ALGEBRA LINIOWA

Teresa Jurlewicz Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA LINIOWA

Przykłady i zadania

Wydanie dziewiąte rozszerzone

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2026

Teresa Jurlewicz
Przedsiębiorstwo Informatyczne Yuma
Wrocław
teresa.jurlewicz@yuma.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1995 – 2026 by Teresa Jurlewicz and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–67234–28–3

Wydanie IX rozszerzone, Wrocław 2026
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. Kom.

Spis treści

Wstęp **7**

1. Przestrzenie liniowe **9**
1.1. Podstawowe definicje 9
1.2. Podprzestrzenie przestrzeni liniowej 10
1.3. Liniowa niezależność wektorów 15
1.4. Baza i wymiar przestrzeni liniowej 23
1.5. Współrzędne wektora w bazie 36

2. Układy równań liniowych **51**
2.1. Rząd macierzy 51
2.2. Twierdzenie Kroneckera-Capellego 63
2.3. Układy jednorodne i niejednorodne 76

3. Przekształcenia liniowe **87**
3.1. Podstawowe określenia 87
3.2. Obraz i jądro przekształcenia liniowego 92
3.3. Macierz przekształcenia liniowego 101
3.4. Działania na przekształceniach liniowych 118
3.5. Wartości i wektory własne przekształceń liniowych 126
3.6. Wartości i wektory własne macierzy 145

4. Przestrzenie euklidesowe **153**
4.1. Iloczyn skalarny 153
4.2. Norma wektora. Ortogonalność wektorów 156
4.3. Bazy ortogonalne 163
4.4. Inne metody ortogonalizacji 174
4.5. Rzut ortogonalny 178
Zadania różne 189

Zbiory zadań **192**

Wstęp

Zbiór zadań *„Algebra liniowa. Przykłady i zadania”* jest drugą częścią zestawu podręczników do algebry liniowej. Pozostałymi częściami zestawu są książki „*Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory*” oraz „*Algebra liniowa. Kolokwia i egzaminy*”. Podręczniki te przeznaczone są głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci wydziałów nauk ścisłych uniwersytetów.

Zbiór „*Algebra liniowa. Przykłady i zadania*” zawiera przykładowe zadania z rozwiązaniami przedstawionymi „krok po kroku” oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Do wszystkich zadań podane są odpowiedzi lub wskazówki. Przykłady i zadania obejmują przestrzenie i przekształcenia liniowe, układy równań liniowych oraz przestrzenie euklidesowe. Materiał teoretyczny niezbędny do rozwiązywania zadań można znaleźć w pierwszej części zestawu pt. *„Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory”*. Początkowe podpunkty przykładów i zadań są z reguły najprostsze, zaś przykłady i zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze. Zadania, które obowiązywały na sprawdzianach egzaminach, umieszczono w trzeciej części zestawu pt. *„Algebra liniowa. Kolokwia i egzaminy”*.

W obecnym wydaniu przeredagowano rozwiązania wielu przykładów. Ponadto dodano kilka nowych rysunków oraz poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy koleżankom i kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym studentom za uwagi o poprzednich wydaniach. Uprzejmie prosimy czytelników o przesyłanie uwag o podręczniku oraz informacji o zauważonych błędach.

Teresa Jurlewicz *Zbigniew Skoczylas*

Oznaczenia:

$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych,

$\mathbb{C}$ – zbiór liczb zespolonych,

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{R} \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n\}$ – przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^n$,

$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) : \ x_i \in \mathbb{R} \text{ dla } i \in \mathbb{N}\}$ – przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^\infty$,

$\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$, $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ – przestrzenie liniowe,

$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ – wektory,

$\mathbb{R}_n[x]$ – przestrzeń liniowa wielomianów rzeczywistych stopnia $\leqslant n$,

$\mathbb{R}[x]$ – przestrzeń liniowa wielomianów rzeczywistych,

$\mathbb{M}_{n\times m}$ – przestrzeń liniowa macierzy rzeczywistych o n wierszach i m kolumnach,

$\mathbb{C}(\mathbb{R})$ – przestrzeń liniowa funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$,

$\mathbb{C}(I)$ – przestrzeń liniowa funkcji ciągłych na przedziale $I \subset \mathbb{R}$,

$[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ – współrzędne wektora $\boldsymbol{x}$ w ustalonej bazie przestrzeni,

$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ – iloczyn skalarny,

$\mathbb{E}$ – przestrzeń euklidesowa,

$\mathbb{E}^n$ – przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym,

$\operatorname{tr} A$ – ślad macierzy A, tj. suma wszystkich elementów z głównej przekątnej macierzy A,

$w_{_A}(\lambda)$ – wielomian charakterystyczny macierzy A, tj. $w_{_A}(\lambda) = \det(A - \lambda I)$,

K, L – przekształcenia liniowe przestrzeni liniowej w przestrzeń liniową,

$\operatorname{Ker}(L)$ – jądro przekształcenia liniowego L,

$\operatorname{Im}(L)$ – obraz przekształcenia liniowego L,

$\mathbb{W}_{_\lambda}$ – przestrzeń wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ uzupełniona o wektor zerowy.

1. Przestrzenie liniowe

1.1. Podstawowe definicje

▶ **Przykład 1.1.** Uzasadnić z definicji, że zbiór $\mathbb{R}_2[x]$ wszystkich wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż 2 z dodawaniem wielomianów i mnożeniem ich przez liczby rzeczywiste, jest przestrzenią liniową.

Rozwiązanie. Niech wielomiany p, q należą do zbioru $\mathbb{R}_2[x]$, przy czym

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad q(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1,$$

gdzie $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Z definicji

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = (a+a_1)\,x^2 + (b+b_1)\,x + c + c_1,$$
$$(\alpha p)(x) = \alpha p(x) = (\alpha a)\,x^2 + (\alpha b)\,x + \alpha c$$

wynika, że funkcje $p+q$ oraz αp są także wielomianami ze zbioru $\mathbb{R}_2[x]$. Sprawdzimy teraz kolejno 6 aksjomatów, które muszą spełniać działania w przestrzeniach liniowych.

(1) Dodawanie wielomianów jest przemienne, bowiem dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = q(x) + p(x) = (q+p)(x).$$

(2) Niech dodatkowo $r \in \mathbb{R}_2[x]$. Łączność dodawania wielomianów wynika z warunku

$$\begin{aligned}[(p+q)+r]\,(x) &= (p+q)\,(x) + r(x) = (p(x) + q(x)) + r(x) \\ &= p(x) + (q(x) + r(x)) = p(x) + (q+r)\,(x) = [p + (q+r)]\,(x).\end{aligned}$$

(3) Elementem neutralnym dodawania wielomianów jest wielomian $p_0 \equiv 0$ także należący do zbioru $\mathbb{R}_2[x]$.

(4) Elementem przeciwnym do wielomianu p jest wielomian

$$(-p)(x) = -p(x).$$

(5) Załóżmy, że $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory

$$(1 \cdot p)(x) = 1 \cdot p(x) = p(x),$$
$$[\alpha(\beta p)]\,(x) = \alpha(\beta p)(x) = \alpha(\beta p(x)) = (\alpha\beta)p(x) = [(\alpha\beta)\,p]\,(x),$$

a więc rzeczywiście $1 \cdot p = p$ oraz $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p$.

(6) Ponadto prawdziwe są związki $(\alpha+\beta)p = \alpha p + \beta p$ oraz $\alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$. Dla $x \in \mathbb{R}$ mamy bowiem

$$[(\alpha+\beta)\,p]\,(x) = (\alpha+\beta)p(x) = \alpha p(x) + \beta p(x) = (\alpha p + \beta p)\,(x)$$

oraz

$$\begin{aligned}[\alpha(p+q)]\,(x) &= \alpha\,[(p+q)\,(x)] = \alpha\,[p(x)+q(x)] \\ &= \alpha p(x) + \alpha q(x) = (\alpha p + \alpha q)(x).\end{aligned}$$

Zauważmy, że własności (1) – (6) wynikały bezpośrednio z odpowiednich własności dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych.

▷ **Zadanie 1.1.** Uzasadnić z definicji, że zbiór wszystkich rzeczywistych macierzy trójkątnych górnych stopnia 2 wraz z dodawaniem macierzy i mnożeniem macierzy przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową.

1.2. Podprzestrzenie przestrzeni liniowej

► **Przykład 1.2.** Uzasadnić, że podane zbiory są podprzestrzeniami liniowymi wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{W} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x = 3y\}$, $\mathbb{R}^2$;

(b) $\mathbb{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = y + z = 0\}$, $\mathbb{R}^3$;

(c) $\mathbb{W} = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony}\}$, $\mathbb{R}^\infty$;

(d) $\mathbb{W} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) = p(-x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}_3[x]$;

(e) $\mathbb{W} = \{f \in \mathbb{C}\,([0,2]) : f\,'(1) = 0\}$, $\mathbb{C}\,([0,2])$;

(f) $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{n\times n} : \operatorname{tr} A = 0\}$, $\mathbb{M}_{n\times n}$.

Rozwiązanie. Zbiór $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{W}$ oraz dla dowolnych α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ mamy $\alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{W}$.

(a) Niech $\boldsymbol{w}_1 = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (x_2, y_2)$ oraz niech $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\,.$$

Ponieważ $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{W}$, więc $2x_1 = 3y_1$, $2x_2 = 3y_2$. Stąd

$$2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 2x_1 + \alpha_2 2x_2 = \alpha_1 3y_1 + \alpha_2 3y_2 = 3(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2).$$

To oznacza, że $\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{W}$. Zatem $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

(b) Z warunku $x + y = y + z = 0$ wynika, że $x = -y$, $z = x$, więc

$$\mathbb{W} = \{(x, -x, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Niech $\boldsymbol{w}_1 = (x_1, -x_1, x_1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (x_2, -x_2, x_2)$, gdzie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ oraz niech $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Wtedy wektor

$$\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1(-x_1) + \alpha_2(-x_2),\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

ma postać $(x, -x, x)$ dla $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, więc należy do zbioru $\mathbb{W}$. Zbiór $\mathbb{W}$ jest zatem podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(c) Niech $(x_n), (y_n) \in \mathbb{W}$ oraz niech α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. Wówczas ciąg

$$\alpha_1 (x_n) + \alpha_2 (y_n) = (\alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n)$$

jest też ograniczony. Rzeczywiście, jeżeli $|x_n| \leqslant M_1 < \infty$ i $|y_n| \leqslant M_2 < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to

$$|\alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n| \leqslant |\alpha_1|\,|x_n| + |\alpha_2|\,|y_n| \leqslant |\alpha_1|\,M_1 + |\alpha_2|\,M_2 = M < \infty;$$

To oznacza, że zbiór $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$.

(d) Niech $p, q \in \mathbb{W}$ oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Funkcja $\alpha_1 p + \alpha_2 q$ jest oczywiście wielomianem stopnia mniejszego lub równego 3. Zachodzi też warunek

$$(\alpha_1 p + \alpha_2 q)(x) = \alpha_1 p(x) + \alpha_2 q(x) = \alpha_1 p(-x) + \alpha_2 q(-x) = (\alpha_1 p + \alpha_2 q)(-x),$$

więc $\alpha_1 p + \alpha_2 q \in \mathbb{W}$. Zbiór $\mathbb{W}$ jest zatem podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}[x]$.

(e) Niech $f, g \in \mathbb{W}$ oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Funkcja $\alpha_1 f + \alpha_2 g$ jest ciągła na przedziale $[0, 2]$, bo obie funkcje f i g są tam ciągłe. Ponadto istnieje pochodna tej funkcji w punkcie 1, bo istnieją $f'(1)$ i $g'(1)$ oraz

$$(\alpha_1 f + \alpha_2 g)'(1) = (\alpha_1 f' + \alpha_2 g')(1) = \alpha_1 f'(1) + \alpha_2 g'(1) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0.$$

Otrzymana równość świadczy o tym, że zbiór $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{C}([0, 2])$.

(f) Niech A, $B \in \mathbb{W}$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy spełnione są warunki: $\operatorname{tr} A = 0$, $\operatorname{tr} B = 0$. Korzystając z własności śladu macierzy mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) &= \operatorname{tr}(\alpha A) + \operatorname{tr}(\beta B) = \alpha \operatorname{tr} A + \beta \operatorname{tr} B \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

To oznacza, że $\alpha A + \beta B \in \mathbb{W}$. Zatem $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{M}_{n\times n}$.

▷ **Zadanie 1.2.** Uzasadnić, że podane zbiory są podprzestrzeniami liniowymi wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{W} = \{(2x - y, y + z) \in \mathbb{R}^2 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^2$;

(b) $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = z - t\}$, $\mathbb{R}^4$;

(c) $\mathbb{W} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = p'(0)\}$, $\mathbb{R}[x]$;

(d) $\mathbb{W} = \left\{A \in \mathbb{M}_{n\times n} : A = A^T\right\}$, $\mathbb{M}_{n\times n}$.

► **Przykład 1.3.** Opisać wszystkie podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Rozwiązanie. Niech $\mathbb{W}$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Posługując się interpretacją przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ jako zbioru punktów płaszczyzny możemy wyróżnić jedynie trzy wzajemnie wykluczające się przypadki:

(1) $\mathbb{W} = \{(0, 0)\}$;

(2) zbiór $\mathbb{W}$ zawiera punkt $A \neq O = (0, 0)$ i nie zawiera żadnego punktu niewspółliniowego z punktami O i A. Jeżeli $A = (a, b)$, to dla każdego $t \in \mathbb{R}$ $(at, bt) \in \mathbb{W}$. Zatem prosta $l : x = at, y = bt$ zawiera się w zbiorze $\mathbb{W}$. Jednocześnie z założenia żaden punkt spoza prostej l nie należy do zbioru $\mathbb{W}$, a więc zbiór $\mathbb{W}$ jest prostą l. Ze względu na dowolność wyboru punktu A możemy stwierdzić, że wszystkie proste przechodzące przez początek układu współrzędnych są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^2$;

(3) zbiór $\mathbb{W}$ zawiera dwa punkty $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ niewspółliniowe z punktem O. Wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ nie są więc równoległe, czyli $ad - bc \neq 0$. Pokażemy, że w tym przypadku $\mathbb{W} = \mathbb{R}^2$. Niech bowiem $C = (x, y)$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny. Wtedy istnieją stałe α_1, α_2 takie, że $C = \alpha_1 A + \alpha_2 B$. Wynika to z faktu, że układ równań $a\alpha_1 + c\alpha_2 = x$, $b\alpha_1 + d\alpha_2 = y$ jest układem Cramera o niewiadomych α_1, α_2. Ostatecznie jedynymi podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^2$ są: $\{(0, 0)\}$, wszystkie proste przechodzące przez początek układu współrzędnych oraz $\mathbb{R}^2$.

▷ **Zadanie 1.3.** Opisać wszystkie podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Odpowiedzi. Jedynymi podprzestrzeniami $\mathbb{R}^3$ są: $\{(0, 0, 0)\}$, wszystkie proste i wszystkie płaszczyzny przechodzące przez punkt $(0, 0, 0)$ oraz $\mathbb{R}^3$.

► **Przykład 1.4.** Uzasadnić, że podane zbiory nie są podprzestrzeniami liniowymi wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{U} = \{(x, y, z) : yz \leqslant 0\}$, $\mathbb{R}^3$;

(b) $\mathbb{U} = \{(2x, x+y, 0, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^4$;

(c) $\mathbb{U} = \left\{(x_n) \colon \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 0\right\}$, $\mathbb{R}^\infty$;

(d) $\mathbb{U} = \{p : \text{stopień wielomianu } p \text{ jest parzysty}\}$, $\mathbb{R}[x]$;

(e) $\mathbb{U} = \{f : \text{funkcja } f \text{ jest monotoniczna}\}$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$;

(f) $\mathbb{U} = \{A \in \mathbb{M}_{2\times 2} : \det A = 0\}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. Aby uzasadnić, że jakiś zbiór nie jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej wystarczy wskazać dwa wektory należące do niego, których suma nie należy do tego zbioru lub wektor, który po pomnożeniu przez pewną liczbę nie należy do tego zbioru. Można też np. zauważyć, że wektor zerowy leży poza zbiorem, a to jest warunek konieczny dla podprzestrzeni liniowej. I tak podane zbiory nie są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednich przestrzeni liniowych, bowiem:

(a) $(0,3,-1), (0,-2,2) \in \mathbb{U}$, ale $(0,3,-1) + (0,-2,2) = (0,1,1) \notin \mathbb{U}$;

(b) $(0,0,0,0) \notin \mathbb{U}$;

(c) dla $x_n = 1 + 1/n$ ciąg $(x_n) \in \mathbb{U}$, ale ciąg $(-x_n) = -(x_n) \notin \mathbb{U}$;

(d) $x^4 + x^3$, $-x^4 \in \mathbb{U}$, ale $(x^4 + x^3) + (-x^4) = x^3 \notin \mathbb{U}$;

(e) $f(x) = \max\{-x, 0\}$, $g(x) = \max\{x, 0\} \in \mathbb{U}$, ale $f(x) + g(x) = |x| \notin \mathbb{U}$;

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{U}$, ale $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin \mathbb{U}$.

▷ **Zadanie 1.4.** Uzasadnić, że podane zbiory nie są podprzestrzeniami liniowymi wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{U} = \{(x,y) : |x - y| \leqslant 1\}$, $\mathbb{R}^2$;

(b) $\mathbb{U} = \{(x,y) : 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 0\}$, $\mathbb{R}^2$;

(c) $\mathbb{U} = \{(x,y,z,t) : 3|x| = 2|y|\}$, $\mathbb{R}^4$;

(d) $\mathbb{U} = \{(xy, y, x, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^4$;

(e) $\mathbb{U} = \left\{(x_n) : \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty \text{ lub } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$, $\mathbb{R}^\infty$;

(f) $\mathbb{U} = \{p : \text{ stopień wielomianu } p \text{ jest równy } 4\}$, $\mathbb{R}[x]$;

(g) $\mathbb{U} = \{p : p(0) = 0 \text{ lub } p'(0) = 0\}$, $\mathbb{R}[x]$;

(h) $\mathbb{U} = \{f : f \text{ jest funkcją niemalejącą}\}$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$;

(i*) $\mathbb{U} = \{f : f(x+y) = f(x)f(y) \text{ dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$;

(j) $\mathbb{U} = \{A : \det A > 0\}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$;

(k) $\mathbb{U} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : abcd = 0\right\}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

▶ **Przykład 1.5.** Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami liniowymi wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{W}_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = z \text{ lub } y = t\}$,
$\mathbb{W}_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = z \text{ i } y = t\}$, $\mathbb{R}^4$;

(b) $\mathbb{W}_1 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony i zbieżny}\}$,
$\mathbb{W}_2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony lub zbieżny}\}$, $\mathbb{R}^\infty$?

Rozwiązanie. Wykorzystamy fakt, że część wspólna dwóch podprzestrzeni liniowych jest też podprzestrzenią liniową, zaś ich suma mnogościowa jest podprzestrzenią jedynie w przypadku, gdy jedna z nich zawiera się w drugiej.

(a) Niech

$$\mathbb{U}_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = z\right\} \text{ oraz } \mathbb{U}_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y = t\right\}.$$

Zbiory $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Ponadto $\mathbb{W}_1 = \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2$, $\mathbb{W}_2 = \mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$. Zbiór $\mathbb{U}_1$ nie zawiera się w $\mathbb{U}_2$ ani na odwrót, np. $\boldsymbol{w}_1 = (0,1,0,2) \in \mathbb{U}_1$, ale $\boldsymbol{w}_1 \notin \mathbb{U}_2$ oraz $\boldsymbol{w}_2 = (1,0,2,0) \in \mathbb{U}_2$, ale $\boldsymbol{w}_2 \notin \mathbb{U}_1$. Zatem zbiór $\mathbb{W}_1$ nie jest, a zbiór $\mathbb{W}_2$ jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^4$.

(b) Niech

$$\mathbb{U}_1 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony}\}$$

oraz

$$\mathbb{U}_2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest zbieżny}\}.$$

Zbiory $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$. Wynika to z własności sum ciągów zbieżnych, ograniczonych i iloczynów tych ciągów przez liczby. Zauważmy, że $\mathbb{W}_1 = \mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$, $\mathbb{W}_2 = \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2$, a ponadto $\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_1$, bo każdy ciąg zbieżny jest ograniczony. Stąd wynika, że oba zbiory $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$ są podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^\infty$.

▷ **Zadanie 1.5.** Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami liniowymi wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{W}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0 \text{ lub } x = y\}$,
$\mathbb{W}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0 \text{ i } x = y\}$, $\mathbb{R}^2$;

(b) $\mathbb{W}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \text{ lub } x = 0\}$,
$\mathbb{W}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \text{ i } x = 0\}$, $\mathbb{R}^2$;

(c) $\mathbb{W}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 4y = 0 \text{ lub } 3x - z = 0\}$,
$\mathbb{W}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 4y = 0 \text{ i } 3x - z = 0\}$, $\mathbb{R}^3$;

(d) $\mathbb{W}_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \text{ lub } x^2 = 4y^2\}$,

$\mathbb{W}_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \text{ i } x^2 = 4y^2\}$, $\mathbb{R}^4$;

(e) $\mathbb{W}_1 = \Big\{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} x_n \text{ istnieje lub } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\Big\}$,

$\mathbb{W}_2 = \Big\{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} x_n \text{ istnieje i } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\Big\}$, $\mathbb{R}^\infty$;

(f) $\mathbb{W}_1 = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(0)=p(1)=0$ lub p ma co najmniej dwa miejsca zerowe$\}$
$\mathbb{W}_2 = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(0) = p(1) = 0$ i p ma co najmniej dwa miejsca zerowe$\}$,
$\mathbb{R}[x]$;

(g) $\mathbb{W}_1 = \{f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) :$ istnieje f' na $\mathbb{R}$ lub f jest funkcją stałą$\}$;
$\mathbb{W}_2 = \{f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) :$ istnieje f' na $\mathbb{R}$ i f jest funkcją stałą$\}$; $\mathbb{C}(\mathbb{R})$?

Odpowiedzi. Podprzestrzeniami liniowymi są jedynie zbiory: (a) $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$; (b) $\mathbb{W}_2$; (c) $\mathbb{W}_2$; (d) $\mathbb{W}_2$; (e) $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$; (f) $\mathbb{W}_2$; (g) $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$.

1.3. Liniowa niezależność wektorów

▶ **Przykład 1.6.** Wektor $(1,2,3)$ przedstawić na wszystkie możliwe sposoby jako kombinacje liniowe wektorów:
(a) $(2,0,6),(0,1,0),(1,1,1)$; (b) $(2,0,6),(0,1,0),(1,-1,3)$.

Rozwiązanie. (a) Z równości

$$(1,2,3) = a(2,0,6) + b(0,1,0) + c(1,1,1) = (2a + c, b + c, 6a + c),$$

gdzie $a,b,c \in \mathbb{R}$, mamy układ równań

$$\begin{cases} 2a \quad + c = 1, \\ \quad b + c = 2, \\ 6a \quad + c = 3. \end{cases}$$

Układ ten jest układem Cramera posiadającym jedyne rozwiązanie $a = 1/2$, $b = 2$, $c = 0$. Wektor $(1,2,3)$ ma więc tylko jedno przedstawienie, które jest postaci

$$(1,2,3) = \frac{1}{2}(2,0,6) + 2(0,1,0).$$

(b) Postępując podobnie z równości

$$(1,2,3) = a(2,0,6) + b(0,1,0) + c(1,-1,3) = (2a + c, b - c, 6a + 3c)$$

gdzie $a,b,c \in \mathbb{R}$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2a \quad + \quad c = 1, \\ \quad b - \quad c = 2, \\ 6a \quad + 3c = 3. \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu ma postać

$$a = \frac{1-c}{2},\ b = 2 + c,$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$. Istnieje więc nieskończenie wiele kombinacji liniowych przedstawiających wektor $(1, 2, 3)$, mianowicie

$$(1, 2, 3) = \frac{1-c}{2}(2, 0, 6) + (2 + c)(0, 1, 0) + c(1, -1, 3),$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$.

▷ **Zadanie 1.6.** Wektor $(3, -2, 5)$ przedstawić na wszystkie możliwe sposoby jako kombinacje liniowe wektorów:

(a) $(3, -2, 5)$, $(1, 1, 1)$; (b) $(3, -2, 5)$, $(1, 1, 1)$, $(0, -5, 2)$;

(c) $(1, -2, 3)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 2, -1)$; (d) $(1, -2, 3)$, $(1, 0, 1)$, $(-1, -2, 1)$.

Odpowiedzi. (a) $(3, -2, 5) = 1 \cdot (3, -2, 5) + 0 \cdot (1, 1, 1)$; (b) $(3, -2, 5) = a(3, -2, 5) + (3 - 3a)(1, 1, 1) + (1 - a)(0, -5, 2)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$; (c) $(3, -2, 5) = 1 \cdot (1, -2, 3) + 2 \cdot (1, 0, 1)$; (d) $(3, -2, 5) = a(1, -2, 3) + (4 - 2a)(1, 0, 1) + (1 - a)(-1, -2, 1)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

► **Przykład 1.7.** Zbadać z definicji liniową niezależność podanych układów wektorów we wskazanych przestrzeniach liniowych:

(a) $(2, 0, 6), (0, 1, 0), (1, -1, 3)$; $(2, 0, 6), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$, $\mathbb{R}^3$;

(b) $1 + x^2, 1 - x^2, 1 + 2x$; $1 + x, 2 - x, 3x - 5$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(c) $1, \sin x, \cos x$; $1, \operatorname{arc\,tg} x, \operatorname{arc\,ctg} x$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Rozwiązanie. Wektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_n \in \mathbb{V}$ są liniowo niezależne, jeżeli dla dowolnych α_1, α_2, …, $\alpha_n \in \mathbb{R}$ z warunku $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Gdy tak nie jest, to wektory są liniowo zależne.

(a) Warunek

$$a(2, 0, 6) + b(0, 1, 0) + c(1, -1, 3) = \mathbf{0}$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} 2a \quad + \quad c = 0, \\ \quad b - \quad c = 0, \\ 6a \quad + 3c = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu ma postać $b = c = -2a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Przyjmując np. $a = 1$ możemy napisać, że

$$(2, 0, 6) - 2(0, 1, 0) - 2(1, -1, 3) = (0, 0, 0),$$

a to oznacza liniową zależność danych wektorów.
Z kolei dla wektorów $(2,0,6)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ z warunku

$$a(2,0,6)+b(0,1,0)+c(1,1,1)=(0,0,0),$$

otrzymamy układ równań Cramera

$$\begin{cases} 2a \quad + c = 0, \\ \quad b + c = 0, \\ 6a \quad + c = 0, \end{cases}$$

który ma jedyne rozwiązanie $a=b=c=0$. Wektory $(2,0,6)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ są więc liniowo niezależne.

(b) Załóżmy, że dla $x\in\mathbb{R}$ mamy

$$a\left(1+x^2\right)+b\left(1-x^2\right)+c(1+2x)\equiv 0.$$

Po uporządkowaniu wyrazów, otrzymamy

$$(a-b)x^2+2cx+a+b+c\equiv 0.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{cases} a - b \quad\quad = 0, \\ \quad\quad 2c = 0, \\ a + b + \quad c = 0, \end{cases}$$

a więc $a=0$, $b=0$, $c=0$. To oznacza liniową niezależność pierwszej trójki wielomianów. Dla drugiej trójki z warunku

$$a(1+x)+b(2-x)+c(3x-5)\equiv 0$$

odczytujemy, że

$$\begin{cases} a - \quad b + 3c = 0, \\ a + 2b - 5c = 0. \end{cases}$$

Ten jednorodny układ równań posiada niezerowe rozwiązania, bowiem $b=-8a$, $c=-3a$, gdzie $a\in\mathbb{R}$. Dla $a=1$ otrzymujemy równość

$$(1+x)-8(2-x)-3(3x-5)\equiv 0$$

oznaczającą liniową zależność danych wielomianów.

(c) Dla $x\in\mathbb{R}$ mamy

$$a+b\sin x+c\cos x\equiv 0.$$

Przyjmując kolejno $x=0$, $x=\pi/2$ i $x=\pi$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a \quad\quad + c = 0, \\ a + b \quad\quad = 0, \\ a \quad\quad - c = 0, \end{cases}$$

którego jedyne rozwiązanie ma postać $a = b = c = 0$. Zatem dane funkcje są liniowo niezależne. Zauważmy, że dobieraliśmy tu takie wartości x, aby otrzymać układ Cramera zmiennych a, b, c.
Dla funkcji 1, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$ wstawienie różnych wartości x do warunku

$$a + b \operatorname{arc\,tg} x + c \operatorname{arc\,ctg} x \equiv 0$$

nie prowadzi niestety do układu Cramera. Należy więc podejrzewać, że funkcje te są liniowo zależne. Aby to ściśle uzasadnić, wystarczy powołać się na znaną tożsamość dla funkcji cyklometrycznych:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x \equiv \frac{\pi}{2}$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Przepisując ten warunek w postaci

$$\frac{\pi}{2} \cdot 1 - \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,ctg} x \equiv 0$$

widzimy, że dane funkcje są liniowo zależne.

▷ **Zadanie 1.7.** Zbadać z definicji liniową niezależność podanych układów wektorów we wskazanych przestrzeniach liniowych:
(a) $(1,4), (2,3), (1,1), (5,6)$, $\mathbb{R}^2$;
(b) $(1,-2,3), (1,0,1), (0,2,-1)$; $(1,-2,3), (1,0,1), (-1,-2,1)$, $\mathbb{R}^3$;
(c) $3-x$, $4+x$, $2x+3$; $2-x^3$, $3x+2$, x^2+x-1, $\mathbb{R}[x]$;
(d) $1, \cos x, \cos 2x, \cos^2 x$; $1, x, \cos x, e^x$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$;
(e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$;
(f) I, A, A^2 dla $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Odpowiedzi. Wektory są liniowo (a) zależne; (b) niezależne, zależne; (c) zależne, niezależne; (d) zależne, niezależne; (e) zależne; (f) zależne.

► **Przykład 1.8.** Uzasadnić liniową zależność podanych wektorów we wskazanych przestrzeniach liniowych:
(a) $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $\mathbb{R}^2$; (b) $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin^2 x$, $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos^2 x$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$;
(c) $(2x-3)^2$, x^2, $3x$, -1, $\mathbb{R}_2[x]$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. Wykorzystamy tutaj fakt, że wektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{V}$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

(a) Nietrudno zauważyć, że

$$(2,3) = \frac{1}{2}(1,2) + \frac{1}{2}(3,4).$$

To oznacza liniową zależność tych wektorów.

(b) Tu wystarczy wykorzystać tożsamość $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Wtedy dla $x \in \mathbb{R}$, mamy

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 0 \cdot \sin x + 0 \cdot \sin 2x - 1 \cdot \sin^2 x + 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \cos 2x + 1 \cdot \cos^2 x.\end{aligned}$$

co tłumaczy liniową zależność danych funkcji.

(c) Korzystając ze wzoru na kwadrat sumy otrzymamy

$$(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9 = 4 \cdot x^2 + (-4) \cdot (3x) + (-9) \cdot (-1),$$

co oznacza liniową zależność podanych funkcji.

(d) Zachodzi łatwa do sprawdzenia równość

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

To oznacza liniową zależność podanych wektorów z przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

▷ **Zadanie 1.8.** Uzasadnić liniową zależność podanych wektorów we wskazanych przestrzeniach liniowych:

(a) $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(1,1,1)$, $\mathbb{R}^3$;

(b) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, $x^3 + x^2 + x$, $x^3 - x^2 + x$, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $\mathbb{R}_4[x]$;

(c) $\sin x, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$;

(d) $\arcsin x, \arccos x, 1$, $\mathbb{C}\left([-1,1]\right)$.

Odpowiedzi. (a) $(1,1,1) = (2,3,4) - (1,2,3)$; (b) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = \left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right) - \left(x^3 + x^2 + x\right) - \left(x^3 - x^2 + x\right)$; (c) $\sin(\pi/3 - x) = \left(\sqrt{3}/2\right)\sin(\pi/2 - x) - (1/2)\sin x$; (d) $1 = (2/\pi)\arcsin x + (2/\pi)\arccos x$.

▶ **Przykład 1.9.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ wektorami liniowo niezależnymi w tej przestrzeni. Zbadać z definicji liniową niezależność układów wektorów:

(a) $\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} - 3\boldsymbol{w} + \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}$; (b) $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}$.

Rozwiązanie. (a) Niech

$$a\left(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\right) + b\left(\boldsymbol{v} - 3\boldsymbol{w} + \boldsymbol{x}\right) + c\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{0},$$

gdzie a, b, $c \in \mathbb{R}$. Po uporządkowaniu wyrazów otrzymamy równość

$$(a+c)\boldsymbol{u} + (2a+b)\boldsymbol{v} + (a-3b)\boldsymbol{w} + (b-c)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Z liniowej niezależności wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ wynika, że

$$\begin{cases} a \phantom{{}-3b} + c = 0, \\ 2a + b \phantom{{}-3b} = 0, \\ a - 3b \phantom{{}+c} = 0, \\ b - c = 0. \end{cases}$$

Stąd $a = b = c = 0$. Dane wektory są liniowo niezależne.

(b) Postępując podobnie załóżmy, że

$$a\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}) + b\,(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}) + c\,(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}) + d\,(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

Wtedy

$$(a+d)\,\boldsymbol{u} + (b-d)\,\boldsymbol{v} + (c+d)\,\boldsymbol{w} - (a+b+c+d)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

zatem z liniowej niezależności wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a \phantom{{}+b+c} + d = 0, \\ b \phantom{{}+c} - d = 0, \\ c + d = 0, \\ a + b + c + d = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu ma postać $b = -a$, $c = a$, $d = -a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Przyjmując np. $a = 1$ możemy napisać, że

$$(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

Badane wektory są więc liniowo zależne.

▷ **Zadanie 1.9.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ wektorami liniowo niezależnymi w tej przestrzeni. Zbadać z definicji liniową niezależność układów wektorów:

(a) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$; (b) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}+\boldsymbol{x}$;

(c) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}$; (d) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}$;

(e) $\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}+5\boldsymbol{w}, 2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+3\boldsymbol{w}, 3\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}+4\boldsymbol{w}$;

(f) $2\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}, 4\boldsymbol{u}+7\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}+2\boldsymbol{x}$.

Odpowiedzi. Wektory (a), (b), (c) są liniowo niezależne, a wektory (d), (e), (f) – zależne.

► **Przykład 1.10.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ wektorami z tej przestrzeni. Uzasadnić, że jeżeli:

(a) wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, są liniowo niezależne, to wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ też takie są;

(b) wśród wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ jest wektor zerowy, to wektory są one liniowo zależne.

Rozwiązanie. Wektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_n \in \mathbb{V}$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy jedyną kombinacją liniową tych wektorów będącą wektorem zerowym jest kombinacja o wszystkich współczynnikach zerowych. W przeciwnym przypadku mówimy, że wektory te są liniowe zależne.

(a) Niech

$$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

gdzie a, b, $c \in \mathbb{R}$. Wówczas mamy

$$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w} + 0 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Otrzymaliśmy liniową kombinacją wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, która jest wektorem zerowym. Z liniowej niezależności tych wektorów wynika, że $a = b = c = 0$. To oczywiście oznacza liniową niezależność badanych wektorów.

(b) Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Wówczas mamy

$$0 \cdot \boldsymbol{u} + 0 \cdot \boldsymbol{v} + 0 \cdot \boldsymbol{w} + 1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

To oznacza, że wektor $\boldsymbol{0}$ jest kombinacją liniową wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, której nie wszystkie współczynniki są zerowe. Wektory te są więc liniowo zależne.

▷ **Zadanie 1.10.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ wektorami z tej przestrzeni. Uzasadnić, że jeżeli wektory:

(a) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ są liniowo zależne, to wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ też są liniowo zależne;

(b) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ są liniowo niezależne, a wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ liniowo zależne, to wektor $\boldsymbol{w}$ jest kombinacją liniową wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$;

(c) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ są liniowo niezależne i wektor $\boldsymbol{x}$ nie jest kombinacją liniową tych wektorów, to wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ są liniowo niezależne;

(d) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ są liniowo niezależne, a wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ są liniowo zależne, to wektor $\boldsymbol{x}$ jest kombinacją liniową wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.

(e*) Co można powiedzieć o liniowej niezależności wektorów $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$, jeżeli wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ są liniowo zależne?

Odpowiedzi. (e*) wektory są liniowo zależne, bo $-(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}$.

► **Przykład 1.11*.** Uzasadnić, że funkcje $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, … są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Rozwiązanie. Nieskończony układ wektorów jest liniowo niezależny, jeżeli każdy jego skończony podzbiór jest liniowo niezależny. Z kolei każdy podzbiór układu liniowo niezależnego jest liniowo niezależny. Wykorzystując oba te stwierdzenia wystarczy uzasadnić liniową niezależność funkcji $\sin x$, $\sin 2x$, …, $\sin nx$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Niech zatem

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \ldots + \alpha_n \sin nx \equiv 0,$$

dla pewnych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Obliczając po obu stronach tej równości pochodne

$$\frac{d}{dx}, \ \frac{d^2}{dx^2}, \ \ldots, \ \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}},$$

otrzymamy zależności:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha_1 \cos x & + & 2\alpha_2 \cos 2x & + \ldots + & n\alpha_n \cos nx & \equiv & 0, \\
-\alpha_1 \sin x & - & 2^2\alpha_2 \sin 2x & - \ldots - & n^2\alpha_n \sin nx & \equiv & 0, \\
-\alpha_1 \cos x & - & 2^3\alpha_2 \cos 2x & - \ldots - & n^3\alpha_n \cos nx & \equiv & 0, \\
\alpha_1 \sin x & + & 2^4\alpha_2 \sin 2x & + \ldots + & n^4\alpha_n \sin nx & \equiv & 0, \\
 & & \vdots & & \vdots & & \\
\pm(\alpha_1 \cos x & + & 2^{2n-1}\alpha_2 \cos 2x & + \ldots + & n^{2n-1}\alpha_n \cos nx) & \equiv & 0.
\end{array}$$

Wstawiając $x = 0$ do wszystkich równości zawierających kosinusy (tzn. do wszystkich nieparzystych pochodnych wyjściowej równości) otrzymujemy układ równań postaci

$$\begin{cases}
\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n = 0, \\
\alpha_1 + 2^3\alpha_2 + 3^3\alpha_3 + \ldots + n^3\alpha_n = 0, \\
\alpha_1 + 2^5\alpha_2 + 3^5\alpha_3 + \ldots + n^5\alpha_n = 0, \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\alpha_1 + 2^{2n-1}\alpha_2 + 3^{2n-1}\alpha_3 + \ldots + n^{2n-1}\alpha_n = 0.
\end{cases}$$

Wyznacznik tego układu jest równy

$$\begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & \ldots & n \\
1 & 2^3 & 3^3 & \ldots & n^3 \\
1 & 2^5 & 3^5 & \ldots & n^5 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \ldots & n^{2n-1}
\end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
1 & 4 & 9 & \ldots & n^2 \\
1 & 4^2 & 9^2 & \ldots & (n^2)^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 4^{n-1} & 9^{n-1} & \ldots & (n^2)^{n-1}
\end{vmatrix}.$$

Ostatni wyznacznik jest niezerowym wyznacznikiem Vandermonde'a. Tak więc układ równań jest układem Cramera. To oznacza, że jedynym jego rozwiązaniem jest $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Stąd wynika, że badane funkcje są liniowo niezależne.

▷ **Zadanie 1.11.** Uzasadnić liniową niezależność podanych nieskończonych układów wektorów ze wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\{(1,0,0,\ldots),(1,1,0,\ldots),(1,1,1,\ldots),\ldots\}$, $\mathbb{R}^\infty$; (b) $\{1,x,x^2,\ldots\}$, $\mathbb{R}[x]$;
(c) $\left\{p_n \in \mathbb{R}[x] : p_n(x) = \dfrac{x^n-1}{x-1} \text{ dla } x \neq 1, n \in \mathbb{N}\right\}$, $\mathbb{R}[x]$;
(d*) $\{1,\cos x,\cos 2x,\ldots\}$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$; (e*) $\{e^{tx} : t \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

1.4. Baza i wymiar przestrzeni liniowej

► **Przykład 1.12.** Opisać (geometrycznie lub słownie) zbiory $\operatorname{lin} A$, jeżeli:
(a) $A = \{(1,3,1),(0,5,2)\} \subset \mathbb{R}^3$; (b) $A = \{x, x^3, x^5, x^7\} \subset \mathbb{R}[x]$;
(c) $A = \left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&3\\3&0\end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. Jeżeli $A = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, gdzie $\boldsymbol{v}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ są elementami przestrzeni liniowej, to operację generowania $\operatorname{lin} A$ definiujemy jako zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów ze zbioru A, czyli

$$\operatorname{lin} A = \{\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n : \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

(a) Mamy

$$\operatorname{lin} A = \{s(1,3,1) + t(0,5,2) : s,t \in \mathbb{R}\} = \{(s, 3s+5t, s+2t) : s,t \in \mathbb{R}\}.$$

Ponieważ wektory $(1,3,1)$, $(0,5,2)$ są niewspółliniowe, więc zbiór $\operatorname{lin} A$ jest płaszczyzną w $\mathbb{R}^3$ o równaniu parametrycznym

$$\begin{cases} x = s, \\ y = 3s + 5t, \text{ gdzie } t,\, s \in \mathbb{R} \\ z = s + 2t, \end{cases}$$

lub ogólnym $x - 2y + 5z = 0$.

(b) Tutaj

$$\operatorname{lin} A = \left\{ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 : a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}.$$

Niech wielomian $p \in \operatorname{lin} A$. Wówczas $p(-x) = -p(x)$. Niech teraz p_1 będzie wielomianem stopnia nie większego niż 7 o własności $p_1(-x) = -p_1(x)$, czyli

$$p_1(x) = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_i \in \mathbb{R},$$

gdzie $0 \leqslant i \leqslant 7$. Z warunku $p_1(-x) + p_1(x) \equiv 0$ wynika, że $a_6 = a_4 = a_2 = a_0 = 0$. Zatem $p_1 \in \operatorname{lin} A$. Oznacza to, że zbiór $\operatorname{lin} A$ składa się ze wszystkich wielomianów stopnia nie większego niż 7, będących jednocześnie funkcjami nieparzystymi.

(c) W tym przykładzie mamy

$$\operatorname{lin} A = \left\{a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0&3\\3&0\end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}a&3c\\3c&2b\end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Otrzymaliśmy zbiór wszystkich macierzy symetrycznych stopnia 2.

▷ **Zadanie 1.12.** Opisać (geometrycznie lub słownie) zbiory $\operatorname{lin} A$, jeżeli:

(a) $A = \{(5,-1,4),(-10,2,-8)\} \subset \mathbb{R}^3$;

(b) $A = \{x+3, x(x+3), x^2(x+3), x^3(x+3)\} \subset \mathbb{R}[x]$;

(c) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_{3\times 3}$;

(d*) $A = \{(1,1,1,1,1,\ldots),(0,2,2,2,2,\ldots),(0,0,3,3,3,\ldots),\ldots\} \subset \mathbb{R}^\infty$.

Odpowiedzi. (a) prosta $x = 5t$, $y = -t$, $z = 4t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$; (b) $\{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(-3) = 0\}$; (c) zbiór macierzy antysymetrycznych stopnia 3; (d*) zbiór wszystkich ciągów stałych od pewnego miejsca.

▶ **Przykład 1.13.** Wyznaczyć generatory podanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{V} = \{(x-2y, x+y+3z, y-4z, 2x+z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\mathbb{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}\right\}$;

(c) $\mathbb{V} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) + p'(0) = p'(1) + p''(0) = 0\}$;

(d) $\mathbb{V} = \left\{ A \in \mathbb{M}_{3\times 3} : A \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A \right\}$.

Rozwiązanie. Elementy $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, v_n$ zbioru $\mathbb{V}$ nazywamy jego generatorami, jeżeli

$$\mathbb{V} = \operatorname{lin}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, v_n\}.$$

(a) Ponieważ

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \{(x-2y, x+y+3z, y-4z, 2x+z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,1,0,2) + y(-2,1,1,0) + z(0,3,-4,1) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{lin}\{(1,1,0,2),(-2,1,1,0),(0,3,-4,1)\}, \end{aligned}$$

więc wektory $(1,1,0,2)$, $(-2,1,1,0)$, $(0,3,-4,1)$ są generatorami przestrzeni $\mathbb{V}$.

(b) Warunek definiujący zbiór $\mathbb{V}$ jest równaniem kierunkowym prostej o równaniu parametrycznym $x = 2s$, $y = 3s$, $z = -s$, a więc

$$\mathbb{V} = \{(2s, 3s, -s) : s \in \mathbb{R}\} = \{s(2,3,-1) : s \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(2,3,-1)\},$$

czyli wektor $(2,3,-1)$ jest generatorem przestrzeni $\mathbb{V}$.

(c) Niech $p \in \mathbb{V}$. Wówczas $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ oraz

$$p(1) + p'(0) = a + b + c + 2d + e = 0,$$
$$p'(1) + p''(0) = 4a + 3b + 4c + d = 0.$$

Stąd wynikają równości $d = -4a - 3b - 4c, e = 7a + 5b + 7c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + (-4a - 3b - 4c)x + 7a + 5b + 7c \\ &= a\left(x^4 - 4x + 7\right) + b\left(x^3 - 3x + 5\right) + c\left(x^2 - 4x + 7\right). \end{aligned}$$

To oznacza, że

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \left\{a\left(x^4 - 4x + 7\right) + b\left(x^3 - 3x + 5\right) + c\left(x^2 - 4x + 7\right) : a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{lin}\left\{x^4 - 4x + 7, x^3 - 3x + 5, x^2 - 4x + 7\right\}. \end{aligned}$$

Zatem generatorami przestrzeni $\mathbb{V}$ są wielomiany:

$$x^4 - 4x + 7,\ x^3 - 3x + 5,\ x^2 - 4x + 7.$$

(d) Niech $A = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ x & y & z \end{bmatrix}$ będzie dowolną macierzą z przestrzeni $\mathbb{M}_{3\times 3}$. Wtedy

$$A \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & q & p \\ u & t & s \\ z & y & x \end{bmatrix}.$$

Zatem warunek

$$A \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

ma postać

$$\begin{bmatrix} r & q & p \\ u & t & s \\ z & y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ x & y & z \end{bmatrix}.$$

Stąd wynikają równości

$$\begin{cases} r = p, \\ u = s, \\ z = x, \end{cases}$$

gdzie $p, q, s, t, x, y \in \mathbb{R}$. Zatem macierz A ma postać

$$A = \begin{bmatrix} p & q & p \\ s & t & s \\ x & y & x \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\begin{bmatrix} p & q & p \\ s & t & s \\ x & y & x \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

więc można przyjąć, że macierze

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

generują przestrzeń $\mathbb{V}$.

▷ **Zadanie 1.13.** Wyznaczyć generatory podanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x - y + 2z = 0\}$;

(b) $\mathbb{V} = \{(2r + s - t, t - u, r + 3s + u, s + u, t - u) : r, s, t, u \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\mathbb{V} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = y - z = z - t\}$;

(d) $\mathbb{V} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) + p(2) = p(3) + p'(0)\}$.

Odpowiedzi. Przestrzenie są generowane np. przez wektory (a) $(1, 4, 0)$, $(0, 2, 1)$; (b) $(2, 0, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 3, 1, 0)$, $(-1, 1, 0, 0, 1)$, $(0, -1, 1, 1, -1)$; (c) $(1, 0, -1, -2)$, $(0, 1, 2, 3)$; (d) $x^3 + 18$, $x^2 + 4$, $x + 1$.

► **Przykład 1.14.** Sprawdzić z definicji, czy podane zbiory wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(b) $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2), (0, 1, 1)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(c) $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2), (2, 2, 3)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(d) $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2), (0, 1, 1), (2, 3, 4)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(e) $B = \{x^2 + 1, x^2 + 2x + 2, x + 1\}$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(f) $B = \{x^2 + 1, x^2 + 2x + 2, 2x^2 + 2x + 3\}$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(g) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. Zbiór $B \subset \mathbb{V}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, gdy jest liniowo niezależny i generuje tę przestrzeń.

(a) Zbiór B jest liniowo niezależny, ale nie generuje przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdyż np. wektora $(0, 0, 1)$ nie da się przedstawić w postaci kombinacji liniowej danych wektorów. Więc nie jest to baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(b) Standardowo można uzasadnić, że zbiór B jest liniowo niezależny. Niech $\boldsymbol{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Szukamy współczynników $a, b, c \in \mathbb{R}$ takich, że

$$\boldsymbol{v} = a(1, 0, 1) + b(1, 2, 2) + c(0, 1, 1).$$

Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a + b = x, \\ 2b + c = y, \\ a + 2b + c = z. \end{cases}$$

Układ ten jest układem Cramera, gdyż jego wyznacznik jest różny od 0. Więc ma jednoznaczne rozwiązanie. To oznacza, że zbiór B generuje przestrzeń $\mathbb{R}^3$, a zatem jest jej bazą.

(c) Zbiór B jest liniowo zależny, bo np.

$$(2, 2, 3) = (1, 0, 1) + (1, 2, 2).$$

Nie jest więc bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(d) Zbiór B generuje przestrzeń $\mathbb{R}^3$, bo zawiera wszystkie wektory z przykładu (b). Jednak nie jest bazą $\mathbb{R}^3$, bo np. zachodzi związek

$$(2, 3, 4) = (1, 0, 1) + (1, 2, 2) + (0, 1, 1),$$

co przeczy liniowej niezależności elementów tego zbioru.

(e) Pokażemy, że wielomiany

$$x^2 + 1, \ x^2 + 2x + 2, \ x + 1$$

są liniowo niezależne. Niech

$$a\left(x^2 + 1\right) + b\left(x^2 + 2x + 2\right) + c(x + 1) \equiv 0.$$

Wtedy

$$(a + b)x^2 + (2b + c)x + a + 2b + c \equiv 0.$$

Stąd otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ 2b + c = 0, \\ a + 2b + c = 0, \end{cases}$$

którego jedynym rozwiązaniem jest $a = b = c = 0$. To oznacza, że zbiór B jest liniowo niezależny. Niech $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ będzie dowolnym wielomianem z przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$. Pokażemy, że istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c, dla których

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma = a\left(x^2 + 1\right) + b\left(x^2 + 2x + 2\right) + x(x + 1) \\ &= (a + b)x^2 + b\left(x^2 + 2x + 2\right) + c(x + 1). \end{aligned}$$

Warunek ten jest równoważny układowi równań

$$\begin{cases} a + b = \alpha, \\ 2b + c = \beta, \\ a + 2b + c = \gamma. \end{cases}$$

Powyższy układ jest układem Cramera, gdyż jego wyznacznik jest różny od zera. Istnieje więc jednoznaczne rozwiązanie To z kolei oznacza, że $\operatorname{lin} B = \mathbb{R}_2[x]$.

(f) Zauważmy, że

$$2x^2 + 2x + 3 = \left(x^2 + 1\right) + \left(x^2 + 2x + 2\right).$$

Zbiór B jest więc liniowo zależny. Zatem nie jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.

(g) Najpierw pokażemy, że macierze

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne. Niech

$$a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0, \\ b + c + d = 0, \\ c + d = 0, \\ d = 0. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest $a = b = c = d = 0$. Zatem rozważane macierze są liniowo niezależne. Pokażemy teraz, że

$$\mathbb{M}_{2\times 2} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Niech $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ będzie dowolną macierzą z przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$. Pokażemy, że istnieją współczynniki a, b, c, d takie, iż

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Powyższy warunek jest równoważny układowi równań

$$\begin{cases} a + b + c + d = \alpha, \\ b + c + d = \beta, \\ c + d = \gamma, \\ d = \delta. \end{cases}$$

Jest to układ Cramera, gdyż jego wyznacznik jest różny od 0. Istnieje więc jednoznaczne rozwiązanie tego układu. Zatem rozważane macierze generują przestrzeń $\mathbb{M}_{2\times 2}$. Ponieważ spełnione są oba warunki definicji bazy, więc macierze:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

▷ **Zadanie 1.14.** Sprawdzić z definicji, czy podane zbiory wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $B = \{(2,5),(3,1),(6,-7)\}$, $\mathbb{R}^2$; (b) $B = \{(2,3,-1),(1,-3,2)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(c) $B = \{(1,-1,4),(3,0,1),(2,1,-2)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(d) $B = \{2x+4, 3x-x^2, -2x^2+4x-4\}$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(e) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Odpowiedzi. (a), (b), (d) nie; (c), (e) tak.

► **Przykład 1.15.** Zbór wektorów $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ jest bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Zbadać z definicji, czy podane zbiory wektorów też są bazami tej przestrzeni:

(a) $\{\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3, 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3\}$;

(b) $\{\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3, 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2, 3\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3\}$.

Rozwiązanie.

(a) Niech $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3$. Zbadamy teraz liniową niezależność tych wektorów. Niech

$$a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0},$$

przy czym $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\begin{aligned} a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3 &= a\,(\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3) + b\,(2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3) \\ &= (a + 2b + c)\boldsymbol{b}_1 + (-2a - b + c)\boldsymbol{b}_2 + (a - c)\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Z liniowej niezależności wektorów $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ wynika, że współczynniki a, b, c spełniają układ równań

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0, \\ -2a - b + c = 0, \\ a - c = 0. \end{cases}$$

Stąd $a = -b = c$. Biorąc np. $a = 1$ otrzymujemy równość $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$, z której wynika liniowa zależność badanych wektorów. Więc nie są one bazą

przestrzeni $\mathbb{V}$.

(b) Niech $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ będą jak wyżej oraz niech $\boldsymbol{u}_3 = 3\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$. Pokażemy, że zdefiniowane powyżej wektory są liniowo niezależne. Z warunku

$$a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0},$$

gdzie a, b, $c \in \mathbb{R}$, wynika, że

$$\begin{aligned} a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3 &= a\left(\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3\right) + b\left(2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2\right) + c\left(3\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3\right) \\ &= (a + 2b)\boldsymbol{b}_1 + (-2a - b + 3c)\boldsymbol{b}_2 + (a + c)\boldsymbol{b}_3 = 0. \end{aligned}$$

Z liniowej niezależności wektorów $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ wnioskujemy, że współczynniki a, b, c spełniają układ równań

$$\begin{cases} a + 2b = 0, \\ -2a - b + 3c = 0, \\ a + c = 0. \end{cases}$$

Ponieważ jest to układ Cramera, więc $a = b = c = 0$. To oznacza liniową niezależność danych wektorów. Sprawdzimy teraz, czy generują one przestrzeń $\mathbb{V}$, tzn., czy dla dowolnego wektora $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ istnieją takie a, b, $c \in \mathbb{R}$, że zachodzi równość

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3.$$

Niech więc $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{b}_1 + \beta\boldsymbol{b}_2 + \gamma\boldsymbol{b}_3$, gdzie α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$. Z równości

$$a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3 = \alpha\boldsymbol{b}_1 + \beta\boldsymbol{b}_2 + \gamma\boldsymbol{b}_3$$

wynika, że

$$(a + 2b - \alpha)\,\boldsymbol{b}_1 + (-2a - b + 3c - \beta)\,\boldsymbol{b}_2 + (a + c - \gamma)\,\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}.$$

Korzystamy ponownie z liniowej niezależności wektorów bazy $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ i otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} a + 2b = \alpha, \\ -2a - b + 3c = \beta, \\ a + c = \gamma. \end{cases}$$

Jest to układ Cramera, gdyż jego wyznacznik, jest różny od zera. Istnieje więc jednoznaczne rozwiązanie tego układu. Stąd wniosek, że $\mathbb{V} = \operatorname{lin}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, czyli wektory $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ tworzą bazę $\mathbb{V}$.

▷ **Zadanie 1.15.** Zbiór wektorów $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ jest bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Zbadać z definicji, czy podane zbiory wektorów też są bazami przestrzeni $\mathbb{V}$:
(a) $\{\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, 3\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\}$; (b) $\{\boldsymbol{u}, 2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, 3\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + 4\boldsymbol{w}\}$.

Odpowiedzi. (a) nie; (b) tak.

► **Przykład 1.16.** Obliczając odpowiednie wyznaczniki sprawdzić, czy podane zbiory wektorów są bazami podanych przestrzeni:
(a) $\{(3,2),(-6,4)\}$, $\mathbb{R}^2$;
(b) $\{(3,2,0),(4,2,-1),(1,2,2)\}$, $\mathbb{R}^3$;
(c) $\{(1,0,0,1),(1,2,2,1),(5,4,4,5),(0,0,1,1)\}$, $\mathbb{R}^4$.

Rozwiązanie. Skorzystamy z faktu, że zbiór n wektorów tworzy bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy ich współrzędnych kartezjańskich jest różny od zera. Element w i-tym wierszu i j-tej kolumnie tej macierzy jest j-tą współrzędną i-tego wektora.
(a) Jest to baza, bowiem

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0.$$

(b) Z równości

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

wynika, że rozważane wektory nie tworzą bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
(c) Podobnie z równości

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} w_2 - w_1 \\ w_3 - 5w_1 \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \|w_3 - 2w_2\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

wynika, że dane wektory nie tworzą bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

▷ **Zadanie 1.16.** Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ podane zbiory wektorów odpowiednich przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są bazami $\mathbb{R}^n$:
(a) $\{(p-2,-p),(3,2+p)\}$, $\mathbb{R}^2$;
(b) $\{(1,3,p),(p,0,-p),(1,2,1)\}$, $\mathbb{R}^3$;
(c) $\{(1,1,1,1),(1,p,2,3),(1,p^2,4,9),(1,p^3,8,27)\}$, $\mathbb{R}^4$;
(d*) $\{(0,1,1,\ldots,1),(p,0,1,\ldots,1),(p,p,0,\ldots,1),\ldots,(p,p,p,\ldots,0)\}$, $\mathbb{R}^n$?

Odpowiedzi. (a) $p \in \mathbb{R} \setminus \{-4,1\}$; (b) $p \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$; (c) $p \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$;
(d*) $p \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$ lub $p=-1$ i n jest liczbą parzystą.

► **Przykład 1.17.** Wskazać bazy i określić wymiary podanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{V} = \{(2x, x+y, 3x-y, x-2y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\mathbb{V} = \{(r-2s-t, 2r+s-3t, 3r+4s-5t) : r, s, t \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\mathbb{V} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z - y\}$;

(d) $\mathbb{V} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) + p(-1) = p'(0)\}$;

(e) $\mathbb{V} = \left\{A \in \mathbb{M}_{3\times 3} : A + A^T = O\right\}$;

(f) $\mathbb{V} = \operatorname{lin}\{1, \sin^2 x, \cos 2x, \cos^2 x\}$, przy czym $\mathbb{V} \subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Rozwiązanie. Wymiarem przestrzeni liniowej nazywamy liczbę wektorów jej bazy.

(a) Z zależności

$$(2x, x+y, 3x-y, x-2y) = x(2,1,3,1) + y(0,1,-1,-2)$$

wynika, że wektory $\boldsymbol{v}_1 = (2,1,3,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,-1,-2)$ generują przestrzeń $\mathbb{V}$. Łatwo sprawdzić z definicji ich liniową niezależność. To oznacza, że zbiór $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{V}$. Dlatego $\dim \mathbb{V} = 2$.

(b) Ponieważ

$$(r-2s-t, 2r+s-3t, 3r+4s-5t) = r(1,2,3) + s(-2,1,4) + t(-1,-3,-5),$$

więc przestrzeń $\mathbb{V}$ jest generowana przez wektory $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,1,4)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,-3,-5)$. Jednak

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli wyznacznik macierzy ich współrzędnych jest równy 0. To oznacza liniową zależność tego układu wektorów. Nie są więc bazą przestrzeni $\mathbb{V}$. Zauważmy teraz, że wektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ są liniowo niezależne oraz, że

$$\boldsymbol{v}_3 = -\frac{7}{5}\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{5}\boldsymbol{v}_2,$$

czyli generują przestrzeń $\mathbb{V}$. Zatem tworzą bazą przestrzeni $\mathbb{V}$, więc $\dim \mathbb{V} = 2$.

(c) Warunek $x + y = z - y$ zapiszemy w postaci $x = z - 2y$. Mamy więc

$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \{(z-2y, y, z, t) : y, z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2,1,0,0) + z(1,0,1,0) + t(0,0,0,1) : y, z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{lin}\{(-2,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,0,1)\}. \end{aligned}$$

Liniowa niezależność otrzymanych trzech generatorów przestrzeni $\mathbb{V}$ wynika z tego, że $(z-2y, y, z, t) = (0,0,0,0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = z = t = 0$.

Te gneratory są zarazem bazą $\mathbb{V}$. Zatem $\dim \mathbb{V} = 3$.

(d) Niech $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \in \mathbb{V}$. Z warunku $p(1) + p(-1) = p'(0)$ wynika równość

$$(a + b + c + d + e) + (a - b + c - d + e) = d,$$

stąd $d = 2a + 2c + 2e$. Zatem

$$p(x) = a\left(x^4 + 2x\right) + bx^3 + c\left(x^2 + 2x\right) + e(2x + 1).$$

Generatorami przestrzeni $\mathbb{V}$ są więc wielomiany

$$p_1(x) = x^4 + 2x,\ p_2(x) = x^3,\ p_3(x) = x^2 + 2x,\ p_4(x) = 2x + 1.$$

Są one liniowo niezależne, bo $p(x) \equiv 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = c = e = 0$. To oznacza, że są bazą przestrzeni $\mathbb{V}$. Zatem $\dim \mathbb{V} = 4$.

(e) Niech $A \in \mathbb{V}$. Warunek $A + A^T = O$ oznacza, że A jest macierzą antysymetryczną. Zatem ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix},\ \text{gdzie}\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Z tej postaci wynika, że bazę przestrzeni $\mathbb{V}$ stanowią macierze:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem $\dim \mathbb{V} = 3$.

(f) Ponieważ $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, więc $\mathbb{V} = \operatorname{lin}\left\{\sin^2 x, \cos 2x, \cos^2 x\right\}$. Korzystając teraz ze wzoru $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ mamy $\mathbb{V} = \operatorname{lin}\left\{\sin^2 x, \cos^2 x\right\}$. Funkcje $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ są liniowo niezależne. Niech bowiem $a \sin^2 x + b \cos^2 x = 0$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Wówczas przyjmując kolejno $x = 0$ i $x = \pi/2$ otrzymujemy $b = 0$, $a = 0$. Funkcje te tworzą więc bazę przestrzeni $\mathbb{V}$. Zatem $\dim \mathbb{V} = 2$.

▷ **Zadanie 1.17.** Wskazać bazy i określić wymiary podanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{V} = \{(x + y + z, x - y, x - z, y - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\mathbb{V} = \{(a + 2b + c, 3a - b + 2c, 5a + 3b + 4c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\mathbb{V} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y = z - t = 0\}$;

(d) $\mathbb{V} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(2x) = 4xp'(x) + p(0)\}$;

(e) $\mathbb{V} = \{A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{3\times 4} : a_{ij} = 0\ \text{dla}\ i \leqslant j\}$;

(f) $\mathbb{V} = \operatorname{lin}\{1, e^x, e^{-x}, \sinh x, \cosh x\}$, przy czym $\mathbb{V} \subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Odpowiedzi. Jedną z baz jest np.

(a) $B = \{(1,1,1,0), (1,-1,0,1), (1,0,-1,-1)\}$, $\dim V = 3$;

(b) $B = \{(1,3,5), (2,-1,3)\}$, $\dim V = 2$; (c) $B = \{(1,2,0,0), (0,0,1,1)\}$, $\dim V = 2$;

(d) $B = \{x^4, 1\}$, $\dim V = 2$;

(e) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim V = 3$;

(f) $B = \{1, e^x, e^{-x}\}$, $\dim V = 3$.

► **Przykład 1.18.** Podane zbiory wektorów liniowo niezależnych uzupełnić do baz wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\{(2,1,0), (1,1,1)\}, \mathbb{R}^3$; (b) $\{(1,3,2,1), (5,-4,7,1)\}, \mathbb{R}^4$;

(c) $\{(x-1)^2, x^3 - 5x, 1 - 4x + 2x^2\}, \mathbb{R}_3[x]$;

(d) $\{1 + x, x^2 + x^3, x^4 + x^5\}, \mathbb{R}_5[x]$.

Rozwiązanie. Skorzystamy tu z faktu, że dowolny układ n liniowo niezależnych wektorów w przestrzeni liniowej wymiaru n stanowi bazę tej przestrzeni.

(a) Wymiar przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest równy 3. Zatem do wskazanych wektorów (liniowo niezależnych) wystarczy dobrać jeszcze jeden wektor liniowo niezależny z nimi. Z warunku

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

wynika, że może to być np. wektor $(0,0,1)$. Zauważmy jeszcze, że dowolny wektor $\boldsymbol{v} = (a,b,c)$, dla którego $a - 2b + c \neq 0$, także tworzy z danymi wektorami bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(b) Przestrzeń $\mathbb{R}^4$ jest czterowymiarowa. Dobierzemy więc jeszcze dwa wektory tak, aby odpowiedni wyznacznik był różny od zera. Ze względów rachunkowych najłatwiej jest je wybrać spośród wektorów bazy standardowej, np. $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ i wtedy rzeczywiście

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -19 \neq 0.$$

(c) Ponieważ rozważana przestrzeń ma wymiar 4, a dane trzy wektory są liniowo niezależne, więc w bazie brakuje jednego wektora. Wektor ten wystarczy wybrać spośród wektorów innej bazy przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$, najłatwiej spośród bazy standardowej. Będziemy więc próbowali dołączyć do naszego zbioru

wektorów kolejne wektory bazy $\{1, x, x^2, x^3\}$ sprawdzając za każdym razem liniową niezależność całego zbioru. Oznaczmy $p_1(x) = (x-1)^2$, $p_2(x) = x^3 - 5x$, $p_3(x) = 1 - 4x + 2x^2$. Niech najpierw $p_4(x) \equiv 1$ oraz niech

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) + \alpha_4 p_4(x) \equiv 0$$

dla α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \in \mathbb{R}$. Wówczas z warunku

$$\alpha_1 \left(x^2 - 2x + 1\right) + \alpha_2 \left(x^3 - 5x\right) + \alpha_3 \left(1 - 4x + 2x^2\right) + \alpha_4 \equiv 0,$$

po uporządkowaniu wyrazów, otrzymamy

$$\alpha_2 x^3 + (\alpha_1 + 2\alpha_3)\, x^2 + (-2\alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3)\, x + \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 \equiv 0.$$

Stąd wobec równości wielomianów wynika, wynika równość współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej x, co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem są $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = -2\alpha_3$, $\alpha_4 = \alpha_3$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Układ funkcji p_1, p_2, p_3, p_4 jest liniowo zależny, bo np. $-2p_1(x) + p_3(x) + p_4(x) \equiv 0$ i nie jest bazą.

Niech teraz $p_4(x) = x$. Z zależności

$$\alpha_1 \left(x^2 - 2x + 1\right) + \alpha_2 \left(x^3 - 5x\right) + \alpha_3 \left(1 - 4x + 2x^2\right) + \alpha_4 x \equiv 0$$

po uporządkowaniu wyrazów, mamy

$$\alpha_2 x^3 + (\alpha_1 + 2\alpha_3)\, x^2 + (-2\alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4)\, x + \alpha_1 + \alpha_3 \equiv 0.$$

Analogicznie jak powyżej, z równości wielomianów wynika, że współczynniki α_1, α_2, α_3, α_4 spełniają układ równań

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, bowiem jest to układ Cramera, gdyż jego wyznacznik spełnia warunek

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Ostatecznie dany zbiór wektorów można uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ dodając np. wektor $p_4(x) = x$.

(d) W tym przykładzie, podobnie jak w (c), możemy brakujące trzy wektory dobrać spośród wektorów bazy standardowej $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ przestrzeni $\mathbb{R}_5[x]$. Łatwo sprawdzić, dodając kolejne wektory bazy standardowej, że zbiór wektorów:

$$\begin{aligned}
&\{1+x, x^2+x^3, x^4+x^5, 1\} && \text{jest liniowo niezależny,}\\
&\{1+x, x^2+x^3, x^4+x^5, 1, x\} && \text{jest liniowo zależny,}\\
&\{1+x, x^2+x^3, x^4+x^5, 1, x^2\} && \text{jest liniowo niezależny,}\\
&\{1+x, x^2+x^3, x^4+x^5, 1, x^2, x^3\} && \text{jest liniowo zależny,}\\
&\{1+x, x^2+x^3, x^4+x^5, 1, x^2, x^4\} && \text{jest liniowo niezależny,}
\end{aligned}$$

więc ostatni z rozważanych zbiorów jest już szukaną bazą.

Uwaga. W przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$ układ $n+1$ wielomianów zawierający po jednym wielomianie stopnia k dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ stanowi jej bazę. Dlatego w przykładzie (d) od razu można zauważyć, że w bazie brakuje wielomianów stopnia 0, 2 oraz 4.

▷ **Zadanie 1.18.** Podane zbiory wektorów liniowo niezależnych uzupełnić do baz wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\{(-1,5,3)\}$, $\mathbb{R}^3$; (b) $\{(1,0,1,-1),(2,3,-1,2),(3,3,2,1)\}$, $\mathbb{R}^4$;

(c) $\{2x-3, x^3+4x-1\}$, $\mathbb{R}_3[x]$; (d) $\{x^2+5, x^2-3x, x^4-2x^3\}$, $\mathbb{R}_4[x]$;

(e*) $\{1, 1+x^2, 1+x^2+x^4, 1+x^2+x^4+x^6, \ldots,\}$, $\mathbb{R}[x]$.

Odpowiedzi. Można uzupełnić np. o wektory (a) $(0,1,0)$, $(0,0,1)$; (b) $(1,0,0,0)$; (c) $1, x^2$; (d) $1, x^3$; (e*) x, x^3, x^5, $x^7, \ldots$

1.5. Współrzędne wektora w bazie

► **Przykład 1.19.** Znaleźć współrzędne podanych wektorów we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych:

(a) $\boldsymbol{v} = (-2,5,6)$, $\{(1,1,0),(2,1,0),(3,3,1)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(b) $\boldsymbol{v} = (1,0,1,0)$, $\{(1,2,3,4),(0,1,2,3),(0,0,1,2),(0,0,0,1)\}$, $\mathbb{R}^4$;

(c) $p(x) = 2x^2+3x$, $\{2+x, 3-x, x^2+4\}$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. (a) Współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ wektora $\boldsymbol{v}$ znajdziemy z warunku

$$(-2,5,6) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(2,1,0) + \alpha_3(3,3,1),$$

który prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -2, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 5, \\ \alpha_3 = 6. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $\alpha_1 = -6$, $\alpha_2 = -7$, $\alpha_3 = 6$. Zatem współrzędnymi wektora $\boldsymbol{v}$ są $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [-6, -7, 6]$.

(b) Współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ wektora $\boldsymbol{v}$ spełniają zależność

$$(1, 0, 1, 0) = \alpha_1(1, 2, 3, 4) + \alpha_2(0, 1, 2, 3) + \alpha_3(0, 0, 1, 2) + \alpha_4(0, 0, 0, 1).$$

Otrzymujemy więc układ równań

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1, \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0, \end{cases}$$

z którego wynika, że $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = [1, -2, 2, -2]$.

(c) Wektor p przedstawiamy w postaci

$$2x^2 + 3x = \alpha_1(2 + x) + \alpha_2(3 - x) + \alpha_3\left(x^2 + 4\right).$$

Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy równość

$$2x^2 + 3x = \alpha_3 x^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\, x + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3.$$

Z równości wielomianów wynika równość współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej x, co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \alpha_3 = 2, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 3, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $\alpha_1 = 1/5$, $\alpha_2 = -14/5$, $\alpha_3 = 2$. Zatem współrzędne wektora p w danej bazie są równe $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \left[\frac{1}{5}, -\frac{14}{5}, 2\right]$.

(d) Podobnie jak poprzednio zachodzi równość

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

z której wynika, że

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 & -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Po rozwiązaniu układu równań

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \\ \alpha_4 = 3, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

otrzymamy współrzędne rozważanego wektora $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \left[\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 3\right]$.

▷ **Zadanie 1.19.** Znaleźć współrzędne podanych wektorów we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych:

(a) $\boldsymbol{v} = (1, 4)$, $\{(1, 5), (1, 6)\}$, $\mathbb{R}^2$;

(b) $\boldsymbol{v} = (8, 1, 7, 5)$, $\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$, $\mathbb{R}^4$;

(c) $p(x) = x^2 - 3x + 3$, $\left\{x^2 + 3x - 1, -x^2 + x + 3, 2x^2 - x - 2\right\}$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Odpowiedzi. (a) $[2, -1]$; (b) $[7, -6, 2, 5]$; (c) $[-1, 2, 2]$; (d) $[1, 0, 1, 0]$.

► **Przykład 1.20.** Wyznaczyć współrzędne wektora $\boldsymbol{v}$ w bazie $\mathcal{B}'$ pewnej przestrzeni liniowej znając jego współrzędne w bazie $\mathcal{B}$ tej przestrzeni:

(a) $[0, 1, -2]$, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$, $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_3\}$;

(b) $[2, 0, 1, 1]$, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\}$, $\mathcal{B}' = \{-\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, 3\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4\}$;

(c) $[3, 2, 1]$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$;

(d) $[1, 2, \ldots, n]$, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \boldsymbol{b}_n\}$.

Rozwiązanie. (a) Z danych wynika, że

$$\boldsymbol{v} = 0 \cdot \boldsymbol{b}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{b}_2 + (-2) \cdot \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3.$$

Niech $\boldsymbol{b}'_1 = \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}'_2 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}'_3 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_3$. Wtedy

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}'_1, \ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}'_1 - \boldsymbol{b}'_2, \ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}'_1 - \boldsymbol{b}'_3,$$

a zatem

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}'_1 - \boldsymbol{b}'_2 - 2\left(\boldsymbol{b}'_1 - \boldsymbol{b}'_3\right) = -\boldsymbol{b}'_1 - \boldsymbol{b}'_2 + 2\boldsymbol{b}'_3.$$

Szukane współrzędne wynoszą więc $[-1, -1, 2]$.

(b) W tym przypadku $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4$. Przyjmijmy $\boldsymbol{b}'_1 = -\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}'_2 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}'_3 = 3\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{b}'_4 = \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4$. Podobnie jak poprzednio wektory bazy $\mathcal{B}$ przedstawiamy jako kombinacje liniowe wektorów bazy $\mathcal{B}'$ otrzymując:

$$\boldsymbol{b}_1 = -\boldsymbol{b}'_1, \ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}'_1 + \boldsymbol{b}'_2, \ \boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{3}\boldsymbol{b}'_3, \ \boldsymbol{b}_4 = -\frac{1}{3}\boldsymbol{b}'_3 + \boldsymbol{b}'_4.$$

Stąd wynika, że

$$\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{b}_1' + \frac{1}{3}\boldsymbol{b}_3' - \frac{1}{3}\boldsymbol{b}_3' + \boldsymbol{b}_4' = -2\boldsymbol{b}_1' + \boldsymbol{b}_4'.$$

Otrzymujemy więc współrzędne $[-2, 0, 0, 1]$.

(c) Zauważmy, że

$$\boldsymbol{v} = 3(1,1,1) + 2(1,1,0) + (1,0,0) = (6,5,3).$$

Zatem nowe współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ wektora $\boldsymbol{v}$ w bazie $\mathcal{B}'$ spełniają zależność

$$(6,5,3) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(0,1,1).$$

Otrzymujemy więc układ równań

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 6, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 5, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem są $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 2$ i $\alpha_3 = 1$. Ostatecznie $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [4, 2, 1]$.

(d) Niech $\boldsymbol{b}_1' = \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{b}_n' = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \boldsymbol{b}_n$. Łatwo zauważyć, że

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_1',\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_2' - \boldsymbol{b}_1',\ \ldots,\ \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{b}_n' - \boldsymbol{b}_{n-1}'.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 + 3\boldsymbol{b}_3 + \ldots + n\boldsymbol{b}_n \\ &= \boldsymbol{b}_1' + 2\left(\boldsymbol{b}_2' - \boldsymbol{b}_1'\right) + 3\left(\boldsymbol{b}_3' - \boldsymbol{b}_2'\right) + \ldots + n\left(\boldsymbol{b}_n' - \boldsymbol{b}_{n-1}'\right) \\ &= -\boldsymbol{b}_1' - \boldsymbol{b}_2' - \ldots - \boldsymbol{b}_{n-1}' + n\boldsymbol{b}_n'. \end{aligned}$$

Współrzędne wektora $\boldsymbol{v}$ w bazie $\mathcal{B}'$ mają więc postać $[-1, -1, \ldots, -1, n]$.

▷ **Zadanie 1.20.** Wyznaczyć współrzędne wektora $\boldsymbol{v}$ w bazie $\mathcal{B}'$ pewnej przestrzeni liniowej znając jego współrzędne w bazie $\mathcal{B}$ tej przestrzeni:

(a) $[4, -3]$, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$, $\mathcal{B}' = \{2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2\}$;

(b) $[1, 1, -2]$, $\mathcal{B} = \left\{x, x+1, x^2+1\right\}$, $\mathcal{B}' = \left\{1, 1+x^2, x+x^2\right\}$;

(c*) $[1, 2 \ldots, n]$, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-1} - \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_n\}$.

Odpowiedzi. (a) $\left[\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right]$; (b) $[3, -4, 2]$; (c*) $\left[1, 3, 6, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}\right]$.

► **Przykład 1.21.** Obliczyć współrzędne wskazanych wektorów w wybranych bazach podanych przestrzeni liniowych:

(a) $\boldsymbol{v} = (2, 8, 4)$, $\mathbb{V} = \{(x + y, 3x + y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\boldsymbol{v} = (1, 1, -2, 1)$, $\mathbb{V} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y = z + 3t\}$;

(c) $q(x) = 4x^2 - 24x - 3$, $\mathbb{V} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p'(3) = 0\}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{V} = \left\{A \in \mathbb{M}_{2\times 2} : A = A^T\right\}$.

Rozwiązanie. (a) Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\mathbb{V} &= \{(x + y, 3x + y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 3, 1) + y(1, 1, -1) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{lin}\{(1, 3, 1), (1, 1, -1)\}.\end{aligned}$$

Otrzymane generatory $(1, 3, 1)$, $(1, 1, 1)$ przestrzeni $\mathbb{V}$ są liniowo niezależne. Stanowią zatem bazę tej przestrzeni. Współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2]$ wektora $\boldsymbol{v}$ wyznaczymy z warunku

$$(2, 8, 4) = \alpha_1(1, 3, 1) + \alpha_2(1, 1, -1).$$

Otrzymamy układ rownań

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 8, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 4, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem są $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$, więc $[\alpha_1, \alpha_2] = [3, -1]$.

(b) Najpierw znajdziemy generatory przestrzeni $\mathbb{V}$. Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{V} &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y = 2x - z - 3t\} \\ &= \{(x, 2x - z - 3t, z, t) : x, z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 2, 0, 0) + z(0, -1, 1, 0) + t(0, -3, 0, 1) : x, z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{lin}\{(1, 2, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -3, 0, 1)\}.\end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że te generatory są liniowo niezależne. Przyjmując je za bazę przestrzeni $\mathbb{V}$ znajdujemy współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ wektora $\boldsymbol{v}$. Z definicji wynika równość

$$(1, 1, -2, 1) = \alpha_1(1, 2, 0, 0) + \alpha_2(0, -1, 1, 0) + \alpha_3(0, -3, 0, 1).$$

Zatem nowe współrzędne α_1, α_2, α_3 znajdziemy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 1, \\ \alpha_2 = -2, \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

Stąd $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [1, -2, 1]$.

(c) Niech $p \in \mathbb{V}$. Wówczas $p(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, przy czym

$p'(3) = 2a \cdot 3 + b = 0$. Zatem $b = -6a$, a więc

$$p(x) = ax^2 - 6ax + c = a\left(x^2 - 6x\right) + c.$$

Przestrzeń $\mathbb{V}$ jest zatem generowana przez wektory $p_1(x) = x^2 - 6x$, $p_2(x) \equiv 1$, które są jej bazą. Współrzędne α_1, α_2 wektora $q(x) = 4x^2 - 24x - 3$ w tej bazie wyznaczymy z warunku

$$4x^2 - 24x - 3 = \alpha_1\left(x^2 - 6x\right) + \alpha_2 \cdot 1.$$

Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy równość

$$4x^2 - 24x - 3 = \alpha_1 x^2 - 6\alpha_1 x + \alpha_2.$$

Z równości wielomianów wynika równość współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej x. To prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \alpha_1 = 4, \\ -6\alpha_1 = -24, \\ \alpha_2 = -3. \end{cases}$$

Stąd $[\alpha_1, \alpha_2] = [4, -3]$.

(d) Mamy

$$\mathbb{V} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Również w tym przykładzie znalezione generatory tworzą bazę rozważanej przestrzeni. Współrzędne α_1, α_2, α_3 wektora B wyznaczymy z równości

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Otrzymamy $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = -1$. Zatem wektor B ma w tej bazie współrzędne $[2, 3, -1]$.

▷ **Zadanie 1.21.** Obliczyć współrzędne wskazanych wektorów w wybranych bazach podanych przestrzeni liniowych:

(a) $\boldsymbol{v} = (-2, 4, 7, 4)$, $\mathbb{V} = \{(x - 5y, x + y, 2x + y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\boldsymbol{v} = (8, 4, 2, 9)$, $\mathbb{V} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y = y - 2z = 0\}$;

(c) $q(x) = 2x^3 - x^2 - x + 5$, $\mathbb{V} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = p(0)\}$;

(d) $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbb{V} = \{A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{2\times 2} : a_{11} + a_{22} = 0\}$.

Odpowiedzi. Współrzędne (a) $[3, 1]$ w bazie $\{(1, 1, 2, 1), (-5, 1, 1, 1)\}$;
(b) $[2, 9]$ w bazie $\{(4, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$; (c) $[2, -1, 5]$ w bazie $\left\{x^3 - x, x^2 - x, 1\right\}$;
(d) $[3, 1, -2]$ w bazie $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

► **Przykład 1.22.** Zbadać, obliczając odpowiednie wyznaczniki, czy podane układy wektorów są bazami podanych przestrzeni liniowych:

(a) $(1,1,0),\ (2,1,0),\ (3,3,1),\ \mathbb{R}^3$;

(b) $2+x^2,\ 1-x,\ 1+x+x^2,\ \mathbb{R}_2[x]$;

(c) $x^3+2,\ x+1,\ 2x^2+x+1,\ x^3+x^2+x+2,\ \mathbb{R}_3[x]$;

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ \mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. Skorzystamy z twierdzenia mówiącego, że zbiór n wektorów stanowi bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ wymiaru $n \geqslant 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy współrzędnych tych wektorów w dowolnie wybranej bazie tej przestrzeni jest różny od zera.

(a) Macierz współrzędnych wektorów $(1,1,0)$, $(2,1,0)$, $(3,3,1)$ w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy jest równy $1 \neq 0$. Zatem podane wektory tworzą bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(b) W bazie $\{1, x, x^2\}$ przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ macierz współrzędnych wektorów

$$2+x^2,\ 1-x,\ 1+x+x^2,$$

ma postać

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy jest równy 0. To oznacza, że podane wektory nie tworzą bazy podanej przestrzeni liniowej.

(c) Macierz współrzędnych wektorów

$$x^3+2,\ x+1,\ 2x^2+x+1,\ x^3+x^2+x+2$$

w bazie $\{x^3, x^2, x, 1\}$ przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Korzystając z własności wyznaczników i rozwinięcia Laplace'a, mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \|w_4 - w_1\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \|w_3 - 2w_4\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Zatem rozważane wektory tworzą bazę podanej przestrzeni.

(d) W bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$ macierz współrzędnych podanych wektorów ma postać

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Do obliczenia jej wyznacznika korzystamy z własności wyznaczników. Mamy

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \left\| \begin{matrix} w_3 - w_1 \\ w_4 - 3w_1 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \|k_2 + k_3 - k_4\| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd wynika, że podane wektory nie tworzą bazy wskazanej przestrzeni liniowej.

▷ **Zadanie 1.22.** Zbadać, obliczając odpowiednie wyznaczniki, czy podane układy wektorów są bazami podanych przestrzeni liniowych:

(a) $(2,4,5),\ (1,-1,1),\ (-1,7,2),\ \mathbb{R}^3$;

(b) $(1,1,0,0,0),\ (0,1,1,0,0),\ (0,0,1,1,0),\ (0,0,0,1,1),\ (1,0,0,0,1),\ \mathbb{R}^5$;

(c) $x^3+x^2+x-1,\ x^3+x^2-x-1,\ x^3-x^2-x-1,\ x^3+x^2+x+1,\ \mathbb{R}_3[x]$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},\ \mathbb{M}_{2\times 2}$.

Odpowiedzi. (a) nie; (b) tak; (c) tak; (d) nie.

► **Przykład 1.23.** Wyznaczyć bazy przestrzeni liniowych, w których wskazane wektory mają podane współrzędne:

(a) $\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = (3,-5),\ [5,-2]$;

(b) $\mathbb{R}^4,\ \boldsymbol{v} = (1,0,1,0),\ [1,-2,4,-1]$;

(c) $\mathbb{R}_2[x],\ p(x) = x^2 - 2x,\ [-1,3,1]$;

(d) $\mathbb{M}_{2\times 2},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ [1,0,2,0]$.

(e) $\mathbb{V} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\right\},\ \boldsymbol{v} = (1,2,3,-6),\ [1,0,0]$;

Rozwiązanie. Takich baz jest na ogół nieskończenie wiele. W każdym przypadku podamy jeden przykład bazy.

(a) Korzystając z bazy standardowej otrzymamy

$$(3,-5) = 3\cdot(1,0) + (-5)\cdot(0,1) = 5\left(\frac{3}{5},0\right) + (-2)\left(0,\frac{5}{2}\right).$$

Ponieważ wektory $\left(\frac{3}{5},0\right)$, $\left(0,\frac{5}{2}\right)$ są liniowo niezależne, więc tworzą szukaną bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

(b) Z równości

$$\begin{aligned}(1,0,1,0) &= (1,1,1,1) - (0,1,1,1) + (0,0,1,1) - (0,0,0,1)\\ &= (1,1,1,1) - 2\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + 4\left(0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) - (0,0,0,1)\end{aligned}$$

oraz faktu, że wektory

$$(1,1,1,1),\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \left(0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\ (0,0,0,1)$$

są liniowo niezależne wynika, że można je przyjąć za szukaną bazę.

(c) Zachodzą równości

$$p(x) = (-1)(2x) + x^2 = (-1)(2x) + 3\left(\frac{x^2}{3}+1\right) + 1(-3).$$

Łatwo sprawdzić, że w przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ wektory $2x$, $\frac{x^2}{3}+1$, -3 są liniowo niezależne, więc można je przyjąć za szukaną bazę.

(d) Zauważmy najpierw, że

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

przy czym macierze $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ są liniowo niezależne. Zatem baza może zawierać te macierze. Ponieważ baza przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$ składa się z czterech liniowo niezależnych macierzy, więc do dwóch wybranych dołączymy jeszcze dwie, np. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ z bazy standardowej. Ponieważ macierze

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne, więc tworzą szukaną bazę przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

(e) Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\mathbb{V} &= \{(x,y,z,-x-y-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x(1,0,0,-1)+y(0,1,0,-1)+z(0,0,1,-1) : x,y,z \in \mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{lin}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}\,.\end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że znalezione generatory przestrzeni $\mathbb{V}$ są jednocześnie jej bazą. Oznaczmy wektory szukanej bazy $\mathcal{B}$ przez $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$. Wtedy oczywiście $\boldsymbol{b}_1 = (1,2,3,-6)$. Stąd wynika, że wektor $\boldsymbol{b}_1$ wystarczy dowolnie uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{V}$. Najłatwiej jest to zrobić wybierając wektory ze znanej już bazy. I tak przyjmując $\boldsymbol{b}_2 = (1,0,0,-1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (0,1,0,-1)$ otrzymamy trzy wektory liniowo niezależne $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, które będą szukaną bazą.

▷ **Zadanie 1.23.** Wyznaczyć bazy przestrzeni liniowych, w których wskazane wektory mają podane współrzędne:

(a) $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v} = (2,-1,3)$, $[1,0,1]$;

(b) $\mathbb{V} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = t, x-3y+2z = 0\}$, $\boldsymbol{v} = (1,1,1,1)$, $[2,2]$;

(c*) $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} = (1,0,\ldots,0)$, $[1,1,\ldots,1]$.

Odpowiedzi. Jedną z baz jest np. (a) $\{(2,-1,0),(0,1,0),(0,0,3)\}$;
(b) $\{(0,1/3,1/2,0)\,,(1/2,1/6,0,1/2)\}$;
(c*) $\{(1,1,1,\ldots,1),(0,-1,0,\ldots,0),(0,0,-1,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,-1)\}$.

► **Przykład 1.24.** Wyznaczyć macierze przejścia z bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$ podanych przestrzeni liniowych.

(a) $\mathcal{B} = \{(3,1),(2,1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(1,-1),(2,3)\}$, $\mathbb{R}^2$;

(b) $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(3,3,4),(-1,2,2),(1,1,1)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(c) $\mathcal{B} = \{x+1, x+2, x^2+1\}$, $\mathcal{B}' = \{x+3, x+4, x^2\}$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(d) $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$, $\mathcal{B}' = \{2x^2-3, x^3+x, 4-x, 1+x+x^2\}$, $\mathbb{R}_3[x]$;

(e) $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right\}, \mathcal{B}' = \left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\3&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. Macierzą przejścia z bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$ nazywamy macierz kwadratową P, której kolejnymi kolumnami są współrzędne kolejnych wektorów bazy $\mathcal{B}'$ w bazie $\mathcal{B}$. Zatem należy wyznaczyć współrzędne wektorów bazy $\mathcal{B}'$ w bazie $\mathcal{B}$ i napisać je w kolejnych kolumnach macierzy tworząc przejścia P.

(a) Łatwy rachunek prowadzi do równości

$$(1,-1) = 3(3,1) - 4(2,1), \qquad (2,3) = -4(3,1) + 7(2,1).$$

Macierz przejścia P ma zatem postać

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

(b) $\mathcal{B}$ jest bazą standardową, więc macierz przejścia ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Niech $p(x) = x + 1$, $q(x) = x + 2$, $r(x) = x^2 + 1$. Wówczas

$$1 = q(x) - p(x), \quad x = 2p(x) - q(x).$$

Zatem

$$\begin{aligned} x + 3 &= 2p(x) - q(x) + 3(q(x) - p(x)) = -p(x) + 2q(x), \\ x + 4 &= 2p(x) - q(x) + 4(q(x) - p(x)) = -2p(x) + 3q(x), \\ x^2 &= r(x) - 1 = r(x) - (q(x) - p(x)) = p(x) - q(x) + r(x). \end{aligned}$$

Macierz przejścia P ma więc postać

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) $\mathcal{B}$ jest bazą standardową, więc macierz przejścia można napisać od razu

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(e) Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = (-3) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz przejścia z bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$ ma zatem postać

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

▷ **Zadanie 1.24.** Wyznaczyć macierze przejścia z bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$ podanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, $\mathcal{B}' = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(b) $\mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}$, $\mathcal{B}' = \{3x^2 - x, 2x^2 + x - 1, x^2 + 5x - 6\}$, $\mathbb{R}_2[x]$.

Odpowiedzi. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}$.

► **Przykład 1.25.** Wyznaczyć współrzędne wskazanych wektorów w podanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych wykorzystując macierze przejścia z baz standardowych do danych baz:

(a) $(2,-1)$, $\mathcal{B}' = \{(2,4),(-3,-1)\}$, $\mathbb{R}^2$;

(b) $(0,1,0)$, $\mathcal{B}' = \{(1,1,0),(2,1,3),(0,2,1)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(c) $x^2 + x + 2$, $\mathcal{B}' = \left\{x^2 - 1, x^2 + 1, 2 - 2x\right\}$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B}' = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. Wykorzystamy fakt mówiący, że współrzędne $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ wektora w bazie $\mathcal{B}$ oraz współrzędne $[\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n]$ tego wektora w bazie $\mathcal{B}'$ związane są zależnością

$$P \cdot \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

gdzie P jest macierzą przejścia z bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$. Ponieważ macierz przejścia jest macierzą nieosobliwą, więc wyznaczenie współrzędnych sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego układu równań Cramera lub wyznaczenia macierzy odwrotnej do macierzy przejścia. W przykładach za bazę $\mathcal{B}$ będziemy przyjmować bazę standardową odpowiedniej przestrzeni. Wtedy macierz przejścia z tej bazy do bazy $\mathcal{B}'$ jest macierzą, której kolejnymi kolumnami są współrzędne kolejnych wektorów bazy $\mathcal{B}'$.

(a) Mamy $P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Zatem współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2']$ wektora $(2, -1)$ wyznaczymy z równania macierzowego

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$\begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Mamy $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3']$ wektora $(0, 1, 0)$ wyznaczymy rozwiązując układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wykorzystując metodę eliminacji Gaussa otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \|w_2 - w_1\| \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \left\| \begin{matrix} w_3 + 2w_2 \\ w_2 \cdot (-1) \end{matrix} \right\| \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{array}\right] \left\| \begin{matrix} w_2 + \frac{2}{7} w_3 \\ w_3 : 7 \end{matrix} \right\|$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} \end{array}\right] \|w_1 - 2w_2\| \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} \end{array}\right],$$

więc $\alpha_1' = \frac{2}{7}$, $\alpha_2' = -\frac{1}{7}$, $\alpha_3' = \frac{3}{7}$.

(c) W przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ bazę standardową tworzą wektory x^2, x, 1. Tak więc, macierz przejścia P z tej bazy do podanej bazy $\mathcal{B}'$ ma postać $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Zatem współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3']$ wektora $x^2 + x + 2$ w bazie $\mathcal{B}'$ oraz współrzędne tego wektora w bazie standardowej związane są zależnością

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Korzystając z bezwyznacznikowej metody wyznaczania macierzy odwrotnej i wykonując kolejno podane operacje elementarne otrzymamy

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \|w_3+w_1\| \to \|w_3+w_2\| \to \left\|\begin{array}{c} w_1 - \frac{1}{2}w_3 \\ w_2 : (-2) \\ w_3 : 2 \end{array}\right\| \to \|w_2 \leftrightarrow w_2\| \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right].$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(d) W przestrzeni liniowej $\mathbb{M}_{2\times 2}$ bazę standardową tworzą macierze

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem macierz przejścia P z tej bazy do podanej bazy $\mathcal{B}'$ ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4']$ wektora $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ w nowej bazie wyznaczymy rozwiązując układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \\ \alpha_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jak w przykładzie (b) układ ten rozwiązujemy metodą eliminacji Gaussa. Wykonując kolejno podane operacje elementarne otrzymamy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \|w_4+w_3\| \to \left\|\begin{array}{c} w_3 - \frac{2}{3}w_4 \\ w_2 - \frac{1}{3}w_4 \\ w_4 : 3 \end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{c} w_2 - w_3 \\ w_1 - w_3 \end{array}\right\| \to \|w_1 - w_2\| \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Tak więc $\alpha_1' = 1$, $\alpha_2' = -2$, $\alpha_3' = 1$, $\alpha_4' = 1$.

▷ **Zadanie 1.25.** Wyznaczyć współrzędne wskazanych wektorów w podanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych wykorzystując macierze przejścia

z baz standardowych do danych baz:

(a) $\boldsymbol{v} = (1,1),\ \mathcal{B}' = \{(4,1),(-2,3)\}\ ,\ \mathbb{R}^2$;

(b) $\boldsymbol{v} = (2,-4,7),\ \mathcal{B}' = \{(1,-2,3),(2,1,4),(-3,1,-6)\}\ ,\ \mathbb{R}^3$;

(c) $p = 2x^3{-}x^2{+}1,\ \mathcal{B}' = \left\{2x^3{+}3x^2{+}2x{+}1,\ 2x^3{+}x{+}1,\ x^2{+}2x{+}1,\ 2x^2{+}x{+}1\right\}$, $\mathbb{R}_3[x]$.

Odpowiedzi. (a) $\left[\frac{5}{14},\frac{3}{14}\right]$; (b) $[3,1,1]$; (c) $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

► **Przykład 1.26.** Wektor $\boldsymbol{v}$ ma w bazie $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4\}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ współrzędne $[1,2,3,4]$. Stosując macierz przejścia z bazy do bazy obliczyć współrzędne tego wektora w bazie $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{b}_1, 2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_3, 2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_4\}$ tej przestrzeni.

Rozwiązanie. Z definicji macierz przejścia P z bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$ ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jak w poprzednim przykładzie szukane współrzędne $[\alpha_1\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$ wektora $\boldsymbol{v}$ wyznaczymy z układu równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \\ \alpha_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem tego układu jest $\alpha_1' = -14$, $\alpha_2' = 2$, $\alpha_3' = 3$, $\alpha_4' = 4$.

▷ **Zadanie 1.26.** Wektor $\boldsymbol{v}$ ma w bazie $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ współrzędne $[0,1,-2]$. Stosując macierz przejścia z bazy do bazy obliczyć współrzędne tego wektora w podanych bazach tej przestrzeni:

(a) $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3,\ \boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_3\}$;

(b) $\mathcal{B}' = \{2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2-3\boldsymbol{b}_3,\ 3\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2-5\boldsymbol{b}_3,\ \boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3\}$.

Odpowiedzi. (a) $\left[\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right]$; (b) $[2,-1,-1]$.