

FUNKCJE ZESPOLONE

Jolanta Długosz

FUNKCJE ZESPOLONE

Teoria, przykłady, zadania

Wydanie szóste zmienione



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2013

Jolanta Długosz
Instytut Matematyki i Informatyki
Politechnika Wrocławska
jolanta.dlugosz@pwr.wroc.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 2001 – 2013 by Jolanta Długosz

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Printed in Poland

Skład wykonano w systemie L^AT_EX.

ISBN 978-83-62780-16-7

Wydanie VI zmienione, Wrocław 2013.
Oficina Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Oficyna Wydawnicza ATUT

Spis treści

Wstęp	7
1 Liczby zespolone	9
1.1 Pojęcia wstępne	9
1.2 Postać trygonometryczna i wykładnicza	16
1.3 Pierwiastkowanie liczb zespolonych	20
1.4 Zbiory na płaszczyźnie zespolonej	23
1.5 Granice ciągów zespolonych	25
Zadania	28
2 Funkcje zespolone	29
2.1 Podstawowe pojęcia	29
2.2 Funkcje wykładnicza i trygonometryczne	31
2.3 Logarytm i funkcja logarytmiczna	36
2.4 Odwzorowania zbiorów na płaszczyźnie zespolonej	38
2.5 Granice i ciągłość funkcji zespolonych	44
Zadania	46
3 Funkcje holomorficzne	48
3.1 Pochodna funkcji zespolonej zmiennej zespolonej	48
3.2 Równania Cauchy'ego–Riemanna	49
3.3 Funkcje holomorficzne i harmoniczne	52
3.4 Interpretacje funkcji holomorficznej. Potencjał zespolony	54
Zadania	58
4 Całki funkcji zespolonych	59
4.1 Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej	59
4.2 Krzywe na płaszczyźnie zespolonej	61
4.3 Całka krzywoliniowa funkcji zespolonej zmiennej zespolonej	67
4.4 Twierdzenie całkowite Cauchy'ego	74
4.5 Wzór całkowity Cauchy'ego	76
Zadania	80

5 Szeregi zespolone	83
5.1 Szeregi liczbowe	83
5.2 Szeregi potęgowe	87
5.3 Szeregi Taylora	90
5.4 Punkty zerowe funkcji holomorficznej	93
Zadania	95
6 Punkty osobliwe i residua	97
6.1 Szeregi Laurenta	97
6.2 Punkty osobliwe	104
6.3 Residua	107
6.4 Zastosowanie residuów do obliczania całek	110
Zadania	116
7 Przekształcenie Laplace’a	119
7.1 Definicja przekształcenia Laplace’a	119
7.2 Własności przekształcenia Laplace’a	122
7.3 Odwrotne przekształcenie Laplace’a	130
7.4 Metody wyznaczania oryginałów	131
7.5 Metoda operatorowa	137
7.6 Splot funkcji	143
7.7 Transmitancja	145
Zadania	147
8 Przekształcenie $\mathcal{Z}$	150
8.1 Definicja przekształcenia $\mathcal{Z}$	150
8.2 Własności przekształcenia $\mathcal{Z}$	151
8.3 Przekształcenie odwrotne i metody jego wyznaczania	155
8.4 Zastosowanie do rozwiązywania równań różnicowych	160
Zadania	163
Odpowiedzi	165
Dodatek	182
Literatura	185
Skorowidz	186

Wstęp

Niniejszy podręcznik jest przeznaczony dla studentów politechnik. Mogą z niego korzystać także studenci wydziałów fizyki i matematyki uniwersytetów. W książce omówiono funkcje zespolone oraz ich zastosowania.

Podręcznik składa się z ośmiu rozdziałów. W rozdziale pierwszym przypominano podstawowe wiadomości o liczbach zespolonych i zbiorach na płaszczyźnie zespolonej. W rozdziale drugim wprowadzono funkcje zespolone oraz omówiono granice i ciągłość takich funkcji. W następnym rozdziale wprowadzono pochodne funkcji zespolonej i omówiono ich własności. Kolejny rozdział poświęcony jest całce funkcji zespolonej i jej własnościom. Rozdział piąty zawiera wprowadzenie do szeregów zespolonych. W rozdziale szóstym omówiono szeregi Laurenta oraz wprowadzono residua i pokazano ich zastosowanie do obliczania całek. W rozdziale przedostatnim i ostatnim omówiono odpowiednio przekształcenie Laplace'a i przekształcenie $\mathcal{Z}$ oraz ich zastosowania do rozwiązywania równań różniczkowych i różnicowych.

W książce materiał teoretyczny jest ilustrowany odpowiednio dobranymi przykładami. Pomagają one lepiej zrozumieć wprowadzane pojęcia i formułowane twierdzenia. Przykłady mogą służyć także jako wzorzec przy samodzielnym rozwiązywaniu zadań umieszczonych na końcu rozdziałów. Dodatkowo każdy podrozdział jest zakończony ćwiczeniami, których przerabianie na bieżąco utrwala materiał. Do wszystkich ćwiczeń i zadań podane są odpowiedzi lub wskazówki.

W obecnym wydaniu zmieniono układ i zakres materiału. W szczególności dodano rozdział o przekształceniu $\mathcal{Z}$. Dołączono także nowe przykłady, ćwiczenia i zadania oraz rysunki. Ponadto poprawiono zauważone błędy i usterki.

Jolanta Długosz

1

Liczby zespolone

W podręczniku symbole x, y, t zawsze oznaczają liczby rzeczywiste, a symbole $u(x, y), v(x, y), x(t), y(t)$ – funkcje rzeczywiste zmiennych rzeczywistych.

1.1 Pojęcia wstępne

Dla wygody Czytelników przypominamy wiadomości o liczbach zespolonych wykorzystywane w podręczniku.

Każda liczba zespolona z ma postać

$$z = x + iy,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, a i jest jednostką urojoną. Ten sposób przedstawiania liczb zespolonych nazywamy postacią algebraiczną. Liczby x i y nazywamy odpowiednio częścią rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej z , co zapisujemy $\operatorname{Re} z = x, \operatorname{Im} z = y$.

Definicja 1.1. (*sprzężenie liczby zespolonej*)

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę

$$\bar{z} = x - iy.$$

Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb zespolonych definiujemy tak, aby działania te na liczbach rzeczywistych były szczególnym przypadkiem działań na liczbach zespolonych i by zachować ich własności (przemienność oraz łączność dodawania i mnożenia, rozdzielność mnożenia względem dodawania). Pamiętajmy przy tym, że $i^2 = -1$. Aby wynik dzielenia przez liczbę z zapisać w postaci algebraicznej mnożymy dzielnię i dzielnik przez $\bar{z}$. Zbiór liczb zespolonych oznaczamy tradycyjnie przez $\mathbb{C}$.

Przykład 1.1. Wykonać działania na liczbach zespolonych:

$$(a) (1 + 2i)(3 - 2i); \quad (b) (-2 + \sqrt{3}i)^3; \quad (c) \frac{3 - i}{2 + i}; \quad (d) \frac{(5 + i)(-1 + 2i)}{(2 + i)^2}.$$

Rozwiązanie.

(a) Mamy

$$(1+2i)(3-2i) = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2i + 2i \cdot 3 - 2i \cdot 2i = 3 - 2i + 6i + 4 = 7 + 4i$$

(b) Korzystając ze wzoru $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, otrzymamy

$$\begin{aligned} (-2 + \sqrt{3}i)^3 &= (-2)^3 + 3(-2)^2\sqrt{3}i + 3(-2)(\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3 \\ &= -8 + 12\sqrt{3}i + 18 - 3\sqrt{3}i = 10 + 9\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

(c) Mnożąc licznik i mianownik przez sprzężenie mianownika, otrzymamy

$$\frac{3-i}{2+i} = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i-2i-1}{5} = \frac{5-5i}{5} = 1-i.$$

(d) Wykonamy najpierw działania w liczniku i w mianowniku, a następnie dzielenie jak w poprzednim przykładzie. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{(5+i)(-1+2i)}{(2+i)^2} &= \frac{-5 \cdot 1 + 5 \cdot 2i - i \cdot 1 + 2i^2}{2^2 + 2 \cdot 2i + i^2} \\ &= \frac{-5 + 10i - i - 2}{4 + 4i - 1} \\ &= \frac{-7 + 9i}{3 + 4i} = \frac{(-7+9i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{-7 \cdot 3 + 7 \cdot 4i + 9i \cdot 3 - 9i \cdot 4i}{3^2 - (4i)^2} = \frac{3}{5} + \frac{11}{5}i. \end{aligned}$$

Przykład 1.2. Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć:

(a) $\operatorname{Re}(iz^2)$; (b) $\operatorname{Im} \frac{1}{z-1}$.

Rozwiązanie.

(a) Mamy

$$iz^2 = i(x+iy)^2 = i(x^2 + 2ixy - y^2) = -2xy + i(x^2 - y^2).$$

Zatem $\operatorname{Re}(iz^2) = -2xy$.(b) Dla $z \neq 1$ mamy

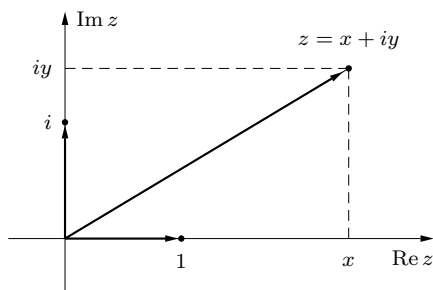
$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{x+iy-1} = \frac{x-1-iy}{(x+iy-1)(x-1-iy)} = \frac{x-1-iy}{(x-1)^2 - (iy)^2} = \frac{x-1-iy}{(x-1)^2 + y^2}.$$

Zatem $\operatorname{Im} \frac{1}{z-1} = \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}.$

Definicja 1.2. (płaszczyzna zespolona, płaszczyzna Gaussa¹)

Liczbę zespoloną $x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, przedstawiamy na płaszczyźnie w postaci punktu o współrzędnych (x, y) lub wektora o początku $(0, 0)$ i końcu (x, y) . Płaszczyznę, której punktom przyporządkowano liczby zespolone, nazywamy płaszczyzną zespoloną. W tej interpretacji oś Ox nazywamy osią rzeczywistą, a oś Oy osią urojoną i oznaczamy odpowiednio przez $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$. Zbiór złożony z płaszczyzny zespolonej i punktu ∞ nazywamy płaszczyzną Gaussa.

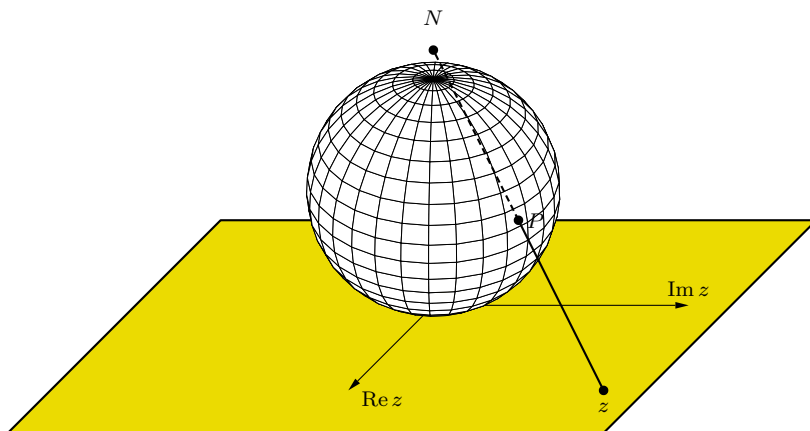
¹Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matematyk niemiecki.



Rys. 1.1. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

Uwaga. Płaszczyznę Gaussa można utożsamić ze sferą. Wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie sfery na płaszczyznę Gaussa można określić następująco:

Rozważmy sferę styczną do płaszczyzny zespolonej w punkcie $z = 0$. Prosta prostopadła do płaszczyzny zespolonej w punkcie styczności przecina sferę jeszcze w jednym punkcie – nazwijmy go N . Przyporządkujemy punktowi P sfery punkt z płaszczyzny zespolonej, w którym przecina ją prosta NP . Im bliżej punktu N znajduje się punkt P , tym dalej od punktu $z = 0$ jest jego obraz na płaszczyźnie zespolonej. W teorii funkcji zespolonych praktyczne okazało się dołączenie do płaszczyzny zespolonej punktu ∞ , który przyporządkujemy punktowi N na sferze. Opisane tu odwzorowanie sfery na płaszczyznę Gaussa nazywa się *rzutem stereograficznym*.



Rys. 1.2. Rzut stereograficzny

Przykład 1.3. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiór liczb zespolonych spełniających warunek $\operatorname{Re} \frac{1}{z} \leq 1$.

Rozwiązanie. Dla $z = x + iy \neq 0$ mamy

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \operatorname{Re} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

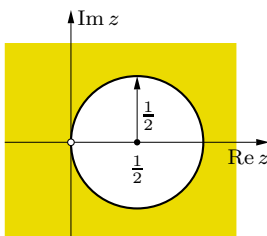
Po pomnożeniu obu stron ostatniej nierówności przez $x^2 + y^2 > 0$ otrzymamy

$$x \leq x^2 + y^2.$$

Stąd po prostych przekształceniach mamy nierówność równoważną

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2.$$

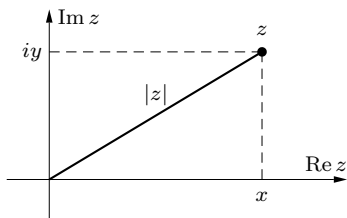
Zatem szukany zbiór to zewnętrzne koła o środku $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ i promieniu $\frac{1}{2}$ wraz z brzegiem, ale bez punktu O .



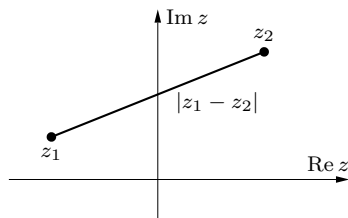
Definicja 1.3. (moduł liczby zespolonej)

Modulem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę rzeczywistą

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Rys. 1.3. Moduł liczby zespolonej



Rys. 1.4. Moduł różnicy liczb zespolonych

Uwaga. Moduł różnicy liczb zespolonych z_1, z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1, z_2 płaszczyzny zespolonej.

Fakt 1.1. (własności modułu)

Niech z, z_1, z_2 będą dowolnymi liczbami zespolonymi, a n dowolną liczbą naturalną. Wtedy:

(F1) $|z| \geq 0$ oraz $|z| = 0 \iff z = 0$;

(F2) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$;

(F3) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$;

(F4) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, wzór ten jest prawdziwy dla dowolnej liczby czynników, w szczególności mamy $|z^n| = |z|^n$;

$$(F5) \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \text{ o ile } z_2 \neq 0;$$

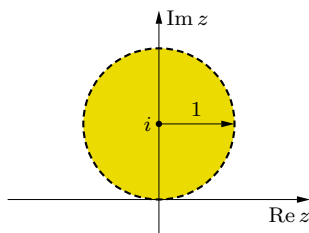
$$(F6) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Przykład 1.4. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

$$(a) \quad |z - i| < 1; \quad (b) \quad 1 < |z + 2 - i| \leq 2; \quad (c) \quad |iz - 2| \geq 1.$$

Rozwiązanie. Wykorzystamy interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych.

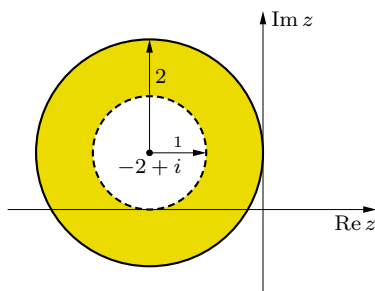
(a) Szukany zbiór składa się z tych liczb zespolonych, których odległość na płaszczyźnie zespolonej od punktu i jest mniejsza niż 1. Zatem zbiór ten jest wnętrzem koła o środku w punkcie i i promieniu 1.



(b) Ponieważ

$$1 < |z + 2 - i| \leq 2 \iff 1 < |z - (-2 + i)| \leq 2,$$

więc szukany zbiór składa się z tych liczb zespolonych, których odległość na płaszczyźnie zespolonej od punktu $-2 + i$ jest większa niż 1, ale nie większa niż 2. Zatem zbiór ten jest pierścieniem o środku $-2 + i$ oraz promieniu wewnętrznym 1 i zewnętrznym 2, przy czym okrąg o promieniu 1 nie należy do tego pierścienia, a okrąg o promieniu 2 należy do niego.



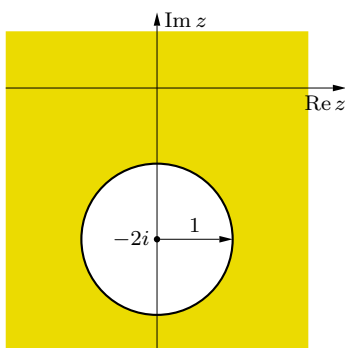
(c) Ponieważ

$$|iz - 2| = \left| i \left(z - \frac{2}{i} \right) \right| = |i| \left| z + 2i \right| = |i| |z + 2i| = |z + 2i|,$$

więc mamy

$$|iz - 2| \geq 1 \iff |z - (-2i)| \geq 1.$$

Zatem szukany zbiór składa się z tych liczb na płaszczyźnie zespolonej, które są oddalone od punktu $-2i$ nie mniej niż 1.

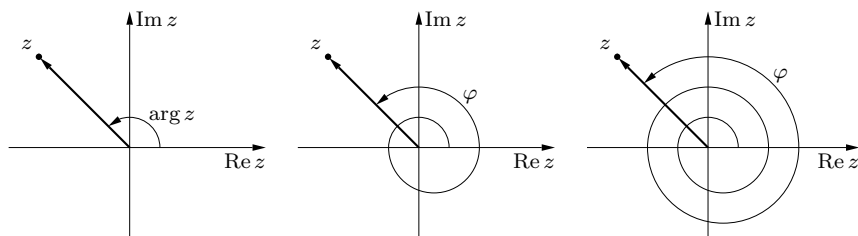
**Definicja 1.4.** (*argument liczby zespolonej*)

Argumentem liczby zespolonej $z = x + iy \neq 0$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy każdą liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniającą układ równań:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|}. \end{cases}$$

Przyjmujemy, że argumentem liczby 0 jest dowolna liczba $\varphi \in \mathbb{R}$. Zbiór wszystkich argumentów liczby z oznaczamy przez $\text{Arg } z$. Argumentem głównym liczby $z \neq 0$ nazywamy ten jej argument φ , który spełnia warunek: $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Przyjmujemy, że argument główny liczby 0 jest równy 0. Argument główny liczby z oznaczamy przez $\arg z$.

Uwaga. Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy miarę φ kąta zorientowanego, utworzonego przez dodatnią część osi rzeczywistej $\text{Re } z$ oraz promień wodzący liczby z , przy czym $-\pi < \varphi \leq \pi$.



Rys. 1.5. Argumenty liczby zespolonej

Fakt 1.2. (*własności argumentu*)

Niech $z \neq 0$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Wtedy:

(F1) $\arg \bar{z} = -\arg z$, gdy $\arg z \neq \pi$ oraz $\arg \bar{z} = \pi$, gdy $\arg z = \pi$;

(F2) $\arg(-z) = \arg z + \pi$, gdy $-\pi < \arg z \leq 0$, $\arg(-z) = \arg z - \pi$, gdy $0 < \arg z \leq \pi$;

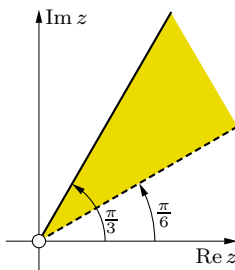
(F3) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$, gdy $\arg z \neq \pi$ oraz $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \pi$, gdy $\arg z = \pi$.

Przykład 1.5. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

$$(a) \frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{\pi}{3}; \quad (b) 0 \leq \arg(z + 2 - i) \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Rozwiązanie. Wykorzystamy interpretację geometryczną argumentu głównej liczby zespolonej.

(a) Zbiór spełniający podane w przykładzie warunki składa się z liczb zespolonych, których argumenty główne zawarte są w przedziale $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. Jest to obszar kątowy ograniczony półprostymi wychodzącymi z początku układu współrzędnych i tworzącymi kąty $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{3}$ z dodatnią częścią osi Re z. Pierwsza z półprostych nie należy do tego zbioru. Nie należy do niego też początek układu współrzędnych, gdyż $\arg 0 = 0$.



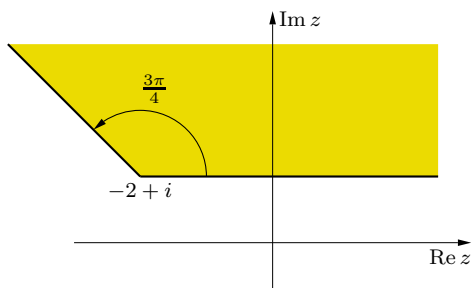
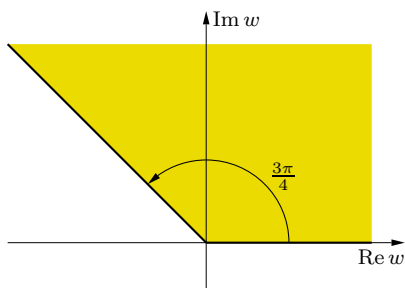
(b) Podstawmy $w = z + 2 - i$. Wtedy zbiór spełniający warunki

$$0 \leq \arg w \leq \frac{3\pi}{4}$$

składa się z liczb zespolonych, których argumenty główne zawarte są w przedziale $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$. Jest to obszar kątowy zawarty między dodatnią półosią $\text{Re } w$, a półprostą wychodzącą z początku układu współrzędnych i tworzącą z nią kąt $\frac{3\pi}{4}$ (rysunek). Ponieważ $z = w - 2 + i$, więc zbiór spełniający warunki

$$0 \leq \arg(z + 2 - i) \leq \frac{3\pi}{4}$$

jest określonym powyżej obszarem kątowym przesuniętym o wektor $z_0 = -2 + i$ (rysunek).



Ćwiczenia (odp. str. 165)

1. Obliczyć wartości wyrażeń:

- (a) $(1 - 2i) + (3 + i)$; (b) $(\sqrt{2} - i) - (2\sqrt{2} + i)$; (c) $(2 + i)(-4 - 3i)$;
 (d) $\frac{5 - i}{1 + 2i}$; (e) $(2 - i)^2$; (f) $(3 - 2i)^3$.

2. Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Znaleźć:

- (a) $\operatorname{Re} \frac{1}{z}$; (b) $\operatorname{Im} \frac{\bar{z}}{z+1}$; (c) $\operatorname{Re} \frac{2z}{z-i}$; (d) $\operatorname{Im} \frac{iz^2}{\bar{z}}$.

3. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory określone warunkami:

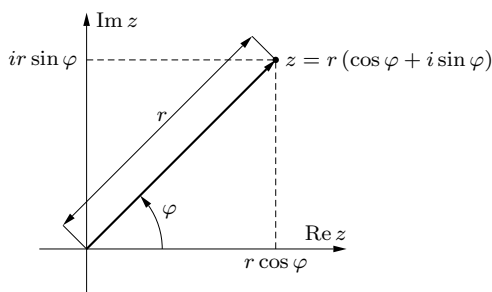
- (a) $|z - 2i| = 1$; (b) $2 \leq |z + 3 - i| \leq 3$; (c) $|(1 + i)z - 2| < 2$;
 (d) $|z - 2i| = \operatorname{Im} z$; (e) $|z + i| = |z - 2|$; (f) $|\bar{z} - i| \leq |z - 2|$.

4. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory określone warunkami:

- (a) $\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$; (b) $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z - 2 + 3i) < \frac{5\pi}{6}$;
 (c) $\arg(-z) = \frac{\pi}{6}$; (d) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg \bar{z} \leq \frac{\pi}{4}$.

1.2 Postać trygonometryczna i wykładniczaPrzypomnijmy, że każdą liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie r jest jej modulem, a φ argumentem. Ten sposób przedstawiania liczb zespolonych nazywamy postacią trygonometryczną.

Rys. 1.6. Interpretacja geometryczna postaci trygonometrycznej liczby zespolonej

Uwaga. Liczby zespolone różne od 0, przedstawione w postaci trygonometrycznej, są równe, jeżeli ich moduły są równe, a argumenty różnią się o całkowitą wielokrotność liczby 2π .

Fakt 1.3. (mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej)

Niech $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ będą liczbami zespolonymi w postaci trygonometrycznej oraz niech n będzie liczbą naturalną. Wtedy:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]; \quad (1.1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \text{ o ile } z_2 \neq 0; \quad (1.2)$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad - \text{ wzór de Moivre'a}^2.$$

Inaczej mówiąc, przy mnożeniu liczb zespolonych ich moduły mnożymy, a argumenty dodajemy. Podobnie, przy dzieleniu liczb zespolonych ich moduły dzielimy, a argumenty odejmujemy. W szczególności dla argumentów głównych mamy:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi \text{ dla pewnego } k \in \{-1, 0, 1\};$$

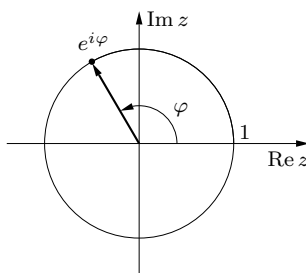
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi \text{ dla pewnego } k \in \{-1, 0, 1\}.$$

Jak pamiętamy, jeszcze inną formą przedstawiania liczb zespolonych jest tzw. postać wykładnicza:

$$z = r e^{i\varphi},$$

gdzie r jest modulem, a φ argumentem liczby z . Jest ona oparta na wzorze Eulera

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$



Rys. 1.7. Interpretacja geometryczna $e^{i\varphi}$

Fakt 1.4. (mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci wykładniczej)

Niech $z = r e^{i\varphi}$, $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej oraz niech n będzie liczbą naturalną. Wtedy:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \text{ o ile } r_2 \neq 0;$$

²Abraham de Moivre (1667-1754), matematyk angielski pochodzenia francuskiego.

$$z^n = r^n e^{in\varphi} \text{ dla } n \in \mathbb{N} \text{ — wzór de Moivre'a.}$$

Uwaga. Z powyższego faktu wynika, że wyrażenie $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ zachowuje podstawowe własności funkcji wykładniczej.

Przykład 1.6. Obliczyć wyrażenia: (a) $(2 - 2\sqrt{3}i)^5 (-1 + i)^{10}$; (b) $\frac{(1+i)^{14}}{(-1+\sqrt{3}i)^{12}}$.

Rozwiązanie.

(a) Mamy $|2 - 2\sqrt{3}i| = 4$ oraz $\arg(2 - 2\sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{3}$. Tak więc wobec wzoru de Moivre'a otrzymamy

$$(2 - 2\sqrt{3}i)^5 = 4^5 \left[\cos \left(5 \cdot \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) + i \sin \left(5 \cdot \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \right] = 4^5 \left(\cos \left(-\frac{5}{3}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{5}{3}\pi \right) \right).$$

Podobnie dla $-1 + i$ mamy $|-1 + i| = \sqrt{2}$, $\arg(-1 + i) = \frac{3}{4}\pi$ oraz

$$(-1 + i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} \left(\cos \left(10 \cdot \frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(10 \cdot \frac{3}{4}\pi \right) \right) = 2^5 \left(\cos \frac{15}{2}\pi + i \sin \frac{15}{2}\pi \right).$$

Zatem wobec wzoru (1.1), otrzymamy

$$\begin{aligned} (2 - 2\sqrt{3}i)^5 (-1 + i)^{10} &= 4^5 \left(\cos \left(-\frac{5}{3}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{5}{3}\pi \right) \right) 2^5 \left(\cos \frac{15}{2}\pi + i \sin \frac{15}{2}\pi \right) \\ &= 2^{15} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= 2^{15} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= 2^{15} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = 2^{15} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2^{14} (\sqrt{3} - i). \end{aligned}$$

(b) Ponieważ $|1 + i| = \sqrt{2}$ oraz $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$, więc wobec wzoru de Moivre'a mamy

$$(1 + i)^{14} = (\sqrt{2})^{14} \left(\cos \left(14 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(14 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) = 2^7 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2^7 i.$$

Analogicznie $|-1 + \sqrt{3}i| = 2$, $\arg(-1 + \sqrt{3}i) = \frac{2}{3}\pi$, więc

$$(-1 + \sqrt{3}i)^{12} = 2^{12} \left(\cos \left(12 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(12 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) \right) = 2^{12} (\cos 8\pi + i \sin 8\pi) = 2^{12}.$$

Zatem

$$\frac{(1+i)^{14}}{(-1+\sqrt{3}i)^{12}} = -\frac{2^7 i}{2^{12}} = -\frac{i}{2^5} = -\frac{i}{32}.$$

Przykład 1.7. Na płaszczyźnie zespolonej zaznaczyć liczby:

(a) i ; (b) -1 ; (c) $2 + 2i$; (d) $-4i$.

Następnie, posługując się rysunkiem oraz interpretacją geometryczną liczby $re^{i\varphi}$, przedstawić zaznaczone liczby w postaci wykładniczej.

Rozwiązanie. Modułem liczby zespolonej z danej w postaci wykładniczej $re^{i\varphi}$ jest r , a argumentem φ . W interpretacji geometrycznej r jest odległością na płaszczyźnie zespolonej liczby z od O , a φ jest wyrażoną w radianach miarą kąta zorientowanego utworzonego przez dodatnią półoś rzeczywistą i wektor wodzący z .

(a) Liczba i znajduje się w odległości 1 od O , a jej wektor wodzący tworzy z dodatnią półosią osi rzeczywistej kąt o mierze $\frac{\pi}{2}$ (rysunek). Zatem

$$i = e^{\frac{\pi}{2}i}.$$

(b) Liczba -1 znajduje się w odległości 1 od O , a miara kąta φ wynosi π (rysunek). Zatem

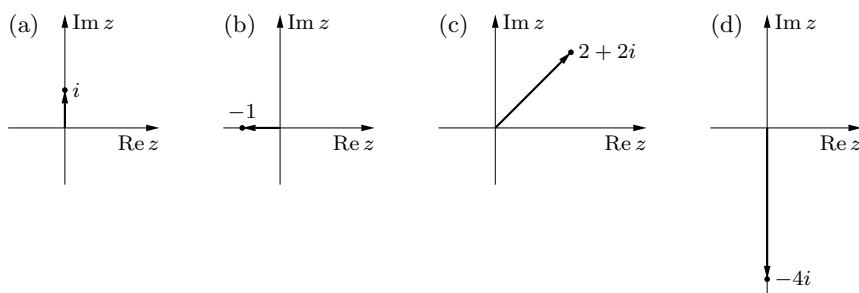
$$-1 = e^{\pi i}.$$

(c) Liczba $2 + 2i$ znajduje się w odległości $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ od O , a miara kąta φ wynosi $\frac{\pi}{4}$ (rysunek). Zatem

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

(d) Liczba $-4i$ znajduje się w odległości 4 od O , a miara kąta φ wynosi $-\frac{\pi}{2}$ (rysunek). Zatem

$$-4i = 4e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$



Ćwiczenia (odp. str. 166)

1. Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

(a) i ; (b) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$; (c) $3 + 3\sqrt{3}i$; (d) $-\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$; (e) -10 .

2. Korzystając ze wzoru de Moivre'a, obliczyć wyrażenia:

(a) $(1 - \sqrt{3}i)^4$; (b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}$; (c) $\frac{(1-i)^7}{(1+i)^5}$; (d) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$.

Wynik podać w postaci algebraicznej.

3. Podane liczby przedstawić w postaci algebraicznej i zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej:

(a) $e^{\frac{\pi}{2}i}$; (b) $e^{\pi i}$; (c) $e^{-\frac{2}{3}\pi i}$; (d) e^{2i} .

4. Podane liczby zapisać w postaci wykładniczej:

- (a) $-2i$; (b) $1 + i$; (c) -4 ; (d) $3 - 3\sqrt{3}i$.

1.3 Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Definicja 1.5. (*pierwiastek z liczby zespolonej*)

Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w taką, że

$$w^n = z.$$

Zbiór wszystkich pierwiastków stopnia n z liczby z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

Fakt 1.5. (*wzór na pierwiastki z liczby zespolonej*)

Niech $z \neq 0$ i niech $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ będzie przedstawieniem liczby z w postaci trygonometrycznej. Wtedy dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}, \quad (1.3)$$

gdzie

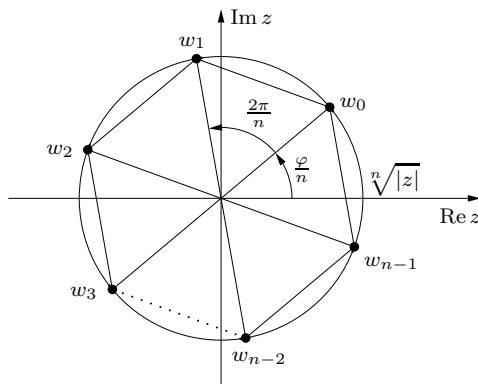
$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.4)$$

Uwaga. Niech $z \neq 0$ i niech $z = re^{i\varphi}$ będzie przedstawieniem liczby z w postaci wykładniczej. Wtedy

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}} = w_0 \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Interpretacja geometryczna zbioru pierwiastków

Dla $n \geq 3$ pierwiastki n -tego stopnia z liczby z tworzą wierzchołki n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $\sqrt[n]{r}$.



Rys. 1.8. Interpretacja geometryczna zbioru pierwiastków z liczby zespolonej

Przykład 1.8. Obliczyć pierwiastki: (a) $\sqrt[6]{-1}$; (b) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$.

Wynik przedstawić w postaci algebraicznej i wykładniczej.

Rozwiązanie.

(a) *I sposób.* Ponieważ $|z| = |-1| = 1$ oraz $\varphi = \arg(-1) = \pi$, więc korzystając ze wzorów (1.3) i (1.4), otrzymamy

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{-1} &= \left\{ \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 5 \right\} \\ &= \left\{ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}, \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}, \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}, \right. \\ &\quad \left. \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}, \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}.\end{aligned}$$

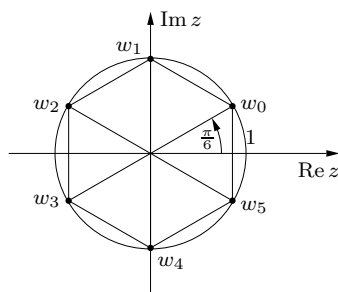
W postaci wykładniczej mamy

$$\sqrt[6]{-1} = \left\{ e^{\frac{\pi}{6}i}, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\frac{5\pi}{6}i}, e^{\frac{7\pi}{6}i}, e^{\frac{3\pi}{2}i}, e^{\frac{11\pi}{6}i} \right\}.$$

II sposób. Ponieważ $|z| = |-1| = 1$ oraz $\varphi = \arg(-1) = \pi$, więc korzystając ze wzoru (1.4) dla $k = 0$, mamy

$$w_0 = \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Pozostałe wartości możemy odczytać z rysunku, korzystając z interpretacji geometrycznej zbioru pierwiastków z liczby zespolonej. Jak wiadomo, zbiór pierwiastków stopnia $n \geq 3$ z liczby zespolonej z pokrywa się ze zbiorem wierzchołków n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{r}$ i środku w początku układu współrzędnych.



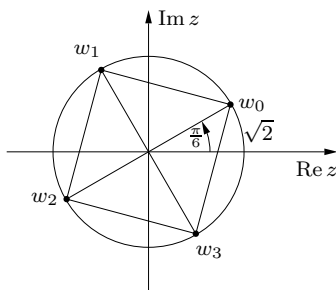
Mamy $w_1 = i$, $w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ (bo $\operatorname{Re} w_2 = -\operatorname{Re} w_0$, $\operatorname{Im} w_2 = \operatorname{Im} w_0$), $w_3 = -w_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $w_4 = -i$, $w_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Jeszcze łatwiej odczytać z rysunku postać wykładniczą tych liczb.

(b) Obliczamy $|-2+2\sqrt{3}i| = 4$ oraz $\arg(-2+2\sqrt{3}i) = \frac{2}{3}\pi$. Zatem korzystając ze wzoru

(1.4) dla $k = 0$, otrzymamy

$$w_0 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Pozostałe liczby odczytamy z rysunku, wiedząc, że leżą w wierzchołkach kwadratu.



Ponieważ $\operatorname{Re} w_1 = -\operatorname{Im} w_0$, $\operatorname{Im} w_1 = \operatorname{Re} w_0$, więc $w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$, a ponadto $w_2 = -w_0 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $w_3 = -w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$. Również, korzystając z rysunku oraz interpretacji geometrycznej postaci wykładniczej liczby zespolonej, mamy

$$\sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}i} = \left\{ \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}, \sqrt{2}e^{\frac{2}{3}\pi i}, \sqrt{2}e^{\frac{7}{6}\pi i}, \sqrt{2}e^{\frac{5}{3}\pi i} \right\}.$$

Przykład 1.9. Rozwiązać równania:

(a) $z^2 + iz + 2 = 0$; (b) $z^3 + 3z^2 + 4z - 8 = 0$; (c) $z^3 - 2i = 0$.

Rozwiązanie.

(a) W rozwiązaniu wykorzystamy wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego $az^2 + bz + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$ oraz $a \neq 0$:

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

W tych wzorach δ jest jedną z liczb zespolonych spełniających warunek $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$. Dla równania kwadratowego $z^2 + iz + 2 = 0$ mamy $\Delta = i^2 - 8 = -9 = (3i)^2$. Zatem

$$z_1 = \frac{-i - 3i}{2} = -2i, \quad z_2 = \frac{-i + 3i}{2} = i.$$

(b) W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu. Jeżeli równanie $z^3 + 3z^2 + 4z - 8 = 0$ ma pierwiastek całkowity, to należy on do zbioru dzielników wyrazu wolnego -8 , tj. do zbioru $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$. Zauważmy, że $z_1 = 1$ rzeczywiście jest rozwiązaniem rozważanego równania. Tak więc z twierdzenia Bézout wynika, że wielomian $z^3 + 3z^2 + 4z - 8 = 0$ dzieli się (bez reszty) przez dwumian $z - 1$. Mamy

$$(z^3 + 3z^2 + 4z - 8) : (z - 1) = z^2 + 4z + 8.$$

Rozwiązaniami równania $z^2 + 4z + 8 = 0$, obliczonymi jak w przykładzie (a), są $z_2 = -2 + 2i$, $z_3 = -2 - 2i$. Zatem rozwiązaniami równania wyjściowego są $z_1 = 1$, $z_2 = -2 + 2i$, $z_3 = -2 - 2i$.

(c) Rozwiązanie równania $z^3 - 2i = 0$ jest równoważne z obliczeniem pierwiastka $\sqrt[3]{2i}$. W tym celu wykorzystamy wzory (1.3) i (1.4). Dla $z = 2i$ mamy $r = |z| = 2$ oraz $\varphi = \arg z = \frac{\pi}{2}$. Zatem

$$\sqrt[3]{2i} = \left\{ \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right), \text{ gdzie } k = 0, 1, 2 \right\}.$$

Stąd rozwiązaniami równania $z^3 - 2i = 0$ są

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right), \\ z_1 &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right), \\ z_2 &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -\sqrt[3]{2}i. \end{aligned}$$

Ćwiczenia (odp. str. 166)

1. Obliczyć pierwiastki z liczb zespolonych:

(a) $\sqrt[3]{-8}$; (b) $\sqrt[5]{-2-2i}$; (c) $\sqrt[12]{-3+3\sqrt{3}i}$; (d) $\sqrt[4]{16}$.

2. Rozwiązać równania:

(a) $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$; (b) $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$;
(c) $z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$; (d) $z^3 + i = 0$.

1.4 Zbiory na płaszczyźnie zespolonej

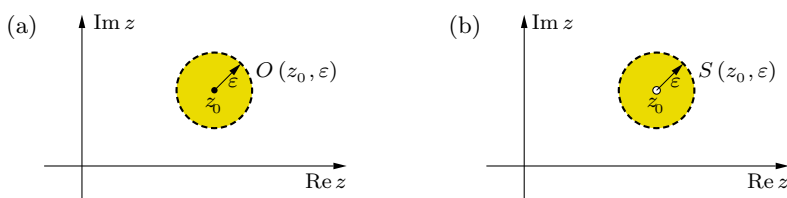
Definicja 1.6. (otoczenie i sąsiedztwo punktu)

Otoczeniem o promieniu $\varepsilon > 0$ punktu z_0 nazywamy zbiór:

$$O(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Sąsiedztwem o promieniu $\varepsilon > 0$ punktu z_0 nazywamy zbiór:

$$S(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}.$$



Rys. 1.9. (a) Otoczenie punktu; (b) Sąsiedztwo punktu

Definicja 1.7. (*zbiór otwarty, zbiór domknięty*)

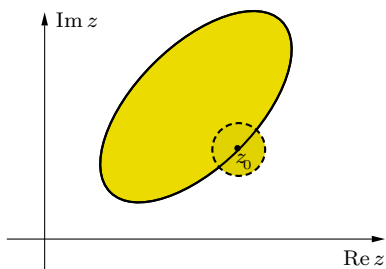
Zbiór nazywamy otwartym, jeśli każdy punkt tego zbioru należy do niego wraz z pewnym otoczeniem. Zbiór nazywamy domkniętym, jeśli jego dopełnienie jest zbiorem otwartym.

Definicja 1.8. (*punkt skupienia*)

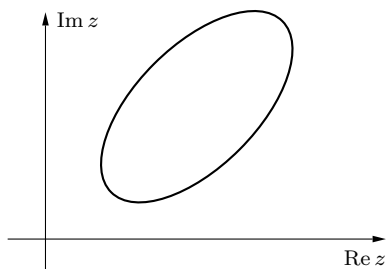
Punkt z_0 jest punktem skupienia zbioru, jeśli w każdym jego sąsiedztwie znajdują się punkty tego zbioru.

Definicja 1.9. (*punkt brzegowy, brzeg zbioru*)

Punkt z_0 jest punktem brzegowym zbioru, jeśli w każdym otoczeniu tego punktu znajdują się zarówno punkty należące do tego zbioru, jak i punkty nienależące do niego. Brzegiem zbioru nazywamy zbiór wszystkich jego punktów brzegowych.

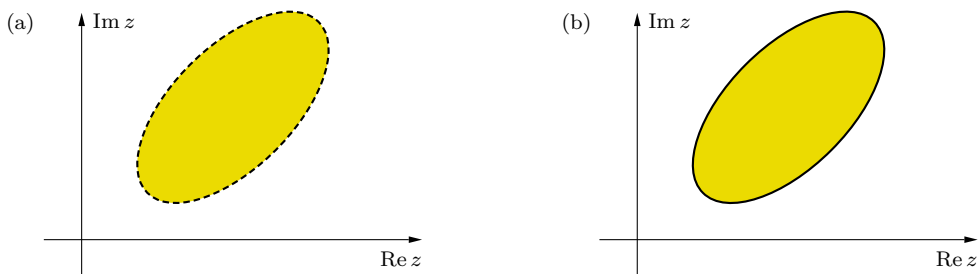


Rys. 1.10. Punkt brzegowy zbioru



Rys. 1.11. Brzeg zbioru

Uwaga. Inaczej mówiąc, zbiór jest otwarty, jeśli nie należy do niego żaden punkt jego brzegu. Zbiór jest domknięty, jeśli należą do niego wszystkie punkty jego brzegu.

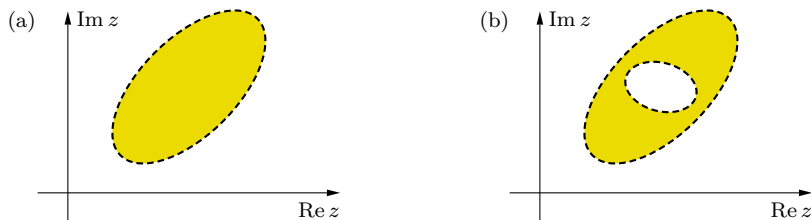


Rys. 1.12. Zbiór (a) otwarty; (b) domknięty

Definicja 1.10. (*obszar, obszar jednospójny*)

Zbiór nazywamy obszarem, jeśli jest otwarty i każde dwa jego punkty można połączyć łamaną całkowicie w nim zawartą. Obszar ograniczony nazywamy jednospójnym, jeśli jego brzegu nie da się przedstawić jako sumy dwóch niepustych, rozłącznych i domkniętych zbiorów.

Uwaga. Dla obszarów nieograniczonych jednorodność można zdefiniować tak samo, jeżeli potraktujemy je jako podzbiory płaszczyzny Gaussa (zobacz Definicja 1.2). Otoczeniami punktu ∞ są na niej zbiory postaci $\{z \in \mathbb{C} : |x| > R\} \cup \{\infty\}$, gdzie $R > 0$.



Rys. 1.13. Obszar (a) jednorodny; (b) niejednorodny

Ćwiczenia (odp. str. 166)

1. Zbadać, które z podanych zbiorów są otwarte, a które domknięte:

- (a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$; (b) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 2\}$;
 (c) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2, -\frac{\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{3}\}$; (d) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z \geq 2\}$;
 (e) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$; (f) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\} \cup \{0\}$.

2. Zbadać, które z podanych zbiorów są obszarami lub obszarami jednorodnymi:

- (a) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 2\}$; (b) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$;
 (c) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, -\frac{\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{4}\}$; (d) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z\}$;
 (e) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| > 1, |z| < 2\}$; (f) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1, |z| < 2\}$.

1.5 Granice ciągów zespolonych

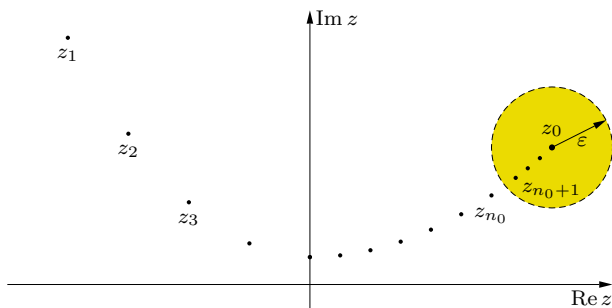
Definicja 1.11. (ciąg liczbowy)

Ciągiem zespolonym nazywamy odwzorowanie zbioru liczb naturalnych w zbiór liczb zespolonych. Wartość tego odwzorowania dla liczby naturalnej n nazywamy n -tym wyrazem ciągu i oznaczamy przez $z_n = x_n + iy_n$, gdzie $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Ciąg taki oznaczamy przez (z_n) . Z kolei zbiór wyrazów tego ciągu, tj. $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, będziemy zapisywać krótko $\{z_n\}$.

Definicja 1.12. (granica właściwa ciągu zespolonego)

Mówimy, że ciąg zespolony (z_n) ma granicę właściwą $z_0 \in \mathbb{C}$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \left[(n > n_0) \implies (|z_n - z_0| < \varepsilon) \right].$$



Rys. 1.14. Granica właściwa ciągu liczb zespolonych

Inaczej mówiąc, ciąg zespolony (z_n) jest zbieżny do punktu z_0 , jeśli w dowolnym otoczeniu punktu z_0 znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu.

Fakt 1.6. (zbieżność części rzeczywistej i urojonej ciągu zespolonego)

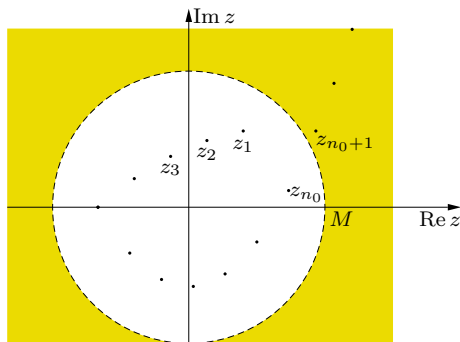
Ciąg zespolony $(z_n) = (x_n + iy_n)$, gdzie $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest zbieżny do punktu $z_0 = x_0 + iy_0$, gdzie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Definicja 1.13. (granica niewłaściwa ciągu zespolonego)

Ciąg zespolony (z_n) ma granicę niewłaściwą, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, gdy

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \left[(n > n_0) \implies (|z_n| > M) \right].$$



Rys. 1.15. Granica niewłaściwa ciągu liczb zespolonych

Fakt 1.7. (granica niewłaściwa ciągu a granica modułów wyrazów ciągu)

Ciąg zespolony (z_n) ma granicę niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jego modułów $(|z_n|)$ również ma granicę niewłaściwą.

Twierdzenie 1.1. (o arytmetyce granic ciągów)

Jeżeli ciągi zespolone (z_n) , (w_n) mają granice właściwe, to

$$\begin{aligned} \text{(T1)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \lim_{n \rightarrow \infty} w_n; \\ \text{(T2)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - w_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_n - \lim_{n \rightarrow \infty} w_n; \\ \text{(T3)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \right); \\ \text{(T4)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n}, \text{ o ile } \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \neq 0. \end{aligned}$$

Uwaga. Inaczej mówiąc, twierdzenia o arytmetyce granic znane dla ciągów rzeczywistych pozostają prawdziwe także dla ciągów zespolonych.

Przykład 1.10. Obliczyć granice właściwe lub niewłaściwe ciągów:

$$\text{(a)} \quad z_n = \frac{n^2(2+i) + n - i}{n^2}; \quad \text{(b)} \quad z_n = \frac{n(1-2i)}{2n+i}; \quad \text{(c)} \quad z_n = \frac{n^2-i}{n(i+1)}.$$

Rozwiązanie.

(a) Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(\frac{n^2(2+i) + n - i}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(\frac{2n^2 + n + (n^2 - 1)i}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left(\frac{n^2(2+i) + n - i}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left(\frac{2n^2 + n + (n^2 - 1)i}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = 1.$$

Zatem wobec Faktu (1.6), otrzymamy $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 2 + i$.

(b) Korzystając z twierdzenia o arytmetyce granic, otrzymamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1-2i)}{2n+i} \stackrel{:\frac{n}{n}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2i}{2+\frac{i}{n}} \stackrel{\substack{(\text{T4}) \\ (\text{T1})}}{=} \frac{1-2i}{2+0} = \frac{1}{2} - i.$$

(c) Mamy

$$|z_n| = \left| \frac{n^2 - i}{n(i+1)} \right| = \frac{|n^2 - i|}{|n(i+1)|} = \frac{\sqrt{n^4 + 1}}{\sqrt{2}n} = \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}$$

Stąd $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$. Zatem wobec Faktu (1.7) badany ciąg ma granicę niewłaściwą.

Ćwiczenia (odp. str. 166)

1. Korzystając z Faktu 1.6, zbadać zbieżność ciągów:

$$\text{(a)} \quad z_n = \frac{n+2}{n} + i \frac{1-3^n}{3^n+1}; \quad \text{(b)} \quad z_n = \frac{e^{in}}{n}; \quad \text{(c)} \quad z_n = (-i)^n; \quad \text{(d)} \quad z_n = \frac{n-2ni}{n+1}.$$

2. Zbadać, czy podane ciągi zespolone mają granicę niewłaściwą:

(a) $z_n = (1+i)^n$; (b) $z_n = (-1)^n n$; (c) $z_n = ((-i)^n + i^n) n^2$.

3. Korzystając z twierdzenia o arytmetyce granic, obliczyć granice ciągów:

(a) $z_n = \frac{n^2 + 2in}{in^2 - 1}$; (b) $z_n = \frac{3n + 2 + ni}{n + 4i}$; (c) $z_n = \frac{\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2}{\left(2 - \frac{i}{n}\right)^3}$.

Zadania

odp. str. 167

1. Obliczyć wartości wyrażeń:

(a) $\left(2 + \frac{1}{4}i\right)(5+i)$; (b) $(3-i)(-4+2i)$; (c) $\left(\frac{1}{4} + i\right)^2$; (d) $(1+i)^4$;
 (e) $(-2+3i)^3$; (f) $\frac{2+3i}{1-i}$; (g) $\frac{(1+i)(2-i)}{(1-i)^2}$.

2. Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Podane wyrażenia przedstawić za pomocą x, y :

(a) $\operatorname{Re}(z^2)$; (b) $e^{|z|}$; (c) $|z^2|$; (d) $|z^n|$;
 (e) $\operatorname{Im}(z^3)$; (f) $\operatorname{Re}(\bar{z}z^2)$; (g) $\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)$; (h) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)$.

3. Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiory określone warunkami:

(a) $0 \leq \operatorname{Re}(iz) < 1$; (b) $|z-i| = \operatorname{Re} z$; (c) $|z-1| < 1$;
 (d) $2 < |z+2i| < 3$; (e) $|z-1+i| > 2$; (f) $0 < |1-i-z| \leq 2$;
 (g) $|2iz+1| \geq 2$; (h) $|z-i| = |z-1|$; (i) $\frac{\pi}{4} < \arg(z-3+i) \leq \frac{2}{3}\pi$.

4. Przedstawić na płaszczyźnie zespolonej liczby:

(a) $e^{\pi i}$; (b) $e^{\frac{\pi}{2}i}$; (c) $e^{\frac{3}{2}\pi i}$; (d) $e^{2k\pi i}$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

5. Obliczyć podane pierwiastki. Wynik przedstawić w postaci wykładniczej i algebraicznej. Podać interpretację geometryczną:

(a) $\sqrt[4]{1}$; (b) $\sqrt[9]{-8i}$; (c) $\sqrt[3]{-27}$; (d) $\sqrt[3]{-1+i}$.

6. Rozwiązać równania:

(a) $z^2 + 4z + 5 = 0$; (b) $z^2 + (2-4i)z - 11 + 2i = 0$;
 (c) $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$; (d) $z^3 - 8 = 0$.

7. Obliczyć granice właściwe lub niewłaściwe ciągów:

(a) $z_n = \frac{1+n-(3+n)ni}{n^2}$; (b) $z_n = \frac{1+in^2}{2n-i}$; (c) $z_n = e^{i\pi \frac{n-1}{n}}$; (d) $z_n = \left(\frac{i}{1-i}\right)^n$.