

ALGEBRA LINIOWA

Teresa Jurlewicz

ALGEBRA LINIOWA

Kolokwia i egzaminy

Wydanie dziewiąte poprawione



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2026

Teresa Jurlewicz
Przedsiębiorstwo Informatyczne
YUMA
teresa.jurlewicz@yuma.com.pl

Projekt okadki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1994 – 2026 by Teresa Jurlewicz

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład książki wykonano w systemie L^AT_EX.

ISBN 978-83-67234-31-3

Wydanie IX poprawione, Wrocław 2026
Oficina Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BIS, Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp	7
Zestawy zadań z kolokwiów	9
Pierwsze kolokwium	9
Drugie kolokwium	28
Zestawy zadań z egzaminów	45
Egzamin podstawowy	45
Egzamin poprawkowy	64
Odpowiedzi i wskazówki	81
Pierwsze kolokwium	81
Drugie kolokwium	85
Egzamin podstawowy	89
Egzamin poprawkowy	94

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań jest przeznaczony dla słuchaczy wykładów z algebry liniowej prowadzonych w uczelniach technicznych. Jest on trzecią częścią zestawu podręczników do tego przedmiotu. Dwie pierwsze części zestawu tworzą „Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory” oraz „Algebra liniowa. Przykłady i zadania”. W opracowaniu umieściłam zestawy zadań, które od roku akademickiego 1993/94 przygotowywałam na kolokwia i egzaminy. Zadania ze sprawdzianów obejmują przestrzenie i przekształcenia liniowe, układy równań liniowych oraz przestrzenie euklidesowe. Zbiór jest powiększoną i poprawioną wersją mojego wcześniejszego opracowania pt. „Powtórka od A do Z z algebry liniowej 2”.

Pierwszy rozdział książki zawiera zestawy zadań z kolokwii. W drugim znajdują się zestawy zadań z egzaminów podstawowego i poprawkowego. W ostatnim rozdziale podałam odpowiedzi lub wskazówki do wszystkich zadań.

Sądzę, że opracowanie pozwoli studentom zapoznać się z rodzajami oraz stopniem trudności zadań kolokwialnych i egzaminacyjnych. Może być także dodatkowym materiałem do samodzielnej nauki. Mam nadzieję, że podręcznik pomoże osobom wykładającym algebrę liniową przy opracowywaniu zestawów zadań na kolokwia i egzaminy.

Studentów Politechniki Wrocławskiej zainteresowanych udziałem w konkursie matematycznym „Egzamin na ocenę celującą” zachęcam do zapoznania się z opracowaniem pt. „*Studencki konkurs matematyczny*”. Książka ta zawiera zadania wraz z rozwiązaniami z konkursów z lat 1994 – 2021.

W obecnym wydaniu przeredagowałam sformułowania części zadań oraz uzupełniłam rysunki w odpowiedziach. Ponadto dodałam zestawienie stosowanych oznaczeń oraz poprawiłam zauważone błędy i usterki.

Teresa Jurlewicz

Egzamin poprawkowy

Zestaw 1. odp. str. 95

1. Wektory x, y, z są liniowo niezależne. Zbadać z definicji liniową niezależność wektorów: $3x + 2y - z, x - y + 2z, 7x + 3y$.

2. Wskazać wielomiany $p, q \in \mathbb{R}[x]$ takie, że

$$\dim(\text{lin}\{p, p', p''\}) = 3 \text{ oraz } \dim(\text{lin}\{q, q', q''\}) = 2.$$

Odpowiedź uzasadnić.

3. Wyznaczyć współrzędne wektora $(0, 3, 8, 1)$ w bazie

$$\{(1, 2, 2, 0), (2, 1, -4, 0), (0, 0, 3, 6), (0, 0, 0, 1)\}$$

4. Spośród generatorów:

$$(1, -2, 0, 1, 1), (1, -1, 1, 0, 2), (3, -4, 2, 1, 5), (1, -3, -1, 2, 0)$$

przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ wybrać dwie różne bazy tej przestrzeni.

5. Podać macierz przekształcenia liniowego $(Lq)(x) = (3 + x)q'(x)$ w bazie

$$\{1 + x, 1 - x, x^2\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.

6. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^4$ wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $(5, 6, 1, 3)$ na podprzestrzeń

$$\mathbb{V} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{E}^4 : a - d = a + b = b - c\}.$$

Zestaw 2. odp. str. 95

1. Uzasadnić, że macierze nieodwracalne stopnia 3 nie tworzą podprzestrzeni liniowej przestrzeni $\mathbb{M}_{3 \times 3}$.

2. Uzasadnić z definicji, że wektory $p = 2x + 5, q = x^2 - 3x + 1, r = x^2 + x$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_2[x]$.

3. Znaleźć bazę i podać wymiar przestrzeni liniowej

$$\mathbb{U} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z + t = x + y = x - y + t\}.$$

4. Obliczyć rząd macierzy
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

5. Czy wektory własne przekształcenia liniowego $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ określonego wzorem

$$S(x, y, z) = (x + 4z, 2y, x + z)$$

tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Jeżeli tak, to napisać macierz przekształcenia S w tej bazie.

6. Wyznaczyć bazę ortonormalną przestrzeni

$$\text{lin} \{ (2, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 2), (0, 1, 0, 1) \}.$$

Następnie znaleźć współrzędne wektora $(3, 0, 1, 0)$ w tej bazie.

Zestaw 3. odp. str. 95

1. Czy zbiór macierzy stopnia 2, których rząd jest mniejszy od 2, jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{M}_{2 \times 2}$? Odpowiedź uzasadnić.

2. Zbadać wymiar przestrzeni liniowej

$$\mathbb{U} = \text{lin} \{ (p, 2, -p), (1, p, -1), (p, 3, -p) \}$$

w zależności od parametru p .

3. Wektory $(1, 2, 3)$, $(0, 2, 1)$ uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ tak, aby wektor $(1, 0, 0)$ miał w niej współrzędne $[1, 2, 1]$.

4. Czy wektory $(1, 1, -1, 0, -3)$, $(2, 1, 0, 0, -5)$ tworzą bazę przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + 3y + z + s = 0, \\ 2x + y + t + s = 0, \\ 5y + 2z - 2t + s = 0? \end{cases}$$

5. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im przestrzenie wektorów własnych przekształcenia liniowego $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ określonego wzorem

$$T(x, y, z) = (x + 2y - 3z, x + 2y - 3z, x + 2y - 3z).$$

6. Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni

$$\mathbb{U} = \left\{ (x + 2y + 3z, 2x + 2z, x + y + 2z, y + z) \in \mathbb{E}^4 : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zestaw 4. odp. str. 95

1. Czy wielomiany, które są funkcjami:

(a) parzystymi; (b) niemalejącymi,

tworzą podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}[x]$? Odpowiedź uzasadnić.

2. Dla jakiej wartości parametru q wektory: $(1, -q, 2)$, $(q, 3, -1)$, $(3q, 5, -4)$ są bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Czy może to być baza ortogonalna przestrzeni $\mathbb{E}^3$?

3. Wskazać bazę przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$, w której wektor $x + 3$ ma wszystkie współrzędne równe 1.

4. Wyznaczyć wymiar i bazę przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + y + 3z + 4t = 0, \\ 3x + 5y + 13z + 10t = 0, \\ x + 4y + 9z + t = 0. \end{cases}$$

5. Znaleźć wartości i wektory własne przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ określonego wzorem

$$L(x, y, z) = (x - z, x - z, x - z).$$

6. Wektory $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ uzupełnić do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{E}^4$. Następnie podać współrzędne wektora $(0, 1, 0, 0)$ w tej bazie.

Zestaw 5. odp. str. 95

1. Uzasadnić, że zbiór

$$\mathbb{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2} : a + 2d = 3b - c \right\}$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{M}_{2 \times 2}$.

2. Wyznaczyć wymiar przestrzeni liniowej $\text{lin}\{1, \sin^2 x, \cos 2x, \cos^2 x\}$

3. Czy wektor $(1, 0, 0, 0)$ należy do przestrzeni liniowej

$$\text{lin}\{(1, -1, 0, 1), (1, 0, 2, 1), (1, -1, 1, 3), (0, 2, 3, -2)\}?$$

4. Znaleźć współrzędne wektora $\mathbf{f} = x^3 - 2x^2 - x + 4$ w wybranej bazie przestrzeni liniowej $\mathbb{U} = \{\mathbf{f} \in \mathbb{R}_3[x] : \mathbf{f}(1) = \mathbf{f}(2)\}$.

5. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z bazą $\{(0, 1, -1), (0, 0, 1), (1, -1, 0)\}$ napisać macierz obrotu o kąt $\pi/2$ wokół osi Oz .

6. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^4$ znaleźć rzut ortogonalny wektora $(1, 0, 2, 1)$ na podprzestrzeń $\mathbb{W} = \text{lin}\{(2, 1, 0, -1), (1, 0, 1, -1)\}$.

Zestaw 6. odp. str. 96

1. Uzasadnić, że jeżeli wektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ są liniowo niezależne, a wektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ są liniowo zależne, to $\mathbf{w} \in \text{lin}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

2. Uzasadnić, że wielomiany rzeczywiste stopnia mniejszego od 5, które są funkcjami parzystymi, tworzą przestrzeń liniową. Podać wymiar tej przestrzeni.

3. Znaleźć współrzędne wektora $(4, -4, 2, 5)$ w wybranej bazie przestrzeni liniowej

$$\mathbb{W} = \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 2a - c = 2b + 7c = a - b - c \right\}.$$

4. Wyznaczyć wymiar i bazę przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x & + 2z - u + v = 0, \\ x + y & + 2u - v = 0, \\ 3x + 2y + 2z + 3u - v = 0, \\ x - y + 4z - 4u + 3v = 0. \end{cases}$$

5. Znaleźć wartości i wektory własne przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, które spełnia zależności: $L(2, 1) = (4, 3)$, $L(4, -1) = (2, -3)$.

6. Podać przykład unormowanego wektora $u \in \mathbb{E}^4$ tworzącego z wektorem $v = (1, -1, 1, -1)$ kąt $\pi/3$.

Zestaw 7. odp. str. 96

1. Dla jakich wartości parametru p zbiór

$$\mathbb{W} = \{(px + y, y, x + p) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

2. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]$ zbadać z definicji liniową niezależność wektorów:

$$x^3 + x, \quad 2x^3 + x + 1, \quad 3x^2 + x, \quad x + 1.$$

3. Wskazać bazę przestrzeni liniowej

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{M}_{2 \times 2} : \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. Sprawdzić, czy wektory $(1, 1, -2, 0, 1)$, $(-2, 0, 0, 1, 1)$ generują przestrzeń rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x - 2y & + u + v = 0, \\ x - y + z & + 2v = 0, \\ 3x - 4y + 2z + u + 5v = 0, \\ x - 3y - z + 2u & = 0. \end{cases}$$

5. W bazie $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 3)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ znaleźć macierz przekształcenia liniowego $L(x, y, z) = (z - x, z - y, x + y)$.

6. Wektory $\mathbf{u} = (1, 3, -2)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$ uzupełnić do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{E}^3$. Następnie znaleźć współrzędne wektora $\mathbf{x} = (12, -4, 7)$ w tej bazie.

Zestaw 8. odp. str. 96

1. Uzasadnić, że jeżeli wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ należące do przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ są liniowo zależne oraz $\mathbf{d} \in \mathbb{V}$, to wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ są też liniowo zależne.

2. Uzasadnić, że zbiór $\mathbb{U} = \{(a - b, a + b, 3b, 2a) \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wskazać bazę tej przestrzeni, w której wszystkie współrzędne wektora $(1, 5, 6, 6)$ są równe 5.

3. Sprawdzić, że generatory przestrzeni $\text{lin} \{\sin^2 x, \cos 2x\}$ są jej bazą i następnie obliczyć współrzędne wektora $5 - \cos^2 x$ w tej bazie.

4. Dla jakich wartości parametru p zachodzi równość

$$\dim(\text{lin} \{(1, 3, p, 1), (p, -1, 1, 1), (4, 5, 5, 3)\}) = p?$$

5. Znaleźć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. W przestrzeni $\mathbb{E}^4$ zortogonalizować i następnie unormować wektory:

$$(1, 0, 0, 1), (1, 2, 0, 1), (1, 4, 2, 3).$$

Zestaw 9. odp. str. 96

1. Uzasadnić, że zbiór wszystkich wielomianów $p \in \mathbb{R}[x]$ spełniających warunek $p(1)p'(2) = 0$ nie jest przestrzenią liniową.

2. Co można powiedzieć o liniowej niezależności funkcji $f, g, h \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ spełniających nierówność

$$\begin{vmatrix} f(1) & f(2) & f(3) \\ g(1) & g(2) & g(3) \\ h(1) & h(2) & h(3) \end{vmatrix} > 0?$$

Odpowiedź uzasadnić.

3. Czy spośród wektorów: $x^2 + x + 2$, $1 - x^2$, $x^2 + 2x + 5$, $x + 3$, $2x + 3$ można wybrać bazę przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$?

4. Określić, w zależności od parametru m , liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} 6x + my + 4z = 4m, \\ 3x + y + 2z = m, \\ 6mx + y + 4z = 4. \end{cases}$$

5. Korzystając z interpretacji geometrycznej przekształcenia liniowego K przestrzeni $\mathbb{R}^3$, które jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $\pi : x + 2y + 3z = 0$, wyznaczyć jądro, obraz oraz podać ich bazy.

6. Sprawdzić, że wektory $(2, -1, 3)$, $(-1, 4, 2)$, $(2, 1, -1)$ tworzą bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{E}^3$. Następnie podać współrzędne wektora $(0, 1, -1)$ w tej bazie.

Zestaw 10. odp. str. 96

1. Zbadać liniową niezależność wektorów:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2$$

w przestrzeni liniowej $\mathbb{M}_{2 \times 2}$.

2. Które z wektorów bazy standardowej przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ są uzupełnieniem wektorów $x^3 + 2x$, $1 - x^3$ do bazy tej przestrzeni? Podać wszystkie możliwości.

3. Znaleźć współrzędne wektora $(1, -1, 2)$ w bazie

$$\{(3, 2, 1), (0, 5, -1), (1, -1, 1)\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

4. Wyznaczyć wymiar przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3s + t = 0, \\ -x + 3y + z + 2s + 2t = 0, \\ 5x - 7y + z - 4t = 0. \end{cases}$$

5. Znaleźć wartości i wektory własne symetrii $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ względem osi Oz .

6. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^3$ wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $(2, 0, 1)$ na podprzestrzeń $\text{lin}\{(1, 2, 0), (2, 3, 1)\}$.

Zestaw 11. odp. str. 96

1. Czy funkcje okresowe o okresie T , który jest dodatnią liczbą parzystą, tworzą podprzestrzeń liniową przestrzeni wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

2. Czy któraś z podanych macierzy jest kombinacją liniową pozostałych:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}?$$

Odpowiedź uzasadnić.

3. Wektor $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ w bazie $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{U}$ ma współrzędne $[3, 1, 3]$. Wyznaczyć współrzędne tego wektora w bazie przestrzeni $\mathbb{U}$ złożonej z wektorów $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_3$.

4. Znaleźć wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez wektory:

$$(1, -2, 0, 1, 3), (2, 0, 2, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 4), (1, -4, -1, 1, 10).$$

5. Wyznaczyć wartości i wektory własne macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni

$$\text{lin}\{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$$

i następnie podać współrzędne wektora $(6, 3, 6, 5)$ w tej bazie.

Zestaw 12. odp. str. 97

1. Uzasadnić z definicji liniową niezależność wektorów $\mathbf{f} = \sin x$, $\mathbf{g} = \sin 3x$, $\mathbf{h} = \sin 8x$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

2. Uzasadnić, że zbiór $\mathbb{U} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_4[x] : 2\mathbf{p}(x) = \mathbf{p}(2x)\}$ jest przestrzenią liniową i określić jej wymiar.

3. Znaleźć współrzędne wektora $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ w bazie

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

przestrzeni liniowej $\mathbb{M}_{2 \times 2}$.

4. Określić, w zależności od parametru q , wymiar przestrzeni liniowej

$$\text{lin}\{(q, q, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (q, 2, q, 2)\}.$$

5. W bazie przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożonej z wektorów $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$ oraz w bazie przestrzeni $\mathbb{R}^4$ utworzonej z wektorów $(1, 1, 0, 0)$, $(1, -1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 1, -1)$ wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ określonego wzorem $L(x, y, z) = (x, x + y, x + z, x + y + z)$.

6. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{C}([-\pi/2, \pi/2])$ z iloczynem skalarnym

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x) dx$$

ortogonalizować wektory $1, \sin x, x + 1$.

Zestaw 13. odp. str. 97

1. Uzasadnić, że zbiór $\mathbb{U} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{3 \times 3} : \det(-\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})\}$ jest przestrzenią liniową.
2. Napisać macierz przejścia z bazy $\{(1, 2, 1), (2, 3, 1), (1, 1, 1)\}$ do bazy standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
3. Dla jakich wartości parametru a wielomian $x^2 + ax + a^2$ jest uzupełnieniem wielomianów $x^2 - 2x + 3, 2x^2 - x + 1$ do bazy przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$?
4. Znaleźć współrzędne wektora $(x, y, z, s, t) = (1, 4, 4, 1, 0)$ w wybranej bazie przestrzeni rozwiązań układu równań $x - y + z - s + t = x - y + z - s - t = 0$.
5. Wyznaczyć wartości i wektory własne przekształcenia liniowego K przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w siebie określonego wzorem $K(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2y, -z)$.
6. Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni

$$\mathbb{E} = \{(2x, y, y - x, 2x + y) \in \mathbb{E}^4 : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Następnie wyznaczyć współrzędne wektora $(2, 1, 0, 3)$ w tej bazie.

Zestaw 14. odp. str. 97

1. Niech $\mathbb{W} = \{(x, y, x + |y|) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$. Który ze zbiorów:

$$\mathbb{W}_1 = \mathbb{W} \cap \text{płaszczyzna } yOz, \quad \mathbb{W}_2 = \mathbb{W} \cap \text{płaszczyzna } xOz$$

jest przestrzenią liniową? Odpowiedź uzasadnić.

2. Baza przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_2[x]$ zawiera wektory $1 - x, 2x + 1$. Jakie mogą być współrzędne wektora $3x + 6$ w tej bazie? Wypisać wszystkie możliwości.
3. Znaleźć bazę i podać wymiar przestrzeni liniowej

$$\mathbb{U} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x + z)^2 = 2(x^2 + z^2)\}.$$

4. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_4[x]$ zbadać macierzowo liniową niezależność wektorów:

$$\mathbf{p} = x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1, \quad \mathbf{q} = 2x^4 + x^3 - x^2 + x - 1, \quad \mathbf{r} = 4x^4 + 5x^3 + x^2 - x.$$

5. Wyznaczyć bazy jądra oraz obrazu przekształcenia liniowego $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ określonego wzorem

$$K(x, y, z) = (x + y + 2z, x - 2y + 2z, 2x - y + 4z, x + 2y + 2z).$$

6. W przestrzeni $\mathbb{R}_1[x]$ z iloczynem skalarnym

$$(f, g) = f(1)g(1) + f(2)g(2)$$

znaleźć wektor unormowany f ortogonalny do wektora $h = x - 1$.

Zestaw 15. odp. str. 97

1. Czy zbiór $\mathbb{D} = \{q \in \mathbb{R}[x] : q \in \mathbb{R}_2[x] \text{ lub } q'(1) = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}[x]$? Odpowiedź uzasadnić.

2. Uzasadnić z definicji, że wektory $(4, 1, 3)$, $(8, 2, 1)$, $(1, 0, 2)$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$.

3. Wektor $(7, 2, 3, 0, 1)$ uzupełnić do bazy przestrzeni liniowej

$$\mathbb{U} = \{(x, y, z, s, t) \in \mathbb{R}^5 : y + s = z - t = x - y - z\}.$$

4. Znaleźć wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez kolumny macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ przeprowadza wektor $(1, 0)$ na wektor $(3, -2)$, a wektor $(1, 1)$ na wektor $(4, -1)$. Znaleźć obraz wektora $(1, -2)$ po trzykrotnym złożeniu tego przekształcenia.

6. Wyznaczyć współrzędne wektora $(2, 3, 1, 0)$ w wybranej bazie ortogonalnej przestrzeni $\text{lin}\{(1, 1, -1, -1), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0)\} \subset \mathbb{E}^4$.

Zestaw 16. odp. str. 97

1. Wskazać przykład nieskończonego liniowo niezależnego podzbioru przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ nie zawierającego wielokrotności wektorów: $1, x, x^2, x^3, \dots$. Odpowiedź uzasadnić

2. Wektory u, v, w są liniowo niezależne. Dla jakich wartości parametru p wektory:

$$2pu + 4v + pw, \quad 2u + 2v + w, \quad pu + pv - w$$

są liniowo niezależne?

3. Znaleźć wymiar i bazę przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2t = 6x, \\ x + 2y + z + 2t = 6y, \\ x + 2y + z + 2t = 6z, \\ x + 2y + z + 2t = 6t. \end{cases}$$

4. Napisać wzór przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, którego jądrem i obrazem jest oś Ox . Odpowiedź uzasadnić.

5. Przekształcenie $L : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ jest określone wzorem

$$(L\mathbf{p})(x) = (2 - x)\mathbf{p}'(x).$$

Uzasadnić liniowość przekształcenia L i wyznaczyć jego macierz w bazie $\{1, x, x^2\}$.

6. Znaleźć bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{E}^4$ zawierającą wektory:

$$(1, 1, 0, -1), (1, 0, -1, 1).$$

Zestaw 17. odp. str. 97

1. Czy zbiór $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0 \text{ i } yz = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Odpowiedź uzasadnić.

2. Dla jakich wartości parametru p wektory:

$$\mathbf{q}_1 = x^2 + px + p^2, \mathbf{q}_2 = x^2 + p^2x + p^4, \mathbf{q}_3 = x^2 + p^3x + p^6$$

są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$?

3. Obliczyć rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

4. Niech L będzie przekształceniem liniowym przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ w siebie określonym wzorem $(L\mathbf{p})(x) = \mathbf{p}(x) + \mathbf{p}'(x)$. Uzasadnić macierzowo, że przekształcenie L^{-1} istnieje i następnie wyznaczyć $L^{-1}(x + x^2)$.

5. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im przestrzenie wektorów własnych przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ określonego wzorem

$$L(x, y, z) = (y, y, y).$$

6. Wyznaczyć bazę ortonormalną przestrzeni

$$\mathbb{W} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{E}^4 : 4x - z = 2y - 3z + 2t = 0 \right\}.$$

Zestaw 18. odp. str. 97

1. Uzasadnić, że wektory $\mathbf{f}_1 = 2^x$, $\mathbf{f}_2 = x^2$, $\mathbf{f}_3 = \sin \pi x$, $\mathbf{f}_4 = x - 3$ są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

2. Sprawdzić, że wektor $(5, 1, 2, -3)$ należy do przestrzeni liniowej

$$\mathbb{U} = \{ (x + 2y + 4z, x + 2z, y + z, x - 2y) \in \mathbb{R}^4 : x, y, z \in \mathbb{R} \}$$

i następnie uzupełnić go do bazy tej przestrzeni.

3. Podać geometryczny opis zbioru rozwiązań układu równań w zależności od parametru p :

$$\begin{cases} px + 2y + pz = 0, \\ x + py + z = 0, \\ px + 3y + pz = 0. \end{cases}$$

4. Dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, określonego wzorem

$$L(a, b, c, d) = (a - b - c + 3d, a + b - c - d, a - b - c + 2d),$$

znaleźć bazy przestrzeni liniowych $\text{Ker } L$, $\text{Im } L$.

5. Macierz przekształcenia liniowego $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ ma w bazie $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ postać

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć $L^3(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$.

6. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}^4$ znaleźć rzut ortogonalny wektora $(1, 1, 3, -1)$ na podprzestrzeń

$$\mathbb{V} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{E}^4 : x + z + 2t = y - 2t = x + y - z = 0 \right\}.$$

Zestaw 19. odp. str. 98

1. Wskazać bazę przestrzeni liniowej $\text{lin}\{(1, 2, 3, 4, 5), (1, 1, 0, 1, 1), (2, 3, 3, 5, 7)\}$ zawierającą wektor $(0, 1, 3, 3, 4)$.

2. Dany jest czworokąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(4, 2)$, $(1, 2)$ oraz przekształcenie płaszczyzny $L(x, y) = (x + 2y, x - y)$. Wyznaczyć pole figury będącej obrazem tego czworokąta w przekształceniu L .

3. Określić wymiar przestrzeni rozwiązań układu równań

$$x + y + z = z + 2y + t = x - y + 3z - t = t.$$

4. Co można powiedzieć o liniowej zależności funkcji $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mających ciągle pochodne rzędu 2 i spełniających nierówność

$$\begin{vmatrix} f(1) & f'(1) & f''(1) \\ g(1) & g'(1) & g''(1) \\ h(1) & h'(1) & h''(1) \end{vmatrix} > 0?$$

Odpowiedź uzasadnić.

5. Czy jest możliwe, aby w przestrzeni $\mathbb{R}_1[x]$ z pewnym iloczynem skalarnym wielomiany $1, x - 1$ tworzyły kąt $\pi/4$, a wielomiany $1, x$ były ortogonalne? Odpowiedź uzasadnić.

6. Wektory $(1, 1, 1, -1), (1, -1, 1, 1), (4, 2, -4, 2)$ uzupełnić do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{E}^4$ i podać współrzędne wektora $(0, 1, 0, 0)$ w tej bazie.

Zestaw 20. odp. str. 98

1. Rozważmy zbiór $\mathcal{U}$ wszystkich funkcji dwóch zmiennych $z = g(x, y)$, których wykresy są płaszczyznami przechodzącymi przez punkt $(3, -1, 0)$. Uzasadnić, że ten zbiór jest przestrzenią liniową.

2. Niech $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ oraz $\mathcal{B}' = \{4\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2, 6\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\}$ będą bazami przestrzeni liniowej. Wykorzystując macierz przejścia z bazy do bazy wyznaczyć współrzędne wektora $4\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2$ w bazie $\mathcal{B}'$.

3. Znaleźć wszystkie rozwiązania niejednorodnego układu równań z niewiadomymi x, y, z, t , jeżeli wiadomo, że $x = 1, y = 0, z = -1, t = 3$ jest jednym z rozwiązań tego układu, a jego macierz główna ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ znaleźć obraz wektora $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ kolejno po obrotach: o kąt $\pi/4$ wokół osi Ox , o kąt $\pi/2$ wokół osi Oz .

5. Czy jest możliwe, aby wektor $(1, 1, 1)$ miał w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni $\mathbb{E}^3$ współrzędne $[1, 1, 0]$? Odpowiedź uzasadnić.

6. Wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ są unormowane. Znaleźć rzut ortogonalny wektora $\mathbf{u}$ na podprzestrzeń lin $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, jeżeli wiadomo, że wektor $\mathbf{u}$ jest ortogonalny do $\mathbf{v}_1$, z wektorem $\mathbf{v}_2$ tworzy kąt $\pi/3$, zaś wektory $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ tworzą kąt $\pi/6$.

Zestaw 21. odp. str. 98

1. Czy zbiór wszystkich macierzy rzeczywistych stopnia 2 o wyznacznikach niedodatnich tworzy przestrzeń liniową? Odpowiedź uzasadnić.

2. Zbadać liniową niezależność wektorów $\mathbf{f} + \sqrt[3]{x}$, $\mathbf{g} = \sqrt{x}$, $\mathbf{h} = x$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}([0, \infty))$.

3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ znaleźć macierz przejścia z bazy $\{(2, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ do bazy $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$.

4. Wyznaczyć jądro i obraz przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ określonego wzorem

$$L(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Czy $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 9$ są wartościami własnymi przekształcenia liniowego

$$(L\mathbf{f})(x) = \mathbf{f}(3x)$$

w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}(\mathbb{R})$? Odpowiedź uzasadnić.

6. Iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ dany jest wzorem

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{b-1}^{b+1} \mathbf{p}(x)\mathbf{q}(x) dx,$$

gdzie $b \in \mathbb{R}$. Norma wektora $\mathbf{p} = x$ w tej przestrzeni wynosi $\sqrt{26/3}$, a wektor $\mathbf{q} = x - 13/6$ jest ortogonalny do wektora $\mathbf{p}$. Wyznaczyć b .

Zestaw 22. odp. str. 98

1. Wektory $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, $2\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ są liniowo niezależne. Czy wektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ też są liniowo niezależne? Odpowiedź uzasadnić.

2. W pewnej bazie przestrzeni $\mathbb{R}_1[x]$ współrzędne wektorów $\mathbf{p}(x) = 5x + 2$, $\mathbf{q}(x) = 3 - x$ wynoszą odpowiednio $[1, 1]$, $[-1, 3]$. Znaleźć tę bazę.

3. Znaleźć bazę przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3s - t = 0, \\ -x + 3y + z + 2s + 2t = 0. \end{cases}$$

4. Znaleźć najmniejszą wartość $a > 0$, dla której wektory $\mathbf{f} = \sin x$ i $\mathbf{g} = \sin(3x/4)$ są ortogonalne do wektora $\mathbf{h} = 1$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{C}([0, a])$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

5. Wyznaczyć wartości i wektory własne macierzy zespolonej $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

6. W bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{M}_{2 \times 2}$ napisać macierz przekształcenia liniowego L tej przestrzeni w siebie określonego wzorem

$$L(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}.$$

Zestaw 23. odp. str. 98

1. Zbadać liniową niezależność wektorów $\mathbf{f} = \ln(3x)$, $\mathbf{g} = \ln(5x)$, $\mathbf{h} = \ln(10x)$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}((0, \infty))$.

2. Wektor $\mathbf{p}$ ma w bazie $\mathcal{B} = \{3x^2 + 2x + 1, 3x^2 + x + 1, 2x^2 + x + 1\}$ przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ współrzędne $[1, -1, 1]$. Podać współrzędne tego wektora w bazie

$$\mathcal{B}' = \{-x, 2x^2, 3\}.$$

3. Obliczyć rząd macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

4. Przekształcenie liniowe $L : \mathbb{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2}$ określone jest wzorem $L(\mathbf{A}) = 3\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$. Znaleźć macierz przekształcenia L w bazie standardowej tej przestrzeni.

5. Znaleźć wartości i wektory własne przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ określonego wzorem $L(x, y, z, t) = (y, z, t, x)$.

6. Uzasadnić, że zbiór $\mathbb{U} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{E}^3 : \mathbf{u} \perp (2, 1, -3)\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{E}^3$ i wyznaczyć bazę ortonormalną tej podprzestrzeni.

Zestaw 24. odp. str. 98

1. Który z podanych warunków dla wektorów $\mathbf{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ wprowadza w nich strukturę przestrzeni liniowej:

$$(a) x^2 + y^2 = z^2 + t^2; \quad (b) x + y = z + t$$

Odpowiedź uzasadnić.

2. Znaleźć współrzędne wektora $\mathbf{v} = (-8, 5, 9)$ w wybranej bazie podprzestrzeni liniowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ generowanej przez wektory:

$$\mathbf{v}_1 = (2, 1, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (4, -1, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (1, -1, -2), \quad \mathbf{v}_4 = (5, 1, 4).$$

3. Obliczyć rząd macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$.

4. Przekształcenie K przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w siebie jest określone wzorem

$$K(\mathbf{v}) = (4, -1, 1) \times \mathbf{v}.$$

Uzasadnić liniowość przekształcenia K i znaleźć jego macierz w bazie standardowej $\mathbb{R}^3$.

5. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}_2[x]$ z iloczynem skalarnym określonym wzorem

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}(0)\mathbf{q}(0) + \mathbf{p}(1)\mathbf{q}(1) + \mathbf{p}(2)\mathbf{q}(2)$$

znaleźć wartości parametru α , dla których wielomiany $\mathbf{p}_0 = x + \alpha - 1$, $\mathbf{q}_0 = x - \alpha - 1$ tworzą kąt $2\pi/3$.

6. Wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ tworzą bazę ortogonalną pewnej przestrzeni euklidesowej. W tej przestrzeni znaleźć rzut ortogonalny wektora $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4$ na podprzestrzeń $\text{lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4\}$.