początkowo Gilman chciał ograniczyć się wyłącznie do studiów doktoranckich, ale musiał zaakceptować żądanie władz uczelni, by uruchomić też studia na niższym poziomie. Ale studia doktoranckie pozostały głównym przed-

³Tamże, s. 65-82. Szerzej w H. Hawkins, *Pioneer: A History of the Johns Hopkins University 1874-1889*.

miotem jego uwagi. Lato i jesień 1875 spędza Gilman w Europie szukając możliwie kompetentnych profesorów. Okazuje się to niełatwe. Jedynym uczonym światowej rangi, z którym udało się podjąć realne negocjacje był JAMES JOSEPH SYLVESTER (1814 - 1897). Pensje profesorów Harvardu kształtowały się na poziomie 4 000 dolarów, Gilman proponuje Sylvesterowi 5 000, ale ten ofertę odrzuca. Ostatecznie akceptuje 5 000 \$ plus dodatek 1 000 \$ na mieszkanie. Sylvester spędzi w Baltimore siedem lat.

Gilman mógł oferować tak wysokie płace, gdyż same odsetki od kapitału miały zapewnić jego uniwersytetowi dochody na poziomie ponad 200 000 dolarów rocznie. Kwota o ok. 30% wyższa od ówczesnego rocznego budżetu Harvardu.

Gilman nie pozyskał żadnej innej międzynarodowej gwiazdy, ale 44-letni hellenista Basil Gildersleeve z Uniwersytetu Wirginii okazał się wyborem znakomitym. Pozostał na uczelni przez 35 lat, czyniąc z niej jeden z najważniejszych ośrodków filologii klasycznej na świecie. W momencie rozpoczęcia działalności (1876) Uniwersytet Hopkinsa zatrudniał 6 profesorów, oprócz Sylwestera i Gildersleeve'a był fizyk, chemik, fizjolog i filolog klasyczny.

Sylvester nie był idealnym kandydatem. Miał już 61 lat, więc najbardziej twórczy okres miał poza sobą. Nie miał talentów pedagogicznych, miał też trudny charakter. Ale dla Uniwersytetu Hopkinsa okazał się prawdziwym skarbem. Sylvester założył *American Journal of Mathematics* — pierwsze amerykańskie uniwersyteckie pismo matematyczne, na jego łamach ukazał się (1878) sławny „dowód” Kempego twierdzenia o czterech barwach. Asystentem Sylwestera został ściągnięty z Harvardu William Story (doktorat w Lipsku), jego uczniem będzie Solomon Lefschetz.

Po powrocie Sylwestera do Anglii Gilman rozpoczyna negocjacje z Felixem Kleinem, wówczas jeszcze w Lipsku. Choć Klein podobno możliwość wyjazdu do Ameryki poważnie rozważał, ofertę na poziomie 5 000 dolarów odrzuca. Możliwe, że wiedział od Cayleya, że zaprzyjaźniony z nim Sylvester otrzymał warunki korzystniejsze. Katedrę po Sylvesterze objął jego uczeń Thomas Craig.

Rozdział 39

Powstanie polskiej szkoły matematycznej

Zgodnie z popularnym obrazem powstania polskiej szkoły matematycznej ok. roku 1914 (wybuch wojny) polskiej matematyki prawie nie było, 10-15 lat później jest ona w stanie pełnego rozkwitu. W tak szybki postęp trudno uwierzyć.

Rosja potrzebowała prawie półtora wieku by od reform Piotra Wielkiego dojść do szkoły Czebyszewa. Oczywiście, wcześniej był Łobaczewski, Buniakowski i Ostrogradski, ale były to pojedyncze sukcesy. Chyba jeszcze dłużej trwa podobny proces w USA, gdzie ilościowo znaczące środowisko matematyczne kształtuje się dopiero pod koniec XIX w.

Spróbujmy spojrzeć na polskie środowisko matematyczne w okresie 1890 - 1918, tzn. w latach bezpośrednio przed odzyskaniem przez Polskę niepodległości. Okazuje się, że sytuacja matematyki we Lwowie i Krakowie przedstawia się znacznie lepiej niż to sugerują popularne opisy. Warszawa w matematyce ma niewiele sukcesów, ale ten brak rekompensuje bogata aktywność społeczna w zakresie popularyzacji. Lata międzywojenne omawiam tylko skrótowo, historia polskiej szkoły matematycznej w tym okresie jest dość dobrze znana.¹

39.1 W przededniu niepodległości

Na przełomie XIX i XX w. trzy ośrodki na ziemiach polskich odgrywały w matematyce pewną rolę: Kraków, Lwów i Warszawa. Matematycy polscy pracowali też w Petersburgu, Moskwie, Charkowie i Lipsku, ale nie mieli oni znaczącego wpływu na matematykę w odrodzonej Polsce.

¹Pisząc ten rozdział korzystałem z książek R. Dudy *Matematycy XIX i XX wieku związani z Polską* i *Historia matematyki w Polsce* oraz M. Przeniosło *Matematycy polscy w dwudziestoleciu międzywojennym*.

Kraków przed rokiem 1918

Przynajmniej od połowy XIX w. na Uniwersytecie Jagiellońskim pracują matematycy światowej sławy. W latach 1865 - 1884 profesorem na Uniwersytecie Jagiellońskim był FRANCISZEK MERTENS (1840 - 1927). Studiował w Berlinie, tam też doktoryzował się pod kierunkiem Kummera. Jego najważniejsze wyniki dotyczą teorii liczb. W szczególności wykazał, że dla sumy odwrotności liczb pierwszych zachodzi przybliżenie

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \approx \ln \ln x.$$

W latach 1885-1894 profesor politechniki w Grazu, w latach 1894-1911 profesor zwyczajny Uniwersytetu Wiedeńskiego.

STANISŁAW ZAREMBA (1863 - 1942) ukończył szkołę realną w Petersburgu i tamtejszą politechnikę. Następnie podjął studia matematyczne w Paryżu uwieńczone doktoratem (1889), w skład komisji egzaminacyjnej wchodził Darboux, Picard i Poincaré. Po kilku latach pracy w prestiżowych paryskich liceach przyjmuje zaproszenie do objęcia katedry na Uniwersytecie Jagiellońskim. Pozostanie tam do roku 1935. Jego główną specjalnością były równania różniczkowe, w których osiągnął wyniki porównywalne z wynikami Poincarégo i Lebesgue'a.

Przez kilkanaście lat związany był z Krakowem KAZIMIERZ ŻORAWSKI (1866 - 1953), wychowanek Cesarskiego Uniwersytetu w Warszawie, dalsze studia odbywał w Getyndze i Lipsku. We Lwowie się habilitował (1892), ale rok później przeniósł się na Uniwersytet Jagielloński. Jest wybitną postacią w dziejach geometrii różniczkowej. Po odzyskaniu przez Polskę niepodległości wrócił do Warszawy, najpierw na politechnikę, potem na uniwersytet. W okresie młodości Żorawski zamierzał poślubić Marię Skłodowską, ale z punktu widzenia jego rodziny byłyby to mezalians, więc do małżeństwa nie doszło.

Przez jakiś czas pracował na Uniwersytecie Jagiellońskim ALFRED ROSENBLATT (1880 - 1947). Po ukończeniu krakowskiego gimnazjum podjął studia na Politechnice Wiedeńskiej. Korzystając z okazji słuchał też wykładów Mertensa na tamtejszym uniwersytecie. W latach 1902-1906 studiował matematykę na Uniwersytecie Jagiellońskim, po doktoracie (1908) pod kierunkiem Zaremby wyjechał na rok do Getyngi. Po powrocie obejmuje asystenturę na UJ, w roku 1913 habilituje się. Dalsza jego kariera to wykłady m.in. w Paryżu, Rzymie, Bolonii, a od roku 1936 w Limie. Matematyk nadzwyczaj wszechstronny, zajmował się dziedzinami tak różnymi jak geometria algebraiczna, równania różniczkowe, fizyka, kosmologia, genetyka i historia nauk ścisłych.

Podczas sławnego spotkania na krakowskich Plantach, kiedy Steinhaus odkrywa Banacha, obecny jest też Nikodym, a obaj młodzi matematycy wspominają, że ich matematyczne pasje dzieli jeszcze jeden ich przyjaciel — Wilkosz.

OTTOŃ NIKODYM (1887 - 1974) studiował we Lwowie pod kierunkiem Puzyny, Sierpińskiego i Smoluchowskiego. Przez kilka lat Nikodym jest nauczycielem gimnazjum realnego w Krakowie. Równolegle prowadzi wykłady z dydaktyki na Studium Pedagogicznym UJ. Doktoryzuje się w roku 1924, habilituje trzy lata później. Od roku 1930 w Warszawie, po wojnie wyjeżdża na Zachód.

WITOLD WILKOSZ (1891 - 1941), po maturze (1910) zaczyna studiować na UJ filologię klasyczną, dwa lata później przenosi się na matematykę w Turynie. Ostatecznie wraca na UJ, gdzie w roku 1918 doktoryzuje się pod kierunkiem Zaremby. Od roku 1920 profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego. Zajmował się głównie popularyzacją, miewał liczne odczyty i pogadanki radiowe.

W Krakowie pracował też astronom TADEUSZ BANACHIEWICZ (1882 - 1954), studia na Cesarskim Uniwersytecie Warszawskim uzupełniał w Getyndze, a praktykę zdobywał w podpetersburskim Pułkowie. Przez jakiś czas był asystentem astronomii kolejno w Moskwie, Kazaniu i Dorpacie, gdzie doszedł do stanowiska profesora nadzwyczajnego i dyrektora obserwatorium astronomicznego. Po odzyskaniu niepodległości objął katedrę astronomii na Uniwersytecie Jagiellońskim. Choć był przede wszystkim astronomem, ma też zauważalny dorobek w matematyce: jest twórcą tzw. rachunku krakowianowego — narzędzia cenionego w czasach, gdy nie było jeszcze komputerów.

Fizyki uczył Władysław Natanson (1864 - 1937) wybitny fizyk zajmujący się głównie termodynamiką, teorią promieniowania i mechaniką statystyczną. Równie wybitny eseista i popularyzator nauki.

Lwów przed rokiem 1918

Rzeczpospolita utraciła Lwów już w roku 1772, po I rozbiorze. W roku 1804 Austria przekształciła uniwersytet w gimnazjum, jednak już w roku 1817 szkoła na powrót stała się uniwersytetem, ale z niemieckim językiem wykładowym. Dopiero w roku 1871 w ramach reform cesarza Franciszka Józefa językiem wykładowym staje się język polski. Język polski wprowadza także istniejąca we Lwowie od roku 1844 politechnika.

Pierwszym profesorem zwyczajnym spolonizowanego Uniwersytetu Franciszkańskiego we Lwowie (pod taką nazwą lwowski uniwersytet działa do roku 1918) zostaje WAWRZYNIEC ŹMURKO (1824 - 1889). Pochodził z rodziny chłopskiej, studiował początkowo na Wydziale Filozoficznym lwowskiego uniwersytetu, potem zaś w wiedeńskiej Technische Hochschule. Tam się habilitował

(1849) i przez dwa lata prowadził wykłady. W roku 1851 wraca do Lwowa, gdzie obejmuje katedrę matematyki na tamtejszej politechnice. W roku 1871 przechodzi na uniwersytet, w roku akademickim 1885/86 jest jego rektorem. Sławę przyniosły mu konstrukcje przyrządów do kreślenia niektórych krzywych nagradzane na wystawach w Wiedniu, Londynie i Paryżu.

Jego najwybitniejszym uczniem był pochodzący z kniaziowskiej rodziny JÓZEF PUZYNA (1856 - 1919). Po doktoracie (1883) uzupełniał swe wykształcenie w Berlinie u Weierstrassa i Kroneckera. Przez lata profesor zwyczajny Uniwersytetu Franciszkańskiego, w roku akademickim 1904/05 rektor. Jego monografia poświęcona teorii funkcji analitycznych uchodzi za najlepszą polską książkę matematyczną XIX w. Jest dziełem nowoczesnym: zawiera elementy topologii i teorii mnogości. Człowiek o wszechstronnych zainteresowaniach, miłośnik Wagnera, świetny wykładowca. Do jego uczniów należą Antoni Łomnicki (1881 - 1941) i Stanisław Ruziewicz (1889 - 1941), w przyszłości profesorowie uczelni lwowskich oraz wspomniany już Otton Nikodym. Na przełomie wieków profesorami lwowskiej politechniki byli Stanisław Kępiński (1867 - 1908) i Zdzisław Krygowski (1872 - 1955), pierwszy z nich studia uzupełniające odbywał w Getyndze, drugi — w Berlinie i Paryżu.

Profesorem na Wydziale Filozoficznym był KAZIMIERZ TWARDOWSKI (1866 - 1938), wybitny filozof, wychowanek Uniwersytetu Wiedeńskiego, legendarny wykładowca. Do jego uczniów należą Kazimierz Ajdukiewicz, Tadeusz Kotarbiński, Władysław Witwicki, Jan Łukasiewicz i Stanisław Leśniewski. Dwaj ostatni przez lata byli członkami komitetu redakcyjnego *Fundamenta Mathematicae*. Twardowski był też formalnym promotorem doktoratu Banacha.

Profesorem fizyki był we Lwowie MARIAN SMOLUCHOWSKI (1872 - 1917), fizyk światowej sławy, jeden z pionierów fizyki statystycznej. Niestety chyba nie wywarł żadnego wpływu na polskie środowisko matematyczne.

W roku 1908 przyjeżdża do Lwowa WACŁAW SIERPIŃSKI (1882 - 1969). Studiował na Cesarskim Uniwersytecie Warszawskim. Po uzyskaniu stopnia kandydata (1904) podejmuje pracę w gimnazjum. W roku 1905 przyłącza się do strajku szkolnego i wyjeżdża na studia uzupełniające do Krakowa, gdzie uzyskuje doktorat. Kilka miesięcy spędza w Getyndze. Po przyjeździe do Lwowa habilituje się, w roku 1910 zostaje profesorem nadzwyczajnym. Prowadzi wykłady z teorii mnogości. Prowadząc te wykłady Sierpiński był przekonany, że to pierwszy taki kurs na świecie. Przekonanie to jest błędne, wcześniej takie kursy prowadzili Zermelo, Hausdorff oraz Edmund Landau.

Sierpiński prowadzi we Lwowie seminarium, w którym uczestniczą m.in. Łomnicki, Nikodym, Ruziewicz, STEFAN MAZURKIEWICZ (1888 - 1945) oraz Aj-

dukiewicz. W roku 1913 Mazurkiewicz i Ruziewicz doktoryzują się pracami z pogranicza teorii mnogości. Formalnym promotorem jest Puzyna, gdyż Sierpiński nie będąc jeszcze profesorem zwyczajnym takich uprawnień nie miał.

Do Lwowa przyjeżdża też ZYGMUNT JANISZEWSKI (1888 - 1920), matematyk świetnie wykształcony po studiach w Zurychu, Monachium, Getyndze i Paryżu. Doktoryzował się pracą z topologii. Promotorem był Henri Lebesgue, a w skład komisji wchodził jeszcze Poincaré i Borel. Za kilka lat Janiszewski ogłosi na łamach *Nauki polskiej* artykuł *O potrzebach matematyki w Polsce*, w którym nakreślił program budowy polskiej szkoły matematycznej.

Warszawa przed rokiem 1918

W dziejach kultury umysłowej „kongresówki” istotną rolę odgrywali wychowankowie Szkoły Głównej, działającej w Warszawie w latach 1862-1869. Zbudowany na jej bazie rosyjskojęzyczny Cesarski Uniwersytet stał się jednym z narzędzi rusyfikacji, ale część wykładów — w tym matematyczne — stała na całkiem dobrym poziomie. W szczególności wykładali tu Nikołaj J. Sonin (w latach 1872-1893) i Gieorgij F. Woronoi (w latach 1894-1908). Uczniami Woronoja byli Sierpiński i Banachiewicz.

Szkoła Główna, choć funkcjonowała tylko siedem lat, pozostawiła trwałe ślady. To jej byli profesorowie i wychowankowie założyli (1882) Kasę pomocy dla osób pracujących na polu naukowym im. Józefa Mianowskiego, nazwa upamiętnia pierwszego i jedynego rektora Szkoły Głównej. Choć ostateczny kształt Kasy Mianowskiego mocno odbiegał od pierwotnych, znacznie ambitniejszych założeń, odgrywała ona istotną rolę jeszcze w latach międzywojennych. W szczególności, dzięki wsparciu finansowemu Kasy ukazywały się kolejne tomy Biblioteki Matematyczno-Fizycznej (najpierw pod redakcją M. A. Baranieckiego i A. Czajewicza, potem pod redakcją Czajewicza i S. Dicksteina) oraz (od roku 1888) czasopismo *Prace Matematyczno-Fizyczne*, pod redakcją S. Dicksteina, W. Gosiewskiego oraz E. i W. Natansonów. Niemal wszyscy ci redaktorzy przeszli przez Szkołę Główną.

SAMUEL DICKSTEIN (1851 - 1939) urodził się w rodzinie rabinackiej. Studia zaczął w Szkole Głównej, ale ukończył je (1870) już na Cesarskim Uniwersytecie. Pracował jako nauczyciel gimnazjalny, w latach 1878-1888 prowadzi własną szkołę realną. Oprócz udziału we wspomnianych wyżej przedsięwzięciach wydawniczych prowadzi własne badania, głównie z zakresu historii matematyki. Należy do najaktywniejszych współpracowników pisma przeglądowego *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Założył sieć stacji meteorologicznych, pismo *Ruch pedagogiczny*, współorganizował pierwsze w Polsce

towarzystwo ubezpieczeniowe. Współzałożyciel (1906) i pierwszy wiceprezes Towarzystwa Kursów Naukowych. Od roku 1915 wykłada na otwartym wówczas Uniwersytecie Warszawskim, od roku 1919 jest na nim profesorem honorowym matematyki i historii nauki. Wykłada do roku 1937, kiedy dalsze wykłady uniemożliwiają mu endeczkie bojówki.

Jednym z najambitniejszych i zarazem najbardziej udanych przedsięwzięć Kasy Mianowskiego był *Poradnik dla samouków*. Inicjatorem był STANISŁAW MICHAŁSKI (1865 - 1949), z wykształcenia technolog po petersburskiej politechnice, wybitny działacz oświatowy. W latach 1898-1915 ukazało się 15 tomów *Poradnika*: pięć tomów serii I (wskazówki dla kształcących się) oraz 10 tomów serii II i III (wykłady). Autorami byli zazwyczaj wybitni uczeni, ale odbiorcami mieli być raczej początkujący samoucy. W roku 1915 Michałski zaczął wydawać nową edycję *Poradnika* z dużo ambitniejszym programem.

W roku 1915 ukazuje się poświęcony matematyce tom I. Autorami zawartych w nim artykułów byli Janiszewski, Sierpiński, Mazurkiewicz, Zaremba, Kwietniewski i Łukasiewicz. Autorem II tomu (fizyka i meteorologia) jest w przeważającej mierze Smoluchowski. Wszystkie te postacie już się pojawiły, tylko Stefan Kwietniewski (1874-1940) jest postacią nową. Miał za sobą studia w Zurychu, Monachium i Getyndze. Przekładał książki matematyczne, na Uniwersytecie Warszawskim prowadził wykłady z geometrii rzutowej i opiekował się gabinetem modeli matematycznych. Żadnego poważniejszego stanowiska nigdy nie uzyskał.

39.2 W dwadzieścia lat później

W roku 1918 Kasa im. Mianowskiego zwraca się do polskich środowisk naukowych o przedstawienie najpilniejszych potrzeb w zakresie reprezentowanych przez nich dyscyplin. Obszernych odpowiedzi na łamach *Nauki polskiej* udzielili S. Zaremba, Z. Janiszewski, L. A. Birkenmajer i S. Mazurkiewicz. Zaremba zakładał — mogło się wydawać, iż było to wówczas jedyne realistyczne spojrzenie — że czołowi polscy matematycy wciąż będą kształceni za granicą. Historycznie najważniejsza jednak okazała się odpowiedź Janiszewskiego, który nakreślił ambitny program mający zapewnić polskiej matematyce samoistne miejsce w nauce światowej. Program Janiszewskiego zakładał koncentrację badań na kilku młodych dziedzinach i stworzenie specjalistycznego pisma naukowego. Program ten doczekał się pełnej realizacji w Warszawie i we Lwowie.

Spośród sześciu największych miast polskich (w nawiasie ludność według stanu na rok 1921), to jest Warszawy (937 tys.), Łodzi (452 tys.), Lwowa (219 tys.), Krakowa (184 tys.), Poznania (169 tys.) i Wilna (129 tys.) w latach międzywojennych tylko Łódź nie miała uniwersytetu. Choć Wilno i Poznań miały uniwersytety już od roku 1919 (w Wilnie reaktywowany dawny, w Poznaniu dopiero założony), ich pozycja na mapie polskiej matematyki była skromniejsza niż Warszawy, Lwowa i Krakowa.

Spójrzmy na obsadę personalną czołowych ośrodków matematycznych w Polsce. W Warszawie profesorami byli Janiszewski (po jego śmierci Sierpiński), Mazurkiewicz, Leśniewski i Łukasiewicz, profesorem honorowym Dickstein. Docentami byli m. in. Kazimierz Kuratowski (potem przez jakiś czas we Lwowie), Bronisław Knaster, Aleksander Rajchman, Alfred Tarski, Stanisław Saks, Antoni Zygmund, Jerzy Sława-Neyman, Karol Borsuk, Adolf Lindenbaum i Edward Marczewski. W Warszawie pracował też przybyły z Krakowa Żorawski. Warszawscy matematycy wydawali (zgodnie z planem Janiszewskiego) pismo *Fundamenta Mathematicae* poświęcone teorii mnogości, topologii, teorii funkcji rzeczywistych i logice matematycznej. Około roku 1940 *Fundamenta* były najczęściej cytowanym matematycznym pismem świata².

We Lwowie profesorami byli Eustachy Żyliński, Hugo Steinhaus, Stefan Banach, Stanisław Ruziewicz i Leon Chwistek, a docentami lub asystentami Władysław Orlicz, Stanisław Mazur, Juliusz Schauder i Stefan Kaczmarz. Lwowscy matematycy wydają *Studia mathematica* — pismo poświęcone analizie funkcjonalnej. Wspólną inicjatywą obu szkół były *Monografie matematyczne*. Pierwszym tomem tej prestiżowej serii jest *Théorie des opérations linéaires* Banacha. Pośród dalszych warto wspomnieć pierwszy tom *Topologie* Kuratowskiego (drugi tom ukazał się już po wojnie) oraz *Trigonometrical series* Zygmunta. Sławnymi wychowankami szkoły lwowskiej są Mark Kac i Stanisław Ulam, sławnym wychowankiem szkoły warszawskiej Samuel Eilenberg.

W Krakowie wciąż pracował Zaremba, a po odejściu Żorawskiego do Warszawy jego katedrę objął Jan Śleszyński. W późniejszym okresie profesorami byli tu Wilkosz, Tadeusz Ważewski i Franciszek Leja. Profesorem honorowym był Rosenblatt.

W Wilnie pracował Antoni Zygmund (od roku 1930) i jego wybitnie utalentowany uczeń Józef Marcinkiewicz (1910 - 1940). Poznań kształcił polskich kryptologów (Mariana Rejewskiego, Jerzego Różyckiego i Henryka Zygalskiego), którzy wkrótce złamali Enigmę.

²Ch. Brown, *Scientific Serials*, s. 171.

39.3 Trzy perły polskiej matematyki

W okresie międzywojennej świetności polscy matematycy uzyskali mnóstwo pięknych wyników, wiele z nich da się przedstawić na poziomie elementarnym. Wybór najciekawszych ma zawsze charakter częściowo subiektywny. Poniżej przedstawiam trzy: z teorii miary, teorii mnogości i analizy funkcjonalnej.

W roku 1924 Banach i Tarski odkryli niezależnie sławny paradoks kuli: kulę można podzielić na skończoną liczbę części tak, aby z tych części dało się złożyć dwie kule tej samej wielkości co wyjściowa. Odruchową reakcją na ten wynik jest stwierdzenie, że taki podział jest niemożliwy, bo przecież nie zgadza się objętość. W istocie, przy przesuwaniu i obracaniu tych części ich objętość się nie zmienia. Pod warunkiem, że w ogóle mają jakąś objętość! Ale w konstrukcji Banacha-Tarskiego kulę dzielimy na części niemierzalne, czyli takie, dla których objętość nie jest określona.

Paradoksalny rozkład kuli jest możliwy tylko dla tego, że w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nie da się zdefiniować nietrywialnej miary skończenia addytywnej geometrycznej (tzn. miary zbiorów przystających są równe), przy której wszystkie zbiory są mierzalne. Nieistnienie takiej miary wykazał Felix Hausdorff (1914).

W roku 1923 Banach wykazał, że na prostej i płaszczyźnie takie miary istnieją. Wynika stąd, że paradoks Banacha-Tarskiego nie ma swego odpowiednika na płaszczyźnie. Jeżeli z jednej figury płaskiej można przez skończony rozkład zbudować inną, to muszą mieć równe pola. Z związku z tym Tarski postawił pytanie: czy koło można podzielić na skończoną liczbę części tak, aby dało się z nich złożyć koło? Że jest to możliwe wykazał w roku 1988 Miklós Laczkovich, jego konstrukcja zakłada podział koła na około 10^{50} części.

W roku 1926 Tarski i Lindenbaum opublikowali pracę, w której zaanonsowali (bez dowodów) kilkadziesiąt twierdzeń teorii mnogości. Zapewne najciekawszym spośród nich było odkrycie związku pomiędzy uogólnioną hipotezą continuum a aksjomatem wyboru. Uogólniona hipoteza continuum głosi, że dla dowolnego nieskończonego zbioru X nie ma mocy pośredniej pomiędzy mocami zbioru X i rodziny jego podzbiorów $P(X)$. Anonsowane przez nich twierdzenie głosi, że uogólniona hipoteza continuum implikuje aksjomat wyboru. W roku 1947 — gdy Lindenbaum nie żył, a Tarski był na emigracji — dowód tego twierdzenia opublikował Sierpiński.

Od połowy XIX w. znane były przykłady funkcji ciągłych nigdzie nieróżniczkowalnych, ale panowało przekonanie, że takie „patologiczne” funkcje są czymś niezmiernie rzadkim. W roku 1931 Banach korzystając z twierdzenia Baire’a o kategoriach wykazał, że w przestrzeni $C[a, b]$ funkcji ciągłych z metryką supremum funkcje ciągle mające pochodną choćby w jednym punkcie stanowią

zbiór I kategorii. Oznacza to, że funkcje ciągle nigdzie nieróżniczkowalne są zjawiskiem dominującym, a nie wyjątkowym.

39.4 Banach i Tarski

Banach uchodzi za bezsprzecznie najwybitniejszego matematyka w dziejach Polski, Tarski ma zbliżoną pozycję w dziejach podstaw matematyki. Ale kariery obu były dość skomplikowane³.

STEFAN BANACH (1892 - 1945) był nieślubnym dzieckiem Stefana Greczki — górala spod Nowego Targu i chłopki Katarzyny Banach. Dzieciństwo spędził w Krakowie pod opieką Franciszki Płowej, właścicielki pralni, w której matka Stefana przez jakiś czas pracowała. Po maturze podejmuje studia (1910) w Szkole Politechnicznej we Lwowie. Z powodu wybuchu wojny studiów nie kończy. Okres wojny spędza w Krakowie, utrzymuje się z korepetycji. W roku 1916 dochodzi do sławnego spotkania ze Steinhausem na krakowskich Plantach. HUGO STEINHAUS (1887 - 1972) pracował w tym czasie w Krakowie jako urzędnik, ale miał już poza sobą doktorat w Getyndze, za rok robi habilitację.

Spotkanie na Plantach rozpoczyna okres intensywnej współpracy obu matematyków. Kiedy w roku 1920 Steinhaus zostaje profesorem Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie, pomaga Banachowi uzyskać asystenturę u Antoniego Łomnickiego na tamtejszej Szkole Politechnicznej. W tymże 1920 roku Banach doktoryzuje się na podstawie rozprawy *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales*. Uzyskanie asystentury i przeprowadzenie doktoratu nie było łatwe, gdyż Banach nie miał ukończonych studiów. Pomogły w tym zapewne talenty dyplomatyczne Steinhaus'a i mocna pozycja Kazimierza Twardowskiego — formalnego promotora Banacha.

Dalsza kariera przebiega gładko. W czerwcu 1922 habilituje się, miesiąc później zostaje profesorem nadzwyczajnym na Uniwersytecie Jana Kazimierza, w roku 1927 profesorem zwyczajnym. Od roku 1924 członek-korespondent Polskiej Akademii Umiejętności, od roku 1939 prezes Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Cała aktywność naukowa Banacha wiąże się ze sławną — dzięki niemu i innym matematykom lwowskim — Kawiarnią Szkocką. Wyjazdów za granicę unikał.

³Biografie obu uczonych są oparte na odpowiednich hasłach z książki R. Duda, *Matematycy XIX i XX wieku związani z Polską*. Szerszy obraz ich życia i twórczości dają E. Jakimowicz, A. Miranowicz (red.) *Stefan Banach: Niezwykłe życie i genialna matematyka*, impuls 2010 oraz A. Burdman Solomon *Alfred Tarski: Życie i logika*, Wydawnictwa Akademickie i Profesjonalne 2012.

W roku 1924 dzięki stypendium Fundacji Rockefellera spędził rok w Paryżu, w 1936 wyjechał do Oslo, by wygłosić wykład plenarny na Międzynarodowym Kongresie Matematyków. Przed rokiem 1939 z Polaków jeszcze tylko Sierpiński miał taki wykład — w roku 1932 w Zurychu.

Jego *Théorie des opérations linéaires* — pierwsza monografia analizy funkcjonalnej — otwiera serię *Monografie matematyczne*. Przełożona została na ukraiński (1948), angielski (1987) i rosyjski (2001).

Chociaż jako profesor Banach zarabiał bardzo dobrze, stale miał kłopoty finansowe. Dla podreperowania budżetu chętnie pisał podręczniki. Jest autorem dwutomowego *Rachunku różniczkowego i całkowego* oraz *Mechaniki teoretycznej*, jak również współautorem podręczników do gimnazjum. Sytuację finansową mogła podreperować wielka nagroda naukowa Polskiej Akademii Umiejętności (20 000 zł, czyli 20 profesorskich pensji) przyznana mu w 1939 roku, wybuch wojny praktycznie przekreślił jej znaczenie.

Podczas wojny, w latach okupacji radzieckiej, był dziekanem wydziału matematyczno-fizycznego Lwowskiego Uniwersytetu Państwowego im. Iwana Franki, w okresie okupacji niemieckiej — karmicielem wszy w instytucie Weigla. Na miesiąc przed śmiercią, w lipcu 1945, Wydział Filozoficzny Uniwersytetu Jagiellońskiego powołał go na katedrę matematyki.

ALFRED TARSKI (1901 - 1983) urodził się jako Alfred Tajtelbaum, syn kupca i przedsiębiorcy. W latach 1918-1923 studiował na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Warszawskiego. Gdy z powodu działań wojennych na pewien czas wykłady zostały zawieszone zgłosił się do wojska. W roku 1922 przyjął chrzest w kościele katolickim i zmienił nazwisko na Tarski.

W roku 1924 doktoryzował się pod kierunkiem Leśniewskiego, rok później habilitował. W latach 1925-1939 był nauczycielem w Gimnazjum im. S. Żeromskiego w Warszawie, równocześnie pełniąc funkcję docenta na Uniwersytecie Warszawskim.

W roku 1930 zabiega o wakującą katedrę logiki matematycznej na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie. Kontrkandydatem jest LEON CHWISTEK — logik i malarz, członek grupy formistów. Chwistek miał poparcie Bertranda Russella, Banacha i Steinhaus (był zresztą jego szwagrem). Tarskiego popierali Twardowski, Leśniewski, Łukasiewicz i Ajdukiewicz. Ostatecznie nominację dostał Chwistek. Trudno orzec, czy na niekorzyść Tarskiego zagrał młody wiek — miał dopiero 28 lat — czy może za decyzją rady wydziału krył się antysemityzm. Pamiętajmy też, że Tarski nie był jeszcze autorem swojej najślawniejszej pracy.

Ta fundamentalna praca *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* ukaże się dopiero w roku 1933. Sławę przyniesie mu jej rozszerzona wersja w języku niemieckim (1936). Dzięki tej pracy i kontaktom z Kołem Wiedeńskim Tarski zyskuje pozycję międzynarodową.

W sierpniu 1939 roku wypływa na konferencję do USA, podczas rejsu spotkał na statku Ulama. Początkowo Tarski wykłada na Harvardzie, a także w nowojorskim City College. Od roku 1942 w Berkeley. W roku 1945 przyjął obywatelstwo amerykańskie. Cudem ocalałą rodzinę udało mu się w roku 1946 sprowadzić do Stanów. Jego zięciem jest logik Andrzej Ehrenfeucht. Jego doktorantami byli m.in. Andrzej Mostowski (1913 - 1975) (jeszcze w okresie warszawskim), Solomon Feferman i Julia Robinson (1919 - 1985). Wymieniany czasem jako jeden z czterech najwybitniejszych logików wszystkich czasów (obok Arystotelesa, Fregego i Gödla). W Berkeley należał przez jakiś czas do bliskich znajomych Czesława Miłosza.

39.5 Spojrzenie zza oceanu

Gdy spoglądamy na dorobek matematyków polskich, wydaje się, że już ok. roku 1925 Polska powinna być dostrzegana jako istotny gracz na europejskiej scenie matematycznej. Ale tak nie było. Mamy interesujący dokument pokazujący, że wybitny — w owym czasie chyba wręcz najwybitniejszy — matematyk amerykański Polski wciąż nie zauważa.⁴

W roku 1926 David Birkhoff przygotował na zlecenie Fundacji Rockefellera zestawienie najważniejszych ośrodków matematyki europejskiej. Próbował nawet nadać każdemu z krajów punktację opierając się na liczbie wybitnych matematyków pracujących w danym kraju. Oto jego punktacja:

1.	Niemcy	19
2.	Włochy	11
3.	Francja	9
4.	Anglia	7
5.	Szwecja	4
6.-7.	Niderlandy	3
6.-7.	Szwajcaria	3

Pod koniec XIX w. matematycy francuscy wyrażali obawy, że swoją drugą pozycję (oczywiście po Niemczech) tracą na rzecz Włoch. Jak widać ćwierć wieku później Birkhoff te obawy podzielał.

⁴R. Siegmund-Schultze, *Rockefeller and the Internationalization of Mathematics Between the Two World Wars*, s. 51 i s. 288-301.

Polskiemu czytelnikowi rzuca się w oczy brak Polski. Zapewne 10 lat później trudno byłoby Polskę przeoczyć, ale w roku 1926 wybitna pozycja naszej matematyki nie była jeszcze widoczna. Birkhoff pomija też Związek Radziecki, prawdopodobnie zakładał, że ze względu na zawirowania polityczne program stypendialny Fundacji Rockefellera tego kraju nie obejmie.

Ostatecznie jednak Fundacja Rockefellera i Polskę i ZSRR w swoim programie uwzględniła i oceniła dość wysoko. Na 130 stypendiów przyznanych matematykom do roku 1945 z Niemiec pochodziło 22 stypendystów, z USA 19, z Francji 16, z Polski 10 (Banach 1924/25, Witold Hurewicz 1927/28, Szolem Mandelbrojt 1924/26, Sława-Neyman 1926/27, Władysław Nikliborc 1930/31, Saks 1931/32, Schauder 1932/33, Piotr Szymański 1928/29, Tarski 1935, Zygmund 1929/30), z Wlk. Brytanii 9, z ZSRR 8, z Niderlandów i Węgier po 5, z Czechosłowacji i Szwajcarii po 4, z Austrii i Rumunii po 3, z Argentyny, Danii, Finlandii, Grecji, Jugosławii, Meksyku, Norwegii, Urugwaju i Włoch po 2, z Chile i Japonii po jednym.

Pośród tych dziesięciu polskich matematyków dwu jest mało znanych. Władysław Nikliborc (1899 - 1948) to doktorant Steinhausa, przed wojną pracował na Politechnice Lwowskiej. Piotr Szymański (1900 - 1965) doktoryzował się pod kierunkiem Mazurkiewicza. Większą część kariery zawodowej spędził na Politechnice Warszawskiej. Przez krótki czas, w latach 1945-1949, pracował w dyplomacji.

Birkhoff próbuje też zaproponować podobny ranking uwzględniający USA: Niemcy 37 pkt, USA 26 pkt, Francja i Włochy po 22 pkt, Anglia 14 pkt. Uczciwie zaznacza, że nikt w Europie amerykańskiej matematyki tak wysoko nie oceni; da jej co najwyżej 15 punktów.

Ciekawa jest też jego ocena punktowa czołowych ośrodków w Europie: Paryż 20 pkt, Rzym 12 pkt, Getynga 11 pkt. Konsekwentnie Moskwy nie zauważa, ale zaskakuje relatywnie niska pozycja Getyngi.