

ALGEBRA I ANALIZA

Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA I ANALIZA

Egzaminy na ocenę celującą

Wydanie drugie rozszerzone



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2017

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Copyright © 2016, 2017 by Oficyna Wydawnicza GiS

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie L^AT_EX.

ISBN 978-83-62780-50-1

Wydanie drugie rozszerzone, Wrocław 2017
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: I-BiS Usługi Komputerowe Wydawnictwo s.c.

Spis treści

Wstęp	6
Algebra i geometria analityczna	7
Zestawy zadań	7
Odpowiedzi, rozwiązania, wskazówki	18
Analiza matematyczna 1	43
Zestawy zadań	43
Odpowiedzi, rozwiązania, wskazówki	54
Analiza matematyczna 2	78
Zestawy zadań	78
Odpowiedzi, rozwiązania, wskazówki	92
Źródła zadań	125

Wstęp

Od roku 1994 w Politechnice Wrocławskiej odbywa się konkurs matematyczny pn. „Egzamin na ocenę celującą”. W każdym roku akademickim egzamin jest organizowany dwukrotnie. W semestrze zimowym studenci zdają go z Algebry z geometrią analityczną oraz Analizy matematycznej 1, a w semestrze letnim — z Analizy matematycznej 2. Materiał obowiązujący na egzaminie obejmuje działy algebry i analizy tradycyjnie wykładane w uczelniach technicznych. Jednakże zadania są nietypowe, a ich rozwiązanie wymaga pomysłowości. Do udziału w konkursie dopuszczeni są studenci pierwszego roku, który najlepiej zaliczyli obowiązkowe kursy z matematyki. Na egzaminach uczestnicy otrzymują do rozwiązania 4 zadania w czasie 3 godzin.

Zestawy zadań z tych egzaminów zebrano w niniejszym zbiorze. Składa się on z trzech rozdziałów poświęconych poszczególnym przedmiotom. W pierwszej części rozdziałów umieszczono zestawy zadań z egzaminów, a w drugiej podano pełne rozwiązania zadań albo odpowiedzi ze wskazówkami. W wykazie na końcu zbioru podano autorów zadań albo wskazano skąd zaczerpnięto zadania. Rozwiązania pochodzą od autora opracowania albo z tych samych źródeł co zdania. Ponadto wykorzystano pomysły rozwiązań kilku zadań zaproponowane przez kolegów z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej. Dziękuję za zgodę na ich opublikowanie.

Do obecnego wydania dołączono zestawy zadań z egzaminów na ocenę celującą, które odbyły się w roku akademickim 2016/17. Ponadto poprawiono zauważone błędy iusterki

Czytelników uprzejmie proszę o zgłaszanie uwag o zadaniach oraz o wskazanie błędów i usterek w zbiorze. Mile widziane będą nowe oryginalne problemy na egzaminy.

Zbigniew Skoczylas

Algebra i geometria analityczna

Zestawy zadań

Styczeń 2016 r.

Rozwiązania str. 9

1. Na płaszczyźnie zespolonej zaznaczono parami różne niezerowe liczby z_1, z_2, z_3, z_4 . Korzystając tylko z cyrkla i linijki skonstruować wszystkie elementy zbioru $\sqrt[4]{z_1 z_2 z_3 z_4}$.
2. Znaleźć pierwiastki zespolone wielomianu $z^4 + 7iz^3 - 13z^2 + iz - 20$.
3. Wiersze od drugiego do ostatniego wyznacznika stopnia n ($n \geq 2$) wypełnić liczbami całkowitymi tak, aby po wpisaniu do pierwszego wiersza dowolnych liczb ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, wartość wyznacznika była liczbą z pierwszego wiersza (odczytaną w układzie dziesiętnym).
4. Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt. Płaszczyzna przecina krawędzie boczne ostrosłupa i wyznacza na nich kolejno odcinki o długościach 3, 2, 4, k , licząc od wierzchołka. Metodami geometrii analitycznej w $\mathbb{R}^3$ znaleźć k .

Odpowiedzi, rozwiązania, wskazówki

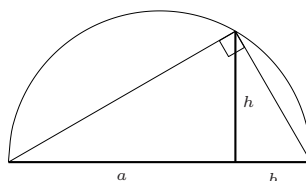
Styczeń 2016 r.

Zestaw str. 9

1. Niech $z_k = r_k (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$ dla $1 \leq k \leq 4$, przy czym $r_k > 0$. Ze wzoru de Moivre'a oraz ze wzoru na pierwiastki zespolone wynika, że jeden z elementów zbioru $\sqrt[4]{z_1 z_2 z_3 z_4}$ ma postać:

$$\omega_1 = \sqrt[4]{r_1 r_2 r_3 r_4} \left(\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{4} + i \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{4} \right),$$

a pozostałymi elementami są $\omega_2 = i\omega_1$, $\omega_3 = -\omega_1$, $\omega_4 = -\omega_2$. Zatem problem sprowadza się do następującego: jak mając odcinki o długościach r_1, r_2, r_3, r_4 oraz kąty $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ skonstruować odcinek o długości $\sqrt[4]{r_1 r_2 r_3 r_4}$ oraz kąt $(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)/4$. Najpierw przypomimy, jak konstruuje się odcinek o długości $h = \sqrt{ab}$, gdy dane są odcinki o długości a i b . Konstrukcja jest pokazana na rysunku.



Z równości

$$\sqrt[4]{r_1 r_2 r_3 r_4} = \sqrt{\sqrt{r_1 r_2} \cdot \sqrt{r_3 r_4}}$$

wynika, że powtarzając tę konstrukcję 3 – krotnie otrzymamy odcinek o żądanej długości. Przechodzimy do konstrukcji kąta $(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)/4$. Najpierw budujemy kąt $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$. Następnie stosując dwukrotnie standardowy sposób dzielenia kąta na połowę otrzymamy żądany kąt.

2. Ponieważ przed nieparzystymi potęgami zmiennej z występują liczby zawierające tylko część urojoną, więc podstawiamy $z = iw$. Wielomian przyjmie wtedy postać

$$(iw)^4 + 7i(iw)^3 - 13(iw)^2 + i(iw) - 20 = w^4 + 7w^3 + 13w^2 - w - 20.$$

Teraz sprawdzamy, czy wielomian ma pierwiastki całkowite. Szukamy ich wśród podzielników liczby 20. Okaże się, że pierwiastkami całkowitymi będą tylko $w_1 = 1$ oraz $w_2 = -4$. Po podzieleniu wielomianu $w^4 + 7w^3 + 13w^2 - w - 20$ przez iloczyn $(w - 1)(w + 4)$ otrzymamy $w^2 + 4w + 5$. Standardowo wyznaczamy pierwiastki otrzymanego ilorazu. Są nimi $w_3 = -2 - i, w_4 = -2 + i$. Mnożąc otrzymane liczby przez i otrzymamy pierwiastki wyjściowego wielomianu:

$$z_1 = i, z_2 = -4i, z_3 = 1 - 2i, z_4 = -1 - 2i.$$

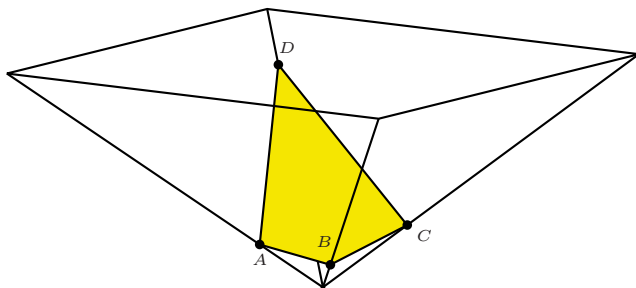
3. Przykład takiego wyznacznika podajemy niżej

$$\det \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ -1 & 10 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 10 \end{bmatrix} = [c_1 c_2 c_3 \cdots c_{n-1} c_n]_{10}.$$

Inny wyznacznik podał dr Jerzy Cisko

$$\det \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 10^{n-1} \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 10^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 10^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 10 \end{bmatrix} = [c_1 c_2 c_3 \cdots c_{n-1} c_n]_{10}.$$

4. Niech $\mathbf{a} = (p, q, r)$, $\mathbf{b} = (-p, q, r)$, $\mathbf{c} = (-p, -q, r)$, $\mathbf{d} = (p, -q, r)$ ($p > 0, q > 0, r > 0$) będą wersorami kierunkowymi krawędzi ostrosłupa. Ponadto niech A, B, C, D będą punktami przecięcia płaszczyzny z krawędziami wyznaczonymi odpowiednio przez wersory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ (rysunek).



Wtedy

$$\begin{aligned}A &= 3\mathbf{a} = (3p, 3q, 3r), & B &= 2\mathbf{b} = (-2p, 2q, 2r), \\C &= 4\mathbf{c} = (-4p, -4q, 4r), & D &= k\mathbf{d} = (kp, -kq, kr).\end{aligned}$$

Zastosujemy teraz łatwą do uzasadnienia równoważność:

$$\text{punkty } A_i = (x_i, y_i, z_i) \ 1 \leq i \leq 4 \text{ są współpłaszczyznowe} \iff \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Podstawiając współrzędne punktów A, B, C, D otrzymamy:

$$\det \begin{bmatrix} 3p & 3q & 3r & 1 \\ -2p & 2q & 2r & 1 \\ -4p & -4q & 4r & 1 \\ kp & -kq & kr & 1 \end{bmatrix} = 0 \iff -8pqr(k-12) = 0.$$

Zatem $k = 12$.

Analiza matematyczna 1

Zestawy zadań

Luty 2016 r.

Rozwiązania str. 13

1. Pokazać, że dla pewnej liczby naturalnej n rozwinięcie dziesiętne $\sqrt{n}$ zaczyna się układem cyfr 2016, a bezpośrednio po przecinku ma 7 „siódemek”. Pozostałe cyfry rozwinięcia mogą być dowolne.

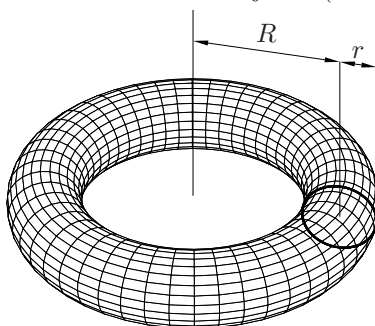
2. Jakie wartości może przyjąć granica

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x^2)}{f(x)},$$

gdy f jest funkcją ciągłą na przedziale $[0, 1)$ i dodatnią na $(0, 1)$?

3. Znaleźć wielomian, który tylko w -1 i 2 ma ekstrema lokalne właściwe (odpowiednio minimum i maksimum), a ponadto tylko w 0 ma punkt przegięcia.

4. Niech funkcja f będzie ciągła i nieujemna na przedziale $[a, b]$ ($a \geq 0$). Wyprowadzić wzór na objętość bryły powstałej z obrotu obszaru $\{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ wokół osi Oy . Korzystając z niego obliczyć objętość torusa, tj. bryły powstałej z obrotu koła o promieniu r wokół osi oddalonej o R ($R > r$) od jego środka.



Odpowiedzi, rozwiązania, wskazówki

Luty 2016 r.

Zestaw str. 12

1. Wykorzystamy łatwy do sprawdzenia fakt, że dla $a \in \mathbb{R}$ ciągi

$$x_m = \sqrt{(m+a)^2 + 1} - m, \quad y_m = \sqrt{(m+a)^2 + 2} - m$$

są malejące i mają granicę a . Inaczej mówiąc dla dostatecznie dużych m zachodzi wzór przybliżony $\sqrt{(m+a)^2 + 1} \approx m+a$ (z dowolną dokładnością i z nadmiarem z lewej strony). Tak samo jest dla drugiego ciągu. Zatem, jeśli przyjmiemy $m = 2016 \cdot 10^{k-1}$ ($k \in \mathbb{N}$) oraz $a = 0,7777777$, to dla dostatecznie dużego k otrzymamy wzór przybliżony

$$\sqrt{(2016 \cdot 10^{k-1} + 0,7777777)^2 + 2} \approx 2016 \cdot 10^{k-1} + 0,7777777$$

np. z dokładnością 10^{-8} . To zaś oznacza, że dla tych k liczbę n można określić następująco

$$n = \left\lfloor (2016 \cdot 10^{k-1} + 0,7777777)^2 + 2 \right\rfloor.$$

Rzeczywiście mamy wtedy

$$\begin{aligned} & \sqrt{(2016 \cdot 10^{k-1} + 0,7777777)^2 + 1} - 2016 \cdot 10^{k-1} \\ & \leq \sqrt{n} - 2016 \cdot 10^{k-1} \leq \\ & \sqrt{(2016 \cdot 10^{k-1} + 0,7777777)^2 + 2} - 2016 \cdot 10^{k-1}, \end{aligned}$$

a oba ciągi ograniczające mają tę samą granicę $0,7777777$. Okazuje się, że już dla $k = 5$ mamy

$$\begin{aligned} \sqrt{n} &= \sqrt{\left\lfloor (2016 \cdot 10^5 + 0,7777777)^2 + 2 \right\rfloor} = \sqrt{40\,642\,560\,313\,599\,971} \\ &= \mathbf{2016\,000\,00,7777\,777\,043\dots} \end{aligned}$$

2. Oczywiście jest, że jeżeli rozważana granica istnieje, to jest nieujemna. Pokażemy, że może być ona dowolną liczbą z przedziału $[0, 1]$. Rzeczywiście dla funkcji $f(x) = x$, $f(x) = x + 1$ oraz

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(-\ln(x))^p} & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad (p > 0),$$

mamy odpowiednio:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(-\ln(x^2))^p}}{\frac{1}{(-\ln(x))^p}} = \frac{1}{2^p} \in (0, 1).$$

Czytelnikowi zostawiamy do pokazania, że granica

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x^2)}{f(x)}$$

nie przyjmuje wartości większej od 1.

3. Skoro wielomian w ma tylko w punktach $-1, 2$ odpowiednio minimum i maksimum, to jego pochodna może mieć np. postać:

$$w'(x) = -(x+1)(x-2)(x^2+ax+b),$$

przy czym $\delta_1 = a^2 - 4b < 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} w''(x) &= -[(x+1)(x-2)(x^2+ax+b)]'' \\ &= -4x^3 + (3-3a)x^2 + (2a-2b+4)x + (2a+b). \end{aligned}$$

Ponieważ wykres wielomianu w tylko w 0 ma punkt przegięcia, więc

$$w''(0) = 2a + b = 0 \quad \text{oraz} \quad w''(x) \neq 0 \quad \text{dla} \quad x \neq 0.$$

Podstawiając $b = -2a$ do $w''(x)$ otrzymamy

$$w''(x) = -x(4x^2 - (3-3a)x - 6a - 4).$$

Zatem dodatkowo powinien być spełniony warunek:

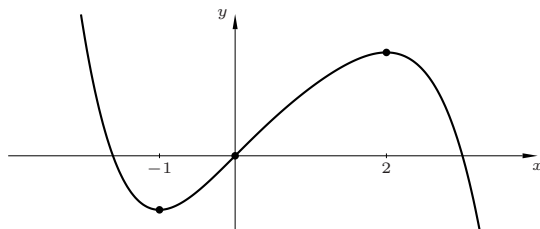
$$\delta_2 = (3-3a)^2 + 16(6a+4) < 0 \iff 9a^2 + 78a + 73 < 0.$$

Szukamy liczb a, b spełniających układ warunków:

$$\begin{cases} a^2 - 4b < 0, \\ 2a + b = 0, \\ 9a^2 + 78a + 73 < 0. \end{cases}.$$

Rozwiązaniem jest np. $a = -2, b = 4$. Ponieważ $w'(x) = -(x+1)(x-2)(x^2-2x+4)$, więc

$$\begin{aligned} w(x) &= \int w'(x) dx \\ &= - \int (x+1)(x-2)(x^2-2x+4) dx \\ &= -\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 8x \quad (\text{w całce przyjęto stałą } C = 0). \end{aligned}$$



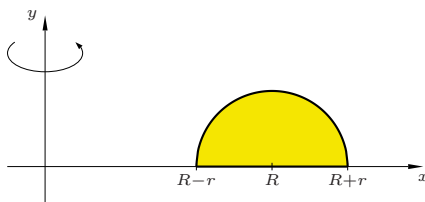
4. Wzór na objętość bryły V powstałej z obrotu obszaru

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

wokół osi Oy ma postać

$$\text{objętość}(V) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Dla górnej połowy torusa mamy $[a, b] = [R-r, R+r]$ oraz $f(x) = \sqrt{r^2 - (x-R)^2}$.



Zatem

$$\begin{aligned} \text{objętość } (V) &= 2 \cdot 2\pi \int_{R-r}^{R+r} x \sqrt{r^2 - (x-R)^2} dx \left[\begin{array}{l} u = x - R \\ du = dx \end{array} \right] \\ &= 4\pi \int_{-r}^r (u+R) \sqrt{r^2 - u^2} du = 4\pi \left[\int_{-r}^r u \sqrt{r^2 - u^2} du + R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - u^2} du \right]. \end{aligned}$$

Pierwsza całka jest równa 0, bo całkujemy funkcję nieparzystą po przedziale symetrycznym. Zaś druga jest równa $\pi r^2/2$, bo wyraża pole półkola o promieniu r . Ostatecznie otrzymamy

$$\text{objętość } (V) = 4\pi \left[0 + R \cdot \frac{\pi r^2}{2} \right] = 2\pi^2 r^2 R.$$

Analiza matematyczna 2

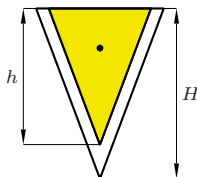
Zestawy zadań

Czerwiec 2016 r.

Rozwiązania str. 17

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (3 \ln(n^2 + 1) - 2 \ln(n^3 + 1))$.

2. Wafelek do lodu ma kształt stożka wydrążonego o wysokości H z jednakową grubością ścianek (rysunek). Masa lodowa (stożek) wypełniająca wafelek ma wysokość h ($h < H$). Przyjmując, że wafelek i masa są jednorodne, a gęstość masy jest 2 razy większa od gęstości wafelka, wyznaczyć położenie środka masy całego lodu.



3. Kątem nachylenia gładkiej powierzchni w ustalonym jej punkcie nazywamy kąt ostry między płaszczyzną styczną w tym miejscu, a poziomem. Obliczyć średni kąt nachylenia wzgórza o równaniu

$$z = \frac{1}{4} - x^2 - y^2 \quad (z \geqslant 0).$$

4. Trzy boki czworokąta wypukłego mają długość 1. Jaka powinna być długość czwartego boku czworokąta oraz jak powinien być on ukształtowany, aby miał największe pole?

Odpowiedzi, rozwiązania, wskazówki

Czerwiec 2016 r.

Zestaw str. 16

1. Najpierw przekształcimy szereg do dogodniejszej postaci. Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3 \ln(n^2 + 1) - 2 \ln(n^3 + 1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n^2 + 1)^3}{(n^3 + 1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^6 + 3n^4 + 3n^2 + 1}{(n^3 + 1)^2}.$$

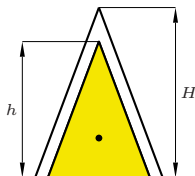
Następnie wykorzystamy kryterium porównawcze zbieżności szeregów. łatwo uzasadnić, że spełnione są nierówności (ln jest funkcją rosnącą):

$$0 \leq \ln \frac{n^6 + 3n^4 + 3n^2 + 1}{(n^3 + 1)^2} \leq \ln \frac{n^6 + 3n^4 + 3n^4 + n^4}{(n^3 + 0)^2} = \ln \frac{n^6 + 7n^4}{n^6} = \ln \left(1 + \frac{7}{n^2}\right) \leq \frac{7}{n^2}.$$

Ostatnia z powyższych nierówności wynika z relacji $\ln(1+x) < x$ ($x > 0$). Ponieważ szereg

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, więc także rozważany szereg jest zbieżny.

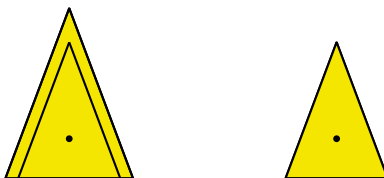
2. Stawiamy loda „do góry nogami”. środek masy wafelka napełnionego masą lodową leży na osi symetrii, zatem wystarczy wyznaczyć tylko współrzędną pionową środka masy.



Skorzystamy ze wzoru na współrzędne środka masy układu dwóch ciał materialnych

$$z = \frac{z_1 \cdot m_1 + z_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

oraz z faktu, że środek masy jednorodnego stożka leży na jego osi symetrii w odległości $1/4$, wysokości licząc od podstawy. Ponadto wykorzystamy fakt mówiący, że objętości brył podobnych mają się do siebie jak sześciany skali ich podobieństwa. Przyjmujemy, że napełniony lodami wafelek składa się z wafelka o wysokości H wypełnionego całkowicie ciastem oraz stożka o wysokości h też wypełnionego ciastem.



Ponieważ chodzi nam o współrzędną z , więc te stożki można postawić obok siebie (rysunek). Wtedy

$$z = \frac{\frac{H}{4} \cdot M + \frac{h}{4} \cdot M \cdot \left(\frac{h}{H}\right)^3}{M + M \cdot \left(\frac{h}{H}\right)^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{H^4 + h^4}{H^3 + h^3}.$$

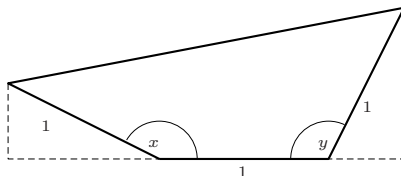
3. Wektor normalny (skierowany w górę) płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = 1/4 - x^2 - y^2$ w punkcie (x, y) ma postać $\mathbf{n} = (2x, 2y, 1)$. Zatem kąt ostry γ nachylenia płaszczyzny stycznej do poziomu wyraża się wzorem $\gamma(x, y) = \arctg \sqrt{4x^2 + 4y^2}$. Stąd mamy

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{sr}} &= \frac{1}{\text{pole}(D)} \iint_D \gamma(x, y) dx dy \\ &= \frac{4}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{4}} \arctg \sqrt{4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} r \arctg 2r dr \right) d\varphi \\ &= 8 \int_0^{\frac{1}{2}} r \arctg 2r dr = \left[(1 + 4r^2) \arctg 2r - 2r \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.57 \text{ [rad]} \approx 33^\circ.\end{aligned}$$

Uwaga. W tym problemie bardziej adekwatne jest przyjęcie definicji wartości średniej funkcji γ na powierzchni Σ z wykorzystaniem całki powierzchniowej (zobacz niżej).

$$\begin{aligned}g_{\text{sr}} &= \frac{1}{\text{pole}(\Sigma)} \iint_{\Sigma} \gamma(x, y, z) dS \\ &= \frac{\iint_D \gamma(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy}{\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy} \\ &= \frac{\iint_D \arctg \sqrt{4x^2 + 4y^2} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy}{\iint_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{4}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy} \quad \text{itd.}\end{aligned}$$

4. Niech x, y oznaczają kąty między bokami o długości 1. Można założyć, że spełniają one nierówności $\pi/2 \leq x < \pi$, $\pi/2 \leq y < \pi$. Ponieważ pole czworokąta jest różnicą pola trapezu i sumy pól dwóch skrajnych trójkątów (rysunek),



więc ma postać:

$$\begin{aligned}P(x, y) &= \frac{1}{2} (\sin x + \sin y) (1 - \cos x - \cos y) + \frac{1}{2} (\sin x \cos x + \sin y \cos y) \\ &= \frac{1}{2} (\sin x + \sin y - \sin(x + y)).\end{aligned}$$

Z warunku koniecznego otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos(x+y) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} \cos y - \frac{1}{2} \cos(x+y) = 0. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu w zbiorze $(\pi/2, \pi) \times (\pi/2, \pi)$ jest para $(x, y) = (2\pi/3, 2\pi/3)$. Zamiast warunku wystarczającego istnienia ekstremum wykorzystamy twierdzenie Weierstrassa o przyjmowaniu wartości ekstremalnych przez funkcję ciągłą dwóch zmiennych na obszarze domkniętym i ograniczonym na płaszczyźnie. W tym celu wystarczy rozszerzyć funkcję P na zbiór $\pi/2 \leq x \leq \pi$, $\pi/2 \leq y \leq \pi$ oraz zauważyć, że na brzegu nie przyjmuje ona wartości ekstremalnych.

Uwaga. Zadanie można rozwiązać inaczej. Połączmy dwa takie same czworokąty nieznanym bokiem. Otrzymamy wtedy sześciokąt o jednakowych bokach. Z twierdzenia izoperymetrycznego wynika, że ma on największe pole, gdy jest sześciokątem foremnym.