

ALGEBRA LINIOWA

Teresa Jurlewicz Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA LINIOWA

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie jedenaste poprawione



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2026

Teresa Jurlewicz
Przedsiębiorstwo Informatyczne
YUMA
teresa.jurlewicz@yuma.com.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1994 – 2026 by Teresa Jurlewicz and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie L^AT_EX.

ISBN 978-83-67234-27-6

Wydanie XI poprawione, Wrocław 2026
Oficina Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BIS, Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp	7
1. Przestrzenie liniowe	9
1.1. Podstawowe definicje	9
1.2. Podprzestrzenie przestrzeni liniowej	12
1.3. Liniowa niezależność wektorów	14
1.4. Baza i wymiar przestrzeni liniowej	20
1.5. Współrzędne wektora w bazie	28
1.6. Suma prosta podprzestrzeni*	34
2. Układy równań liniowych	39
2.1. Rząd macierzy	39
2.2. Twierdzenie Kroneckera – Capellego	47
2.3. Układy jednorodne i niejednorodne	51
3. Przekształcenia liniowe	57
3.1. Podstawowe określenia	57
3.2. Jądro i obraz przekształcenia liniowego	61
3.3. Macierz przekształcenia liniowego	64
3.4. Działania na przekształceniach liniowych	71
3.5. Wartości i wektory własne przekształcenia liniowego	77
3.6. Wartości i wektory własne macierzy	85

4. Przestrzenie euklidesowe	92
4.1. Iloczyn skalarny	92
4.2. Norma wektora	95
4.3. Ortogonalność wektorów	98
4.4. Bazy ortogonalne	102
4.5. Inne metody ortogonalizacji*	110
4.6. Rzut ortogonalny	113
4.7. Diagonalizacja ortogonalna macierzy symetrycznych*	120
Odpowiedzi i wskazówki	127
Literatura	136
Skorowidz	137

Wstęp

Książka „*Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory*” jest pierwszą częścią zestawu podręczników do przedmiotu Algebra liniowa. Pozostałymi częściami zestawu są zbiory zadań „*Przykłady i zadania*” oraz „*Kolokwia i egzaminy*”. Podręczniki te przeznaczone są głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci wydziałów nauk ścisłych uniwersytetów oraz uczelni ekonomicznych i pedagogicznych.

Opracowanie obejmuje przestrzenie i przekształcenia liniowe, układy równań liniowych oraz przestrzenie euklidesowe. Wszystkie zagadnienia teoretyczne zakończone są ćwiczeniami. Do większości twierdzeń podano dowody. Fragmenty materiału oznaczone gwiazdką nieznacznie wykraczają poza program przedmiotu. W ten sam sposób oznaczono trudniejsze ćwiczenia. Dodatkowy materiał oraz trudniejsze ćwiczenia dołączono z myślą o studentach, którzy chcą pogłębić swoje wiadomości. Równoległe do materiału omawianego na wykładzie studenci powinni rozwiązywać zadania. Metody rozwiązywania zadań oraz zadania przeznaczone do samodzielnej pracy można znaleźć w drugiej części zestawu „*Przykłady i zadania*”. Zadania, które w poprzednich latach studenci rozwiązywali na sprawdzianach, są umieszczone w trzeciej części zestawu „*Kolokwia i egzaminy*”. Studentów zainteresowanych rozwiązywaniem trudnych i nietypowych zadań z tego przedmiotu zachęcamy do zapoznania się z książką „*Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami*”.

W obecnym wydaniu przeredagowano niektóre fragmenty tekstu oraz poprawiono zauważone błędy i usterki.

Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej dziękujemy za uwagi o wcześniejszych wydaniach. Uprzejmie prosimy Wykładowców i Studentów o przesyłanie uwag o podręczniku oraz informacji o zauważonych błędach i usterekach.

Teresa Jurliewicz

Zbigniew Skoczylas

1.

Przestrzenie liniowe

W pierwszym paragrafie wprowadzamy podstawowe pojęcia związane z przestrzeniami liniowymi oraz omawiamy własności działań na wektorach z tych przestrzeni. Następnie podajemy najważniejsze przykłady takich przestrzeni (przestrzenie $\mathbb{R}^n$, przestrzenie wielomianów, funkcji ciągłych oraz macierzy). W drugim paragrafie wprowadzamy podprzestrzenie przestrzeni liniowych i omawiamy ich własności. W kolejnym wprowadzamy najważniejsze pojęcie algebry liniowej: liniową niezależność wektorów. Podajemy tam warunki gwarantujące liniową niezależność układu wektorów w różnych przestrzeniach liniowych. W następnych paragrafach wprowadzamy bazę przestrzeni liniowej i korzystając z tego pojęcia określamy wymiar przestrzeni oraz współrzędne wektora w bazie. Na końcu rozdziału definiujemy pojęcie sumy prostej podprzestrzeni oraz podajemy jej własności.

1.1. Podstawowe definicje

Definicja 1.1 (*przestrzeń liniowa*)

Niepusty zbiór $\mathbb{V}$ nazywamy *rzeczywistą przestrzenią liniową*, jeżeli dla dowolnych elementów $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ określona jest suma $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{V}$, dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ i dla każdego $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ określony jest iloczyn $\alpha \mathbf{u} \in \mathbb{V}$ oraz dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$ działania te spełniają warunki:

- (1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (przemienność dodawania);
- (2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (łączność dodawania);
- (3) istnieje element $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ taki, że dla każdego $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ mamy $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ (istnienie elementu neutralnego);
- (4) dla każdego $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$ istnieje element $-\mathbf{w} \in \mathbb{V}$ taki, że $\mathbf{w} + (-\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ (istnienie elementu przeciwnego);
- (5) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ oraz $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)(\mathbf{u})$;
- (6) $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$ oraz $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$.

Uwaga. Elementy przestrzeni $\mathbb{V}$ nazywamy *wektorami*, a element $\mathbf{0}$ — *wektorem zerowym*. Rzeczywistą przestrzeń liniową nazywamy krótko przestrzenią liniową lub wektorową. Dopuszczając w definicji $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, otrzymamy określenie *zespolonej przestrzeni liniowej*. Elementami przestrzeni liniowych mogą być: wektory na prostej, płaszczyźnie lub w przestrzeni, ciągi liczbowe skończone lub nieskończone, macierze, funkcje, zbiory itp. Różnicę wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ przestrzeni liniowej definiujemy wzorem:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$

Ćwiczenie 1.2 Sprawdzić, czy zbiory ze wskazanymi działaniami są przestrzeniami liniowymi:

- (a) zbiór wektorów na płaszczyźnie ze zwykłymi działaniami: dodawaniem wektorów i mnożeniem wektora przez liczbę;
- (b) zbiór wielomianów stopnia 5 ze zwykłymi działaniami: dodawaniem wielomianów i mnożeniem wielomianu przez liczbę;
- (c) zbiór macierzy wymiaru 3×4 ze zwykłymi działaniami: dodawaniem macierzy i mnożeniem macierzy przez liczbę;
- (d) zbiór ciągów nieskończonych z działaniami $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$ oraz $\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots)$, gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (e) zbiór funkcji okresowych o okresie $T = 2\pi$ ze zwykłymi działaniami na funkcjach.

Ćwiczenie 1.3 (*własności działań na wektorach przestrzeni liniowej*)

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. Pokazać, że prawdziwe są stwierdzenia:

- (a) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ dla każdego $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$;
- (b) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (c) $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies (\alpha = 0 \text{ lub } \mathbf{v} = \mathbf{0})$;
- (d) $(\alpha\mathbf{v} = \beta\mathbf{v} \text{ oraz } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}) \implies \alpha = \beta$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$;
- (e) $(-\alpha)\mathbf{v} = -(\alpha\mathbf{v}) = \alpha(-\mathbf{v})$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz każdego $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$;
- (f) $(\alpha\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} \text{ oraz } \alpha \neq 0) \implies \mathbf{u} = \mathbf{v}$ dla dowolnych $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$;
- (g) $(\alpha - \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} - \beta\mathbf{v}$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oraz każdego $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

FAKT 1.4 (*podstawowe przestrzenie liniowe*)

1. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną oraz niech

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \in \mathbb{R} \text{ dla } 1 \leq k \leq n\}.$$

Równość i działania w zbiorze $\mathbb{R}^n$ określamy w następujący sposób:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff x_k = y_k, \text{ dla każdego } 1 \leq k \leq n,$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{R}^n$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

2. Niech

$$\mathbb{R}^\infty = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) : x_n \in \mathbb{R} \text{ dla } n \in \mathbb{N}\}.$$

Równość i działania w zbiorze $\mathbb{R}^\infty$ określamy w następujący sposób:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff x_k = y_k, \text{ dla każdego } k \in \mathbb{N},$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots), \quad \alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots),$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{R}^\infty$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

3. Niech $\mathbb{R}[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów rzeczywistych. Równość i działania w zbiorze $\mathbb{R}[x]$ wprowadzamy w naturalny sposób, tzn.

$$p = q \iff p(x) = q(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\alpha p)(x) = \alpha p(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

gdzie p, q są dowolnymi wielomianami, natomiast $\alpha \in \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{R}[x]$ z tak wprowadzonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

4. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną oraz niech $\mathbb{R}_n[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż n . Równość i działania w zbiorze $\mathbb{R}_n[x]$ wprowadzamy w naturalny sposób, tzn.

$$p = q \iff p(x) = q(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\alpha p)(x) = \alpha p(x), \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

gdzie p, q są dowolnymi wielomianami, natomiast $\alpha \in \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{R}_n[x]$ z tak wprowadzonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

5. Niech $\mathbb{C}(I)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych na przedziale $I \subset \mathbb{R}$. Równość i działania w zbiorze $\mathbb{C}(I)$ wprowadzamy w naturalny sposób, tzn.

$$f = g \iff f(x) = g(x) \text{ dla każdego } x \in I,$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \text{ dla każdego } x \in I,$$

gdzie $f, g \in \mathbb{C}(I)$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{C}(I)$ z tak wprowadzonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

6. Niech m, n będą ustalonymi liczbami naturalnymi oraz niech $\mathbb{M}_{m \times n}$ oznacza zbiór wszystkich macierzy rzeczywistych o m wierszach i n kolumnach. Równość i działania w przestrzeni $\mathbb{M}_{m \times n}$ wprowadzamy w sposób naturalny, tzn.:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \text{ dla każdego } 1 \leq i \leq m \text{ oraz dla każdego } 1 \leq j \leq n,$$

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}], \quad \alpha A = [\alpha a_{ij}],$$

gdzie $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{m \times n}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{M}_{m \times n}$ z tak wprowadzonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

Uwaga. Rozważa się także zespolone odpowiedniki wprowadzonych wyżej rzeczywistych przestrzeni liniowych.

1.2. Podprzestrzeń przestrzeni liniowej

Definicja 1.5 (*podprzestrzeń przestrzeni liniowej*)

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. Niepusty zbiór $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ nazywamy *podprzestrzenią liniową* przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, jeżeli spełnia warunki:

- (1) $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in \mathbb{W}$ dla dowolnych $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{W}$;
- (2) $\alpha \mathbf{w} \in \mathbb{W}$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz każdego $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$.

Uwaga. Warunki (1), (2) powyższej definicji można zastąpić jednym:

- (3) $\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 \in \mathbb{W}$ dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{W}$.

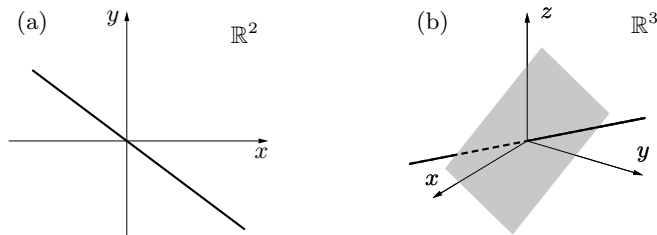
Zbiór $\{\mathbf{0}\}$ oraz przestrzeń $\mathbb{V}$ są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Zbiory te nazywamy *podprzestrzeniami niewłaściwymi*. Pozostałe podprzestrzenie przestrzeni $\mathbb{V}$ nazywamy *podprzestrzeniami właściwymi*. Można pokazać, że każda podprzestrzeń liniowa przestrzeni liniowej jest przestrzenią liniową.

Ćwiczenie 1.6 Korzystając z definicji zbadać, czy zbiór $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, jeżeli:

- (a) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$;
- (b) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 = 0, x_2 + 3x_3 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$;
- (c) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$;
- (d) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) : \text{granica } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ jest skończona}\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^\infty$;
- (e) $\mathbb{W}$ – zbiór wszystkich wielomianów stopnia parzystego, $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$;
- (f) $\mathbb{W}$ – zbiór funkcji parzystych i ciągłych na przedziale $[-1, 1]$, $\mathbb{V} = \mathbb{C}([-1, 1])$;
- (g) $\mathbb{W}$ – zbiór macierzy diagonalnych stopnia 3, $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{3 \times 3}$;
- (h) $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{4 \times 4} : \det A = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{4 \times 4}$.

Ćwiczenie 1.7 Uzasadnić, że jedynymi podprzestrzeniami właściwymi przestrzeni:

- (a) $\mathbb{R}^2$ są proste przechodzące przez początek układu współrzędnych;
- (b) $\mathbb{R}^3$ są proste i płaszczyzny przechodzące przez początek układu współrzędnych.

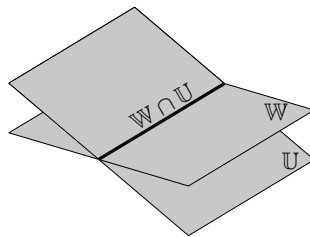


Rys. 1.1. Podprzestrzenie właściwe przestrzeni (a) $\mathbb{R}^2$; (b) $\mathbb{R}^3$

FAKT 1.8 (o iloczynie i sumie podprzestrzeni liniowych)

Niech U i W będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V . Wówczas

1. zbiór $U \cap W$ jest podprzestrzenią przestrzeni V ;



Rys. 1.2. Część wspólna podprzestrzeni jest podprzestrzenią

2. zbiór $U \cup W$ jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $U \subset W$ lub $W \subset U$.

Dowód. 1. Niech $v_1, v_2 \in U \cap W$ oraz niech $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Wówczas $v_1, v_2 \in U$ oraz $v_1, v_2 \in W$. Ponieważ zbiory U, W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V , więc $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in U$ i $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in W$. Stąd wynika, że $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in U \cap W$.

2. Najpierw udowodnimy implikację w prawo ($\implies$). Załóżmy, że zbiór $U \cup W$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V . Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że nie zachodzi żaden z warunków: $U \subset W, W \subset U$. To oznacza, że istnieją wektory $u, w \in V$ takie, że $u \in U$ i $u \notin W$ oraz $w \in W$ i $w \notin U$. Ponieważ $u \in U \cup W$ i $w \in U \cup W$, więc $u + w \in U \cup W$, bo $U \cup W$ jest podprzestrzenią liniową. Stąd wynika, że $u + w \in U$ lub $u + w \in W$. Gdyby $u + w \in U$, to $w = (u + w) - u \in U$, co przeczy warunkowi $w \notin U$. Podobnie, gdyby $u + w \in W$, to $u = (u + w) - w \in W$, a to jest sprzeczne z warunkiem $u \notin W$. Z otrzymanych sprzeczności wynika, że $U \subset W$ lub $W \subset U$.

Przechodzimy teraz do dowodu implikacji w lewo ($\impliedby$). Załóżmy, że $U \subset W$ lub $W \subset U$. Wówczas $U \cup W = W$ lub $U \cup W = U$. W obu przypadkach to oznacza, że zbiór $U \cup W$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V .

Ćwiczenie 1.9 Które ze zbiorów W_1, W_2 są podprzestrzeniami przestrzeni V :

(a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0 \text{ i } 3x - 2y + z = 0\},$

- $$\mathbb{W}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0 \text{ lub } 3x - 2y + z = 0\}, \mathbb{V} = \mathbb{R}^3;$$
- (b) $\mathbb{W}_1 = \left\{ (a_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny i } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\},$
- $$\mathbb{W}_2 = \left\{ (a_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny lub } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\}, \mathbb{V} = \mathbb{R}^\infty;$$
- (c) $\mathbb{W}_1 = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(1) = 0 \text{ lub } p'(2) = 0\},$
- $$\mathbb{W}_2 = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(1) = 0 \text{ i } p'(2) = 0\}, \mathbb{V} = \mathbb{R}[x]?$$
- (d) $\mathbb{W}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2} : a + b = 0 \text{ i } c + d = 0 \right\},$
- $$\mathbb{W}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2} : a + b = 0 \text{ lub } c + d = 0 \right\}?$$

1.3. Liniowa niezależność wektorów

Definicja 1.10 (*liniowa niezależność i zależność wektorów*)

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. Mówimy, że wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{V}$ ($n \in \mathbb{N}$) są *liniowo niezależne*, jeżeli dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ z warunku

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

wynikają równości:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

W przeciwnym przypadku mówimy, że wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ są *liniowo zależne*. Równoważnie: wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{V}$ są liniowo zależne, jeżeli istnieją $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, nie wszystkie równe 0, takie, że

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Ćwiczenie 1.11 W przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, korzystając z definicji zbadać liniową niezależność wektorów:

- (a) $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), \mathbb{V} = \mathbb{R}^3;$
- (b) $x^2 - 1, x + 1, -x^2 + 2x + 3, -2x + 3, \mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x];$
- (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{V} = \mathbb{M}_{2 \times 2};$ (d) $\sin x, \cos x, \mathbb{V} = \mathbb{C}([0, 2\pi]).$

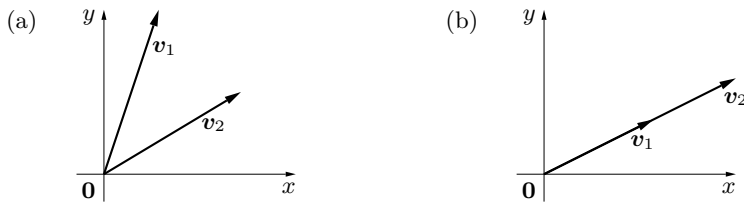
Ćwiczenie 1.12 Wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ są liniowo niezależne. Zbadać liniową niezależność wektorów:

- (a) $2\mathbf{u}, -\mathbf{v}, \frac{1}{3}\mathbf{w}$; (b) $3\mathbf{u} + \mathbf{v}, 2\mathbf{v} - 4\mathbf{w}$;
 (c) $\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}$; (d) $\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{w}$.

Ćwiczenie 1.13 (o liniowej niezależności wektorów na płaszczyźnie/w przestrzeni)

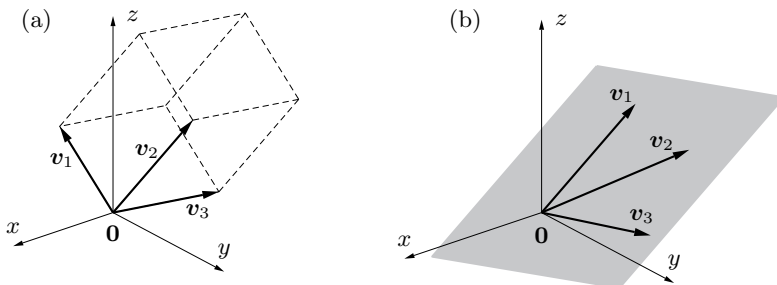
Pokazać, że:

- (a) dwa wektory na płaszczyźnie są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy nie są współliniowe;



Rys. 1.3. Wektory na płaszczyźnie liniowo (a) niezależne; (b) zależne

- (b) trzy wektory w przestrzeni są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy nie są współpłaszczyznowe.



Rys. 1.4. Wektory w przestrzeni liniowo (a) niezależne; (b) zależne

FAKT 1.14 (własności wektorów liniowo niezależnych i liniowo zależnych)

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\mathbf{v}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) będą wektorami z tej przestrzeni. Ponadto niech $\mathbb{W}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Wówczas prawdziwe są stwierdzenia:

1. wektor $\mathbf{v}$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$;
2. wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n, \mathbf{0}$ są liniowo zależne;
3. jeżeli wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ są liniowo zależne, to wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n, \mathbf{v}$ są również liniowo zależne;
4. jeżeli wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ są liniowo niezależne, to wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ ($k < n$) są również liniowo niezależne;

5. jeżeli wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{W}$ są liniowo niezależne (zależne) w przestrzeni $\mathbb{V}$, to są również liniowo niezależne (zależne) w podprzestrzeni $\mathbb{W}$.

Dowód. 1. Jeżeli $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ i $\alpha \mathbf{v} = \mathbf{0}$, to $\alpha = 0$ jako wniosek z aksjomatów przestrzeni liniowej (Ćwiczenie ?? własność 3.). Wektor $\mathbf{v}$ jest więc liniowo niezależny.

2. Ponieważ

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{w}_1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{w}_n = \mathbf{0},$$

więc wektory $\mathbf{0}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ są liniowo zależne.

3. Z liniowej zależności wektorów $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ wynika istnienie stałych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nie wszystkich równych 0 takich, że

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{w}_n = \mathbf{0}.$$

Stąd mamy

$$0 \cdot \mathbf{v} + \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{w}_n = \mathbf{0}.$$

To oznacza, że wektory $\mathbf{v}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ także są liniowo zależne.

4. Załóżmy liniową niezależność wektorów $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$. Niech teraz

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \mathbf{w}_k = \mathbf{0},$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ oraz $k < n$. Wówczas mamy

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{w}_k + 0 \cdot \mathbf{w}_{k+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{w}_n = \mathbf{0}.$$

Z liniowej niezależności wszystkich n wektorów wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. To z kolei oznacza liniową niezależność wektorów $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$.

5. To stwierdzenie wynika bezpośrednio z definicji liniowej niezależności (zależności) wektorów.

Definicja 1.15 (kombinacja liniowa wektorów)

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. *Kombinacją liniową* wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{V}$ o współczynnikach rzeczywistych (zespólonych) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nazywamy wektor

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

Ćwiczenie 1.16 Napisać kombinacje liniowe podanych wektorów ze wskazanymi współczynnikami:

(a) $\mathbf{v}_1 = (0, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 3)$, $\alpha_1 = -1/2$, $\alpha_2 = 2$, gdzie $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$;

(b) $p_1(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $p_2(x) = 2x - 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, gdzie $\mathbb{V} = \mathbb{R}_3[x]$;

(c) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, gdzie $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2 \times 2}$.

FAKT 1.17 (liniowa niezależność a kombinacje liniowe)

1. Wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ ($n \geq 2$) są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy

co najmniej jeden z nich (np. $\mathbf{w}_k$, gdzie $1 < k < n$) jest kombinacją liniową pozostałych:

$$\mathbf{w}_k = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \alpha_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} + \alpha_{k+1} \mathbf{w}_{k+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{w}_n,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

2. Jeżeli wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ są liniowo niezależne, a wektory $\mathbf{v}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ są liniowo zależne, to wektor $\mathbf{v}$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{w}_n,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Dowód. 1. Załóżmy, że wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ są liniowo zależne. Wówczas istnieją liczby $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, z których co najmniej jedna (np. α_k , $1 < k < n$) nie jest zerem, takie, że

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} + \alpha_k \mathbf{w}_k + \alpha_{k+1} \mathbf{w}_{k+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{w}_n = \mathbf{0}.$$

Stąd wynika, że

$$\mathbf{w}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} \mathbf{w}_1 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \mathbf{w}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \mathbf{w}_{k+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k} \mathbf{w}_n,$$

więc wektor $\mathbf{w}_k$ jest rzeczywiście kombinacją liniową pozostałych. Z drugiej strony zakładając, że

$$\mathbf{w}_k = \beta_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \beta_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} + \beta_{k+1} \mathbf{w}_{k+1} + \dots + \beta_n \mathbf{w}_n,$$

otrzymujemy równość

$$\beta_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \beta_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} - 1 \cdot \mathbf{w}_k + \beta_{k+1} \mathbf{w}_{k+1} + \dots + \beta_n \mathbf{w}_n = \mathbf{0}.$$

Z tej równości wynika, że wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ są liniowo zależne.

2. Załóżmy, że wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ są liniowo niezależne, a wektory $\mathbf{v}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ liniowo zależne. Wtedy istnieją liczby $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\alpha \mathbf{v} + \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{w}_n = \mathbf{0},$$

przy czym co najmniej jedna z nich nie jest zerem. Gdyby $\alpha = 0$, to zachodziłaby równość

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{w}_n = \mathbf{0},$$

zaś wśród liczb $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ znajdowałaby się liczba różna od zera. Jest to sprzeczne z liniową niezależnością wektorów $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$. Zatem $\alpha \neq 0$, więc

$$\mathbf{v} = -\frac{\alpha_1}{\alpha} \mathbf{w}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} \mathbf{w}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} \mathbf{w}_n.$$

Uwaga. Wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ ($n \geq 2$) są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z nich nie jest kombinacją liniową pozostałych.

Ćwiczenie 1.18 Uzasadnić, że podane układy funkcji są liniowo zależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}(\mathbb{R})$:

- (a) $1, \sin^2 x, \cos^2 x$; (b) $x, (1+x)^2, (1-x)^2$;
 (c) $\arctg x, \operatorname{arccotg} x, 1$; (d) $\ln(1+x^2)^3, \ln \frac{1}{(1+x^2)^4}$.

Definicja 1.19 (*liniowa niezależność nieskończonego układu wektorów*)

Nieskończony układ wektorów z przestrzeni liniowej jest *liniowo niezależny*, jeżeli każdy jego skończony podukład jest liniowo niezależny. W przeciwnym przypadku mówimy, że układ ten jest *liniowo zależny*.

Ćwiczenie 1.20 Uzasadnić liniową niezależność nieskończonych układów wektorów we wskazanych przestrzeniach liniowych:

- (a) $(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), (0, 0, 1, \dots), \dots, \mathbb{R}^\infty$; (b) $1, x, x^2, \dots, \mathbb{R}[x]$;
 (c*) $\sinh x, \sinh 2x, \sinh 3x, \dots, \mathbb{C}(\mathbb{R})$; (d*) $e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}(\mathbb{R})$.

TWIERDZENIE 1.21 (*kryterium liniowej niezależności funkcji*)

Niech funkcje $f_1, f_2, \dots, f_n$ będą określone na przedziale I i mają tam ciągle pochodne rzędu $n-1$ ($n \geq 2$). Ponadto niech wrońskian układu tych funkcji, tj. wyznacznik

$$\det \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix},$$

nie znika tożsamościowo na I . Wtedy funkcje $f_1, f_2, \dots, f_n$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{C}(I)$.

Dowód. Niech funkcje $f_1, f_2, \dots, f_n$ spełniają założenia twierdzenia oraz niech

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) \equiv 0.$$

Różniczkując $n-1$ -krotnie powyższą tożsamość otrzymamy kolejno następujące związki:

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2 f_2'(x) + \dots + \alpha_n f_n'(x) &\equiv 0, \\ \alpha_1 f_1''(x) + \alpha_2 f_2''(x) + \dots + \alpha_n f_n''(x) &\equiv 0, \\ &\vdots \\ \alpha_1 f_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 f_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(x) &\equiv 0. \end{aligned}$$

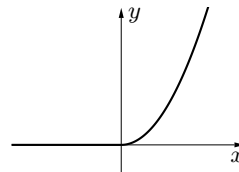
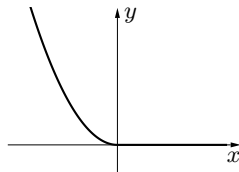
Możemy więc zapisać, że dla każdego $x \in I$ zachodzi wzór

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Otrzymaliśmy dla każdego $x \in I$ jednorodny układ n równań z n niewiadomymi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Z założenia istnieje takie $x \in I$, dla którego wyznacznik macierzy głównej tego układu jest różny od zera. W tym przypadku jego jedyne rozwiązanie, jako układu Cramera, jest zerowe. Zatem $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$, skąd wynika liniowa niezależność funkcji $f_1, f_2, \dots, f_n$. To kończy dowód.

Uwaga*. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Na przykład funkcje:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x \geq 0, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$



są liniowo niezależne, ale ich wrońskian znika tożsamościowo na $\mathbb{R}$.

Ćwiczenie* 1.22 Korzystając z powyższego kryterium uzasadnić liniową niezależność układów funkcji:

- (a) $\sin x, \cos x$; (b) $e^{-x}, 1, e^x$; (c) $e^x, xe^x, e^{2x}, xe^{2x}$;
 (d) $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$; (e) $e^{4x} \sin x, e^{3x} \cos 2x, e^{2x} \sin 3x, e^x \cos 4x$
 w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

FAKT 1.23 (warunek konieczny i dostateczny liniowej niezależności funkcji)

Funkcje $f_1, f_2, \dots, f_n$ z przestrzeni $\mathbb{C}(I)$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy w przedziale I istnieją liczby $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ takie, że

$$\det \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Dowód. Konieczność warunku jest oczywista (wynika z definicji liniowej niezależności funkcji). W dowodzie dostateczności zastosujemy metodę indukcji matematycznej.

Niech $n = 1$. Jeżeli funkcja f_1 jest liniowo niezależna, to nie jest tożsamościowo równa zeru. Istnieje więc liczba $x_1 \in I$ taka, że $f_1(x_1) \neq 0$. Załóżmy teraz, że dowodzona własność jest spełniona dla n funkcji. Ponadto niech funkcje $f_1, \dots, f_n, f_{n+1}$ będą liniowo niezależne. Wówczas funkcje $f_1, \dots, f_n$ są liniowo niezależne, więc z założenia indukcyjnego istnieją liczby $x_1, \dots, x_n \in I$ takie, że $d = \det [f_i(x_j)]_{i,j=1}^n \neq 0$. Niech

$$D(x) = \det \begin{bmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_n) & f_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_n) & f_n(x) \\ f_{n+1}(x_1) & \dots & f_{n+1}(x_n) & f_{n+1}(x) \end{bmatrix}$$

dla $x \in I$. Korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem ostatniej kolumny, otrzymamy

$$D(x) = c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) + d f_{n+1}(x)$$

dla pewnych liczb $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ oraz dla $d \neq 0$. Warunek $D(x) \equiv 0$ jest sprzeczny z liniową niezależnością funkcji $f_1, \dots, f_n, f_{n+1}$. Istnieje więc $x_{n+1} \in I$ spełniający warunki $x_{n+1} \neq x_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $D(x_{n+1}) \neq 0$. To kończy dowód.

Ćwiczenie* 1.24 Stosując powyższy fakt uzasadnić liniową niezależność układów funkcji:

(a) $x, \sin x, x^2, \sin^2 x$; (b) $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, \dots, e^{nx}$ ($n \in \mathbb{N}$)

w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

1.4. Baza i wymiar przestrzeni liniowej

Definicja 1.25 (*operacja generowania*)

Niech $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ będą wektorami z przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ oznaczamy przez

$$\text{lin} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \}.$$

Zatem

$$\text{lin} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \} = \{ \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n : \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ dla } 1 \leq i \leq n \}.$$

Podobnie określa się operację lin dla nieskończonego zbioru A wektorów:

$$\text{lin } A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n : \mathbf{v}_i \in A \text{ oraz } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ dla } 1 \leq i \leq n \}.$$

Uwaga. Jeżeli $B = \text{lin } A$, to mówimy, że zbiór B jest *generowany* przez zbiór A lub, że jest jego *powłoką liniową*. Elementy zbioru A nazywamy wtedy *generatorami* zbioru B . Operację generowania liniowego w zespolonej przestrzeni liniowej będziemy oznaczać symbolem $\text{lin}_{\mathbb{C}}$. Operację generowania oznacza się także symbolem span .