

**ANALIZA
MATEMATYCZNA 2**

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie dwudzieste pierwsze poprawione



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2025

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1993 – 2025 by Marian Gewert and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto, utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie $\text{\LaTeX}$.

ISBN 978-83-67234-16-0

Wydanie XXI poprawione, Wrocław 2025
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BIS Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp	7
1. Całki niewłaściwe	9
1.1. Całki niewłaściwe I rodzaju	9
1.2. Kryteria zbieżności całek niewłaściwych I rodzaju	13
1.3. Całki niewłaściwe II rodzaju	15
1.4. Kryteria zbieżności całek niewłaściwych II rodzaju	19
2. Szeregi liczbowe i funkcyjne	22
2.1. Definicje i podstawowe twierdzenia	22
2.2. Kryteria zbieżności szeregów	25
2.3. Zbieżność bezwzględna szeregów	30
2.4. Ciągi funkcyjne	32
2.5. Szeregi funkcyjne	37
2.6. Szeregi potęgowe	42
2.7. Szeregi Fouriera*	48
3. Rachunek różniczkowy funkcji dwóch i trzech zmiennych	52
3.1. Zbiory na płaszczyźnie	52
3.2. Funkcje dwóch i trzech zmiennych	54
3.3. Wykresy funkcji dwóch zmiennych w programach komputerowych	59
3.4. Granice i ciągłość funkcji	62
3.5. Pochodne cząstkowe funkcji	67
3.6. Płaszczyzna styczna i różniczka funkcji	73
3.7. Pochodne cząstkowe funkcji złożonych	76
3.8. Pochodna kierunkowa funkcji	78
3.9. Wzór Taylora*. Ekstrema funkcji	81
3.10. Metoda najmniejszych kwadratów	89
3.11. Metoda mnożników Lagrange'a*	90
3.12. Funkcje uwikłane	93

4. Całki podwójne	97
4.1. Całki podwójne po prostokącie	97
4.2. Całki podwójne po obszarach normalnych	102
4.3. Zamiana zmiennych w całkach podwójnych	108
4.4. Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych	111
4.5. Zastosowanie całek podwójnych w geometrii	114
4.6. Zastosowanie całek podwójnych w fizyce	117
5. Całki potrójne	123
5.1. Całki potrójne po prostopadłościanie	123
5.2. Całki potrójne po obszarach normalnych	126
5.3. Zamiana zmiennych w całkach potrójnych	132
5.4. Współrzędne walcowe w całkach potrójnych	133
5.5. Współrzędne sferyczne w całkach potrójnych	136
5.6. Zastosowanie całek potrójnych w geometrii i fizyce	139
Odpowiedzi i wskazówki	144
Literatura	174
Skorowidz	175

Wstęp

Niniejsza książka jest pierwszą częścią zestawu podręczników do Analizy matematycznej 2. Pozostałymi częściami są zbiór zadań pt. „*Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*” oraz opracowanie pt. „*Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*”. Podręczniki te przeznaczone są głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci uczelni ekonomicznych, pedagogicznych, rolniczych i wojskowych oraz wydziałów nauk ścisłych uniwersytetów.

Materiał zawarty w książce obejmuje całki niewłaściwe, szeregi liczbowe, ciągi i szeregi funkcyjne, rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych wraz z zastosowaniami. Wszystkie zagadnienia teoretyczne zakończone są ćwiczeniami, przy czym początkowe z nich są z reguły najprostsze. Odpowiedzi do ćwiczeń umieszczone są na końcu podręcznika. Fragmenty materiału oznaczone gwiazdką nieznacznie wykraczają poza standardowy program przedmiotu. W ten sam sposób oznaczono trudniejsze ćwiczenia. Dodatkowy materiał oraz trudniejsze ćwiczenia dołączono z myślą o studentach, którzy chcą pogłębić swoje wiadomości z analizy matematycznej. Ponadto, zachęcamy ich do zapoznania się z książką „*Studencki konkurs matematyczny*”, która jest zbiorem trudnych i nietypowych zadań z algebry oraz analizy.

Przykłady ze wzorcowymi rozwiązaniami, ilustrujące materiał teoretyczny z tego podręcznika, umieszczono w drugiej części zestawu pt. „*Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*”. Tam też można znaleźć dużą liczbę zadań do samodzielnej nauki.

Ćwiczenia z tej książki oraz przykłady i zadania z drugiej części zestawu są podobnych typów i mają ten sam stopień trudności jak zadania, które zwykle pojawiają się na kolokwiah i egzaminach. Zadania, które w poprzednich latach studenci rozwiązywali na sprawdzianach, są umieszczone w trzeciej części zestawu.

Uzupełnieniem powyższego zestawu podręczników jest książka „*Przykłady i kontrprzykłady z analizy matematycznej*”. Publikacja ta zawiera przykłady zbiorów, funkcji, szeregów, całek itp. o zadziwiających własnościach oraz kontrprzykłady świadczące, że w klasycznych twierdzeniach analizy matematycznej nie można osłabić założeń ani wzmocnić tez.

Do obecnego wydania dołączono kilkanaście nowych ćwiczeń. Ponadto, przeredagowano lub uzupełniono niektóre fragmenty materiału oraz poprawiono zauważone błędy i usterki.

Serdecznie dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za uwagi o wcześniejszych wydaniach książki. Dziękujemy również naszym Studentom za wskazanie błędów w odpowiedziach do ćwiczeń.

Uprzejmie prosimy Czytelników o przesyłanie uwag o podręczniku oraz informacji o dostrzeżonych błędach i usterekach.

Marian Gewert

Zbigniew Skoczylas

1.

Całki niewłaściwe

W pierwszym rozdziale omawiamy całki niewłaściwe pierwszego i drugiego rodzaju, tj. całki po przedziałach nieograniczonych i całki funkcji nieograniczonych. Formułujemy kryteria zbieżności oraz zbieżności bezwzględnej tych całek. Ponadto, definiujemy wartości główne całek obu rodzajów.

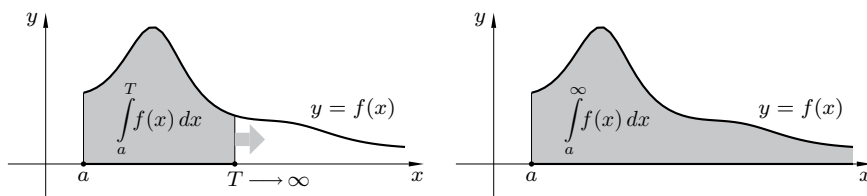
1.1. Całki niewłaściwe I rodzaju

Definicja 1.1. (całka niewłaściwa na półprostej)

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $[a, \infty)^*$. Całkę niewłaściwą funkcji f na półprostej $[a, \infty)$ określamy wzorem:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa jest *zbieżna*. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka ta jest *rozbieżna odpowiednio do ∞ lub $-\infty$* . W pozostałych przypadkach mówimy, że całka niewłaściwa jest *rozbieżna*.

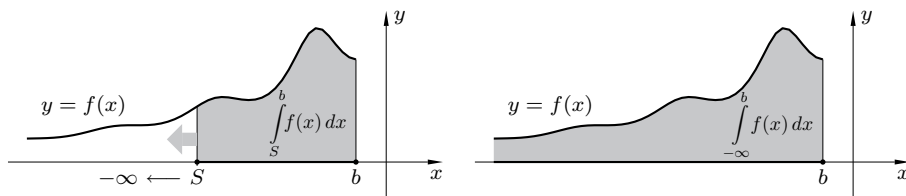


Rys. 1.1. Ilustracja całki niewłaściwej na półprostej $[a, \infty)$

*Przyjmujemy w całym rozdziale, że rozważane funkcje są całkowlne na dowolnym przedziale domkniętym zawartym w ich dziedzinie.

Analogicznie określa się *całkę niewłaściwą* na półprostej $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^b f(x) dx.$$



Rys. 1.2. Ilustracja całki niewłaściwej na półprostej $(-\infty, b]$

Uwaga. Jeżeli funkcja f przyjmuje wartości nieujemne na przedziale $[a, \infty)$, to całka niewłaściwa tej funkcji na tym przedziale jest zbieżna albo rozbieżna do ∞ . Podobnie jest dla całki niewłaściwej na przedziale $(-\infty, b]$.

Ćwiczenie 1.1. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

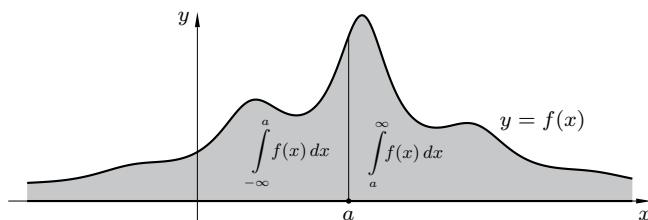
- (a) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$; (b) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; (c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$; (d) $\int_{\pi}^{\infty} \sin x dx$;
 (e) $\int_{-\infty}^{-9} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$; (f) $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$; (g*) $\int_1^{\infty} \frac{\cos \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$; (h*) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Definicja 1.2. (*całka niewłaściwa na prostej*)

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(-\infty, \infty)$. *Całkę niewłaściwą* funkcji f na prostej $(-\infty, \infty)$ definiujemy wzorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx,$$

gdzie a oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Zbieżność całki niewłaściwej po lewej stronie znaku równości ustalamy w zależności od zbieżności całek niewłaściwych po prawej stronie. Jeżeli obie całki po prawej są zbieżne, to mówimy, że całka po lewej jest zbieżna. Jeżeli jedna z całek po prawej jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ , a druga jest zbieżna albo rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub ∞ , to mówimy, że całka po lewej jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ . W pozostałych przypadkach mówimy, że całka po lewej jest rozbieżna.



Rys. 1.3. Ilustracja całki niewłaściwej na prostej

Uwaga. Jeżeli w definicji całka niewłaściwa na przedziale $(-\infty, \infty)$ jest zbieżna dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, to jest zbieżna dla dowolnego a i jej wartość nie zależy od a . Całki po przedziałach nieograniczonych $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ nazywamy *całkami niewłaściwymi I rodzaju*. Na koniec zauważmy, że jeżeli funkcja f przyjmuje wartości nieujemne na przedziale $(-\infty, \infty)$, to całka niewłaściwa funkcji f na prostej jest zbieżna albo rozbieżna do ∞ .

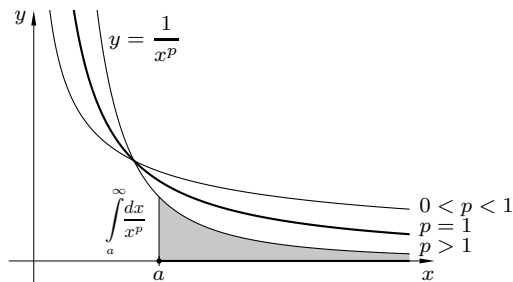
Ćwiczenie 1.2. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

- (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$; (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1}$; (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{2x}}$; (d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$;
 (e) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$; (f) $\int_{-\infty}^{\infty} e^x \sin x dx$; (g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + \sqrt{|x|}}$; (h) $\int_{-\infty}^{\infty} (3^x - 2^{-x}) dx$.

FAKT 1.1. (o zbieżności całek $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$)

Całka niewłaściwa $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ ($a > 0$) jest zbieżna dla $p > 1$ i rozbieżna do ∞ dla $0 < p \leq 1$.

Uwaga. Analogiczny fakt jest prawdziwy także dla całek niewłaściwych $\int_{-\infty}^b \frac{dx}{x^p}$ ($b < 0$), o ile funkcja podcałkowa jest poprawnie określona.

Rys. 1.4. Wykresy funkcji $y = \frac{1}{x^p}$ dla różnych wartości parametru $p > 0$

Ćwiczenie 1.3. Korzystając z powyższego faktu zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}; & \text{(b)} \quad & \int_8^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}; & \text{(c)} \quad & \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}; \\ \text{(d)} \quad & \int_0^{\infty} \frac{dx}{(\sqrt[3]{2x+5})^4}; & \text{(e)} \quad & \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-2)^3}}; & \text{(f)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|+2}}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1.4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_a^{\infty} \frac{dx}{p^x}$ ($a \in \mathbb{R}$) w zależności od parametru $p > 0$.

Ćwiczenie* 1.5. Funkcję gamma, która jest uogólnieniem silni, określamy wzorem

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad \text{gdzie } p > 0.$$

Obliczyć $\Gamma(1)$ i następnie pokazać, że $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ dla $p > 0$ oraz $\Gamma(n) = (n-1)!$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 1.3. (wartość główna całki niewłaściwej I rodzaju)

Wartość główną całki niewłaściwej I rodzaju funkcji f na $(-\infty, \infty)$ definiujemy wzorem

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x) dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie równości nie istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa nie ma wartości głównej.

Uwaga. Jeżeli całka niewłaściwa na $(-\infty, \infty)$ jest zbieżna do w , to wartość główna całki także równa się w . Z drugiej strony, całka rozbieżna może mieć wartość główną.

Ćwiczenie 1.6. Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych I rodzaju:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}; & \text{(b)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}} dx; \\ \text{(c)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx; & \text{(d)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx. \end{aligned}$$

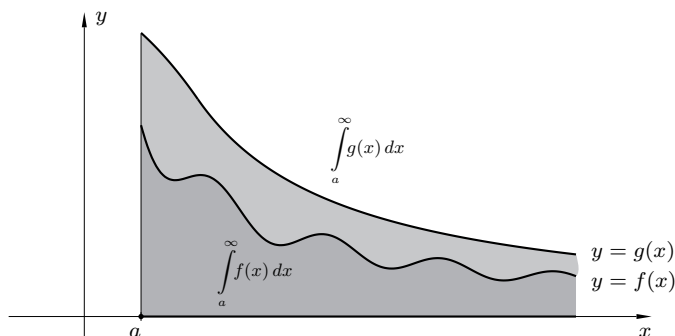
1.2. Kryteria zbieżności całek niewłaściwych I rodzaju

TWIERDZENIE 1.1. (kryterium porównawcze)

Niech dla każdego $x \in [a, \infty)$ funkcje f i g spełniają nierówności $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Wówczas:

1. jeżeli całka niewłaściwa $\int_a^\infty g(x) dx$ jest zbieżna, to całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x) dx$ także jest zbieżna;

2. jeżeli całka $\int_a^\infty f(x) dx$ jest rozbieżna do ∞ , to całka $\int_a^\infty g(x) dx$ także jest rozbieżna do ∞ .



Rys. 1.5. Ilustracja kryterium porównawczego zbieżności całek niewłaściwych I rodzaju

Uwaga. Twierdzenie pozostanie prawdziwe, gdy nierówności w założeniu są spełnione dla każdego $x \in [a^*, \infty)$, gdzie $a^* > a$. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla funkcji niedodatnich f i g . Ponadto, prawdziwe są podobne twierdzenia dla całek niewłaściwych na półprostej $(-\infty, b]$.

Ćwiczenie 1.7. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}$; | (b) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + x}$; | (c) $\int_4^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{x + 1}$; |
| (d) $\int_{-\infty}^0 \frac{\arctg x^2 dx}{x^2 + 1}$; | (e) $\int_{2\pi}^\infty \frac{(2 + \sin x) dx}{\sqrt{x}}$; | (f) $\int_{2\pi}^\infty \frac{(x + \sin x) dx}{x^2 - 1}$; |
| (g*) $\int_{-\infty}^1 e^{-x^2} dx$; | (h*) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{4^x dx}{x + 1}$; | (i*) $\int_\pi^\infty \frac{dx}{\cos x - \sqrt{3}}$. |

TWIERDZENIE 1.2. (*kryterium ilorazowe*)

Niech funkcje f i g przyjmują wartości dodatnie (ujemne) na półprostej $[a, \infty)$ oraz niech spełniają warunek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \text{ gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas całki niewłaściwe $\int_a^\infty f(x) dx$, $\int_a^\infty g(x) dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do ∞ ($-\infty$).

Uwaga. Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia dla całek niewłaściwych na półprostej $(-\infty, b]$.

Ćwiczenie 1.8. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 1}}; & \text{(b)} \int_3^\infty \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^6 - 10x}}; & \text{(c)} \int_1^\infty \frac{e^x dx}{x(e^x - 1)}; \\ \text{(d)} \int_{-\infty}^{-\pi} \frac{x dx}{x^3 + \sin x}; & \text{(e)} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - x}}; & \text{(f)} \int_{-\infty}^{-\pi} e^x \cos \frac{1}{x} dx; \\ \text{(g}^*) \int_1^\infty \frac{(x+1)^x dx}{x^{x+2}}; & \text{(h}^*) \int_0^\infty \frac{\ln(1+3^{-x}) dx}{\ln(1+2^{-x})}; & \text{(i}^*) \int_{-\infty}^0 \frac{e^{3x} dx}{e^x + 1}. \end{array}$$

Definicja 1.4. (*zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych I rodzaju*)

Mówimy, że całka niewłaściwa I rodzaju funkcji f jest *zbieżna bezwzględnie*, gdy całka niewłaściwa funkcji $|f|$ jest zbieżna.

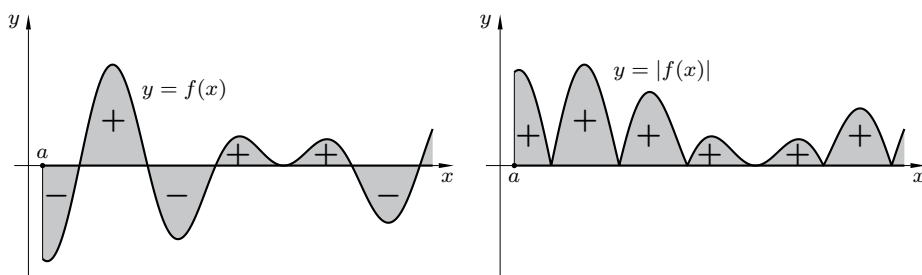
Ćwiczenie 1.9. Zbadać zbieżność bezwzględną całek niewłaściwych:

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{\sin 2x dx}{x^2 + 1}; \quad \text{(b)} \int_0^\infty e^{-x} \cos x dx; \quad \text{(c)} \int_\pi^\infty \frac{\sin x dx}{x^3}; \quad \text{(d}^*) \int_{10}^\infty \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor} dx}{x}.$$

TWIERDZENIE 1.3. (*o zbieżności całek niewłaściwych zbieżnych bezwzględnie*)

Jeżeli całka niewłaściwa I rodzaju funkcji f jest zbieżna bezwzględnie, to jest zbieżna. Ponadto

$$\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx.$$



Rys. 1.6. Ilustracja twierdzenia o zbieżności całek niewłaściwych zbieżnych bezwzględnie

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla pozostałych rodzajów całek niewłaściwych I rodzaju. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Np. całka niewłaściwa funkcji $f(x) = (\sin x)/x$ na przedziale $[\pi, \infty)$ jest zbieżna, ale nie jest zbieżna bezwzględnie.

Ćwiczenie 1.10. Z badać zbieżność i zbieżność bezwzględną całek niewłaściwych:

(a) $\int_0^{\infty} x \sin x \, dx;$

(b) $\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x \, dx}{e^x + 1};$

(c) $\int_2^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{(x^2 + 4)^2};$

(d) $\int_0^{\infty} \frac{2^x \sin x \, dx}{5^x + 3^x \cos x};$

(e) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2x} \sin x \, dx}{2 + \cos x};$

(f) $\int_1^{\infty} \frac{(\sin x + \cos x) \, dx}{(x^2 + 9)^2};$

(g*) $\int_1^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \, dx}{x};$

(h*) $\int_{-\infty}^0 e^x \sin^5 x \, dx;$

(i*) $\int_0^{\infty} \sin x^2 \, dx.$

1.3. Całki niewłaściwe II rodzaju

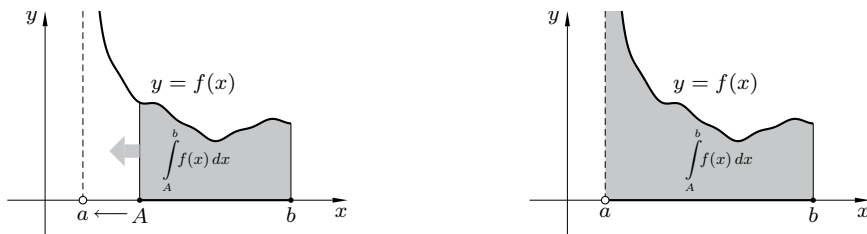
Definicja 1.5. (całka niewłaściwa funkcji nieograniczonej)

Niech funkcja f określona na przedziale $(a, b]$ będzie nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a . Całkę niewłaściwą funkcji f na przedziale $(a, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{A \rightarrow a^+} \int_A^b f(x) \, dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa jest *zbieżna*. Jeżeli granica ta jest równa ∞ lub $-\infty$, to

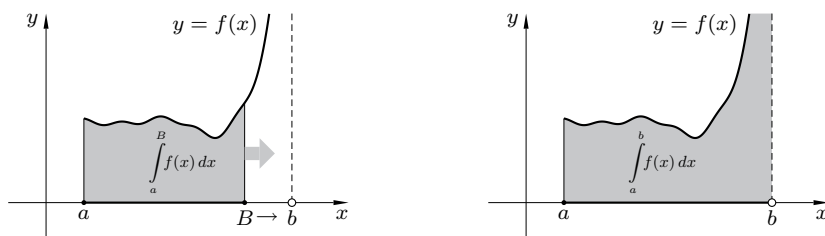
mówimy, że całka niewłaściwa jest *rozbieżna* odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka niewłaściwa jest *rozbieżna*.



Rys. 1.7. Ilustracja całki niewłaściwej funkcji nieograniczonej na $(a, b]$

Analogicznie definiuje się *całkę niewłaściwą* funkcji f określonej na przedziale $[a, b)$ i nieograniczonej tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f(x) dx.$$



Rys. 1.8. Ilustracja całki niewłaściwej funkcji nieograniczonej na $[a, b)$

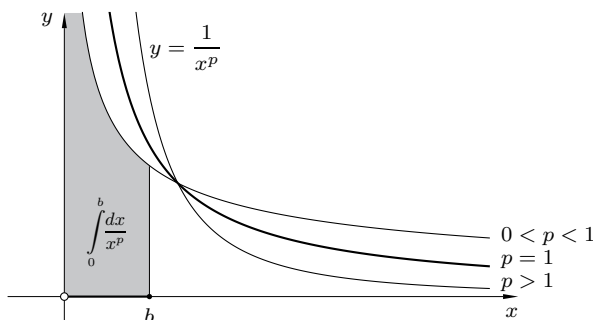
Uwaga. Jeżeli funkcja f przyjmuje wartości nieujemne na przedziale $(a, b]$ albo $[a, b)$, to całka $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna albo rozbieżna do ∞ .

Ćwiczenie 1.11. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}};$ | (b) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^2};$ | (c) $\int_0^e \ln x dx;$ |
| (d) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}};$ | (e) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$ | (f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx;$ |
| (g) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x};$ | (h) $\int_1^2 \frac{(x-2) dx}{\sqrt{x-1}};$ | (i) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x}.$ |

FAKT 1.2. (o zbieżności całek $\int_0^b \frac{dx}{x^p}$)

Całka niewłaściwa $\int_0^b \frac{dx}{x^p}$ ($b > 0$) jest zbieżna dla $0 < p < 1$ i rozbieżna do ∞ dla $p \geq 1$.



Rys. 1.9. Wykresy funkcji $y = \frac{1}{x^p}$ dla różnych wartości parametru $p > 0$

Uwaga. Analogiczny fakt jest prawdziwy także dla całek $\int_a^0 \frac{dx}{x^p}$ ($a < 0$), o ile funkcja podcałkowa jest poprawnie określona.

Ćwiczenie 1.12. Korzystając z powyższego faktu zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{x^4}; \quad (b) \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{x+3}}; \quad (c) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-1)^4}}; \quad (d) \int_3^4 \frac{dx}{(4-x)^3}.$$

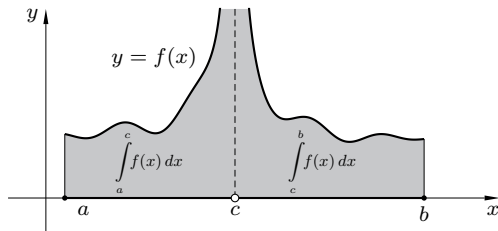
Definicja 1.6. (całki niewłaściwe funkcji nieograniczonych, ciąg dalszy)

Niech funkcja f określona na zbiorze $[a, c) \cup (c, b]$ będzie nieograniczona tylko na obu jednostronnych sąsiedztwach punktu c . Całkę niewłaściwą funkcji f na $[a, c) \cup (c, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Jeżeli obie całki niewłaściwe po prawej stronie znaku równości są zbieżne, to mówimy, że całka niewłaściwa po lewej stronie tego znaku jest zbieżna. Jeżeli jedna z całek niewłaściwych po prawej stronie znaku równości jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ , a druga jest zbieżna albo rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub ∞ ,

∞ , to mówimy, że całka niewłaściwa po lewej stronie tego znaku jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ . W pozostałych przypadkach mówimy, że całka niewłaściwa po lewej stronie znaku równości jest rozbieżna.

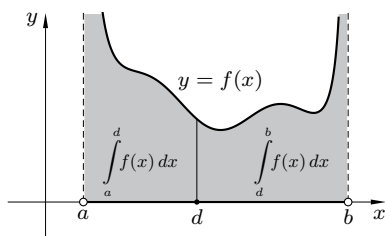


Rys. 1.10. Ilustracja definicji całki niewłaściwej funkcji nieograniczonej na $[a, c) \cup (c, b]$

Uwaga. Podobnie określa się *całki niewłaściwe* funkcji nieograniczonych tylko na sąsiedztwach obustronnych lub jednostronnych punktów $c_1, c_2, \dots, c_n \in [a, b]$. Na przykład dla funkcji f określonej na przedziale (a, b) i nieograniczonej tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a i na lewostronnym sąsiedztwie punktu b przyjmujemy:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx,$$

gdzie d jest dowolnym punktem przedziału (a, b) . Jeżeli całka jest zbieżna dla pewnego d , to jest zbieżna dla dowolnego $d \in (a, b)$ i jej wartość nie zależy od d . Całki zdefiniowane w tym paragrafie nazywamy *całkami niewłaściwymi II rodzaju*.



Rys. 1.11. Ilustracja całki niewłaściwej funkcji nieograniczonej na (a, b)

Ćwiczenie 1.13. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

- (a) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2}$; (b) $\int_{-8}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; (c) $\int_0^2 \frac{dx}{x(x-1)}$; (d) $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2 x}$;
 (e) $\int_{-1}^1 \frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (f) $\int_{-2}^2 \frac{x dx}{\sqrt[4]{4-x^2}}$; (g) $\int_{-\pi}^0 \frac{dx}{\cos x}$; (h*) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Definicja 1.7. (wartość główna całki niewłaściwej II rodzaju)

Wartość główną całki niewłaściwej II rodzaju funkcji f określonej na $[a, b] \setminus \{c\}$ i nieograniczonej jedynie na obu jednostronnych sąsiedztwach punktu c definiujemy wzorem:

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right].$$

Jeżeli granica po prawej stronie równości nie istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa nie ma wartości głównej.

Uwaga. Jeżeli całka niewłaściwa funkcji f określonej na $[a, b] \setminus \{c\}$ jest zbieżna do w , to wartość główna całki także równa się w .

Ćwiczenie 1.14. Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych II rodzaju:

$$(a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}; \quad (b) \int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}; \quad (c) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x^4} dx; \quad (d) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

1.4. Kryteria zbieżności całek niewłaściwych II rodzaju

TWIERDZENIE 1.4. (kryterium porównawcze)

Niech funkcje f i g będą określone na przedziale $(a, b]$ i nieograniczone tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a oraz niech dla każdego $x \in (a, b]$ spełniają nierówności $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Wówczas:

1. jeżeli całka niewłaściwa $\int_a^b g(x) dx$ jest zbieżna, to także całka niewłaściwa

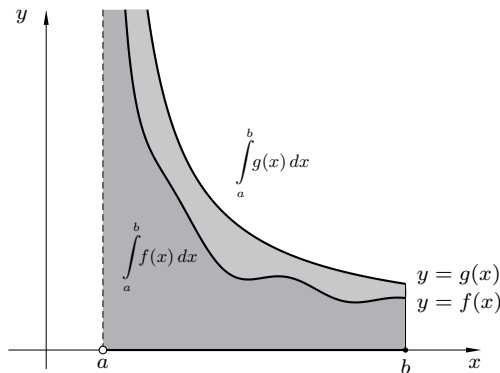
$$\int_a^b f(x) dx \text{ jest zbieżna;}$$

2. jeżeli całka niewłaściwa $\int_a^b f(x) dx$ jest rozbieżna do ∞ , to także całka nie-

właściwa $\int_a^b g(x) dx$ jest rozbieżna do ∞ .

Uwaga. Twierdzenie powyższe pozostanie prawdziwe, gdy nierówności w założeniu są spełnione dla każdego $x \in (a, b^*]$ ($a < b^* < b$). Prawdziwe jest także

analogiczne twierdzenie dla funkcji określonych na przedziale $[a, b]$ i nieograniczonych tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu b . Wszystkie warianty tego twierdzenia można stosować także dla funkcji niedodatnich.



Rys. 1.12. Ilustracja kryterium porównawczego zbieżności całek niewłaściwych II rodzaju

Ćwiczenie 1.15. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

$$(a) \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{x}}; \quad (b) \int_0^1 \frac{(x+1) dx}{\sin^2 x}; \quad (c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{2x-\pi}}; \quad (d^*) \int_0^2 \frac{\sin x dx}{x^3}.$$

TWIERDZENIE 1.5. (*kryterium ilorazowe*)

Niech funkcje f i g przyjmują wartości dodatnie (ujemne) na przedziale $(a, b]$ i nieograniczone tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a . Ponadto, niech spełniają warunek

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \text{ gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas całki niewłaściwe $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b g(x) dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do ∞ ($-\infty$).

Uwaga. Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia dla całek niewłaściwych na przedziale $[a, b)$. Przy wyborze funkcji g warto pamiętać, że dla x bliskich 0 prawdziwe są zależności:

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x; & \arcsin x &\sim x; & \operatorname{tg} x &\sim x; & \operatorname{arctg} x &\sim x; \\ \cos x &\sim 1 - \frac{x^2}{2}; & e^x &\sim 1 + x; & \ln(1+x) &\sim x; & (1+x)^p &\sim 1 + px \quad (p \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Symbol $f(x) \sim g(x)$ dla x bliskich 0 oznacza, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Ćwiczenie 1.16. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{x^3}}; \quad & \text{(b)} \int_0^8 \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x}}; \quad \text{(c)} \int_{-1}^0 \frac{(e^x - 1) \, dx}{x^2}; \quad \text{(d)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}; \\ \text{(e)} \int_2^3 \frac{\sqrt{x-2} \, dx}{x^3 - 8}; \quad & \text{(f)} \int_0^2 \frac{dx}{\ln(1+x)}; \quad \text{(g)} \int_1^4 \frac{dx}{x - \sqrt{x}}; \quad \text{(h*)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie* 1.17. Przyjmując odpowiednie definicje zbadać zbieżność całek niewłaściwych, które są jednocześnie całkami I i II rodzaju:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_0^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{1+x}; \quad & \text{(b)} \int_0^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{1+x^2}; \quad \text{(c)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{xe^x}; \quad \text{(d)} \int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln x}; \\ \text{(e)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}; \quad & \text{(f*)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}; \quad \text{(g*)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - \sqrt{x}}; \quad \text{(h*)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1.18. (przykłady z geometrii i fizyki)

(a) Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru ograniczonego prostymi $x = 1$, $x \geq 1$, $y = 0$ i wykresem funkcji $y = 1/x$.

(b) Obliczyć pracę W , jaką należy wykonać, aby ciało o masie $m = 100$ kg przenieść z powierzchni Ziemi do nieskończoności. Zaniedbać opór powietrza. Przyjąć promień Ziemi $R = 6380$ km oraz przyspieszenie na poziomie morza $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$.

(c) Obliczyć współrzędne (x_C, y_C) środka masy jednorodnego obszaru ograniczonego prostymi $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ i wykresem funkcji $y = 1/\sqrt[3]{x}$.

(d) Obliczyć siłę, z jaką jednorodnie naładowana półprosta przyciąga ładunek $Q = 4$ C położony na przedłużeniu półprostej, w odległości $d = 1$ m od jej końca. Gęstość liniowa ładunku jest równa $\lambda_0 = 1 \text{ C/m}$ pręta.

(e*) Obliczyć siłę, z jaką jednorodny nieskończony prostoliniowy pręt o gęstości λ_0 przyciąga masę m umieszczoną w odległości r od niego.