TEORIA MULTIFUNKCJI

Andrzej Fryszkowski

TEORIA MULTIFUNKCJI

Wydanie drugie poprawione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2020

Andrzej Fryszkowski
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
a.fryszkowski@mini.pw.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład książki w systemie LaTeX wykonał autor.

ISBN 978-83–62780–75–4

Wydanie II poprawione, Wrocław 2020
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS sp. z o.o., A.Bieroński, P.Bieroński s.j.

Pamięci mojego nauczyciela
Profesora Czesława Olecha (1931 – 2015)

Spis treści

Wstęp

Za początki teorii multifunkcji uważa się prace Zaremby i Marchaud z lat dwudziestych XX wieku, ale ten dział matematyki zaczął się bujnie rozwijać dopiero w latach sześćdziesiątych, jako naturalne uogólnienie teorii sterowania. Multifunkcje stały się błyskawicznie jednym z podstawowych obiektów badanych w analizie liniowej i nieliniowej i przyciągnęły uwagę wielu matematyków na całym świecie. Nie sposób wymienić wszystkich badaczy, którzy zajmowali się multifunkcjami i ich zastosowaniami. Podkreślmy jednak, że wielu matematyków polskich ma w badaniach istotny wkład.

W związku z rozwojem teorii sterowania pojawił się nowy dział równań różniczkowych, dziś nazywany inkluzjami różniczkowymi, w którym dynamika układu opisywana jest, w każdym punkcie, zbiorem dopuszczalnych kierunków. Spowodowało to m.in. konieczność rozpatrywania różnego rodzaju regularności multifunkcji oraz poszukiwania wielowartościowych odpowiedników twierdzeń Banacha, Schaudera i Kakutaniego o punktach stałych. Naszym celem jest zaznajomienie czytelnika z podstawowymi pojęciami i wynikami teorii multifunkcji oraz ich zastosowaniami teorii optymalnego sterowania i w inkluzjach różniczkowych. Materiał bazuje na wykładzie, który prowadziłem kilkakrotnie dla studentów IV i V roku oraz doktorantów na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej. Omawiamy podstawowe typy regularności i teorię selekcji multifunkcji. Dotyczy to selekcji ciągłych, w tym twierdzenia Michaela oraz selekcji mierzalnych - twierdzenie Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego. Opisujemy całki Aumanna i ich własności oraz związane z nimi wyniki Olecha dotyczące sterowania optymalnego układami liniowymi.

Chcemy podkreślić, że dość szczegółowo omawiamy teorię punktów stałych dla multifunkcji i ich wykorzystanie do badania istnienia rozwiązań inkluzji różniczkowych i ich własności. Temat tzw. „zbiorów rozkładalnych” został prawie całkowicie pominięty, a zainteresowanych odsyłam do mojej monografii [**?**]. Również cały dział związany ze stopniem topologicznym został pominięty.

Książka jest skierowana do studentów starszych lat i pracowników naukowych pragnących poznać tę dziedzinę lub wzbogacić swoją wiedzę. Zakładam znajomość podstawowych faktów z analizy funkcjonalnej, teorii miary i topologii. Dla wygody Czytelnika potrzebny materiał jest podany w Dodatku.

Starałem się też ilustrować omawiany materiał dużą liczbą przykładów. Na końcu każdego rozdziału proponuję ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania. Rozwiązania ćwiczeń lub wskazówki do nich umieszczone są na końcu książki.

Opisana w książce teoria multifunkcji ma liczne zastosowania i stanowi narzędzie w wielu działach szeroko rozumianej analizy matematycznej. W szczególności jest wykorzystywana w badaniach inkluzji różniczkowych i w sterowaniu optymalnym. Mam nadzieję, że poruszane tu problemy będą choć w części stanowić inspirację dla Czytelnika do dalszego pogłębienia swej wiedzy.

W obecnym wydaniu dokonano drobnych zmian redakcyjnych. Ponadto poprawiono zauważone błędy i usterki.

Andrzej Fryszkowski

Oznaczenia

(X, d)	przestrzeń metryczna;
$(X, \lvert\cdot\rvert)\,, (X, \lVert\cdot\rVert)$	przestrzeń unormowana;
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych;
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$	rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych;
$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$;	zbiór liczb nieujemnych
$\mathbb{C}$	zbiór liczb zespolonych;
$\mathbb{R}^d$	przestrzeń euklidesowa;
$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$	iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^d$;
$I = [0, 1]$	odcinek w $\mathbb{R}$;
$\mathrm{cl}\, A$	domknięcie zbioru A;
$\mathrm{int}\, A$	wnętrze zbioru A;
$\mathrm{co}\, A$	uwypuklenie (obwiednia wypukła) zbioru A;
$\mathrm{clco}\, A$	domknięte uwypuklenie (domknięta obwiednia wypukła) zbioru A;
$N(X)$	rodzina niepustych podzbiorów zbioru X;
$\mathrm{cl}\,(X)$	rodzina domkniętych niepustych podzbiorów zbioru X;
$b\,(X)$	rodzina ograniczonych niepustych podzbiorów przestrzeni (X, d);
$\mathrm{bcl}\,(X)$	rodzina domkniętych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni (X, d);
$\mathrm{c}\,(X)$	rodzina zwartych niepustych podzbiorów przestrzeni (X, d);
$\mathrm{co}\,(X)$	rodzina wypukłych niepustych podzbiorów przestrzeni $(X, \lvert\cdot\rvert)$;
$\mathrm{clco}\,(X)$	rodzina wypukłych i domkniętych podzbiorów przestrzeni $(X, \lvert\cdot\rvert)$;
$\mathrm{cc}\,(X)$	rodzina wypukłych i zwartych podzbiorów przestrzeni $(X, \lvert\cdot\rvert)$;
$B(x, r)$	kula otwarta w przestrzeni (X, d) o środku x i promieniu r;
$\overline{B}(x, r)$	kula domknięta w przestrzeni (X, d) o środku x i promieniu r;
$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$	odległość punktu x od zbioru A;
$d_0(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$	półmetryka Hausdorffa;
$d_H(A, B) = \max\{d_0(A, B), d_0(B, A)\}$	metryka Hausdorffa;

$\delta(X)=\sup\{d(x,y):x,y\in X\}$	średnica zbioru X;
$P:T\rightsquigarrow X,\ P:T\to N(X)$	multifunkcja ze zbioru T w niepuste podzbiory X;
$P^{-}(A)=\{t:P(t)\cap A\neq\emptyset\}$	przeciwobraz (słaby) zbioru A przez multifunkcję P;
$P^{+}(A)=\{t:P(t)\subset A\}$	przeciwobraz zbioru A przez multifunkcję P;
$P(A)=\bigcup\limits_{x\in A}P(x)$	obraz zbioru A przez multifunkcję P;
$\mathrm{gr}(P)=\{(t,x):t\in T,x\in P(t)\}$	wykres multifunkcji $P:T\rightsquigarrow X$;
$c_{A}(x^{*})=\sup\{\langle x^{*},x\rangle:x\in A\}$	funkcja podpierająca zbioru A;
$c_{P}(t,x^{*})=c_{P(t)}(x^{*})$	funkcja podpierająca multifunkcji $P(t)$;
(T,Σ,μ)	przestrzeń T z miarą μ określoną na $\sigma-$ciele Σ podzbiorów mierzalnych;
$\Sigma_1\otimes\Sigma_2$	$\sigma-$ciało produktowe;
$(I,\mathcal{L},\ell)$	przestrzeń I z miarą Lebesgue'a ℓ określoną na $\sigma-$ciele $\mathcal{L}$ podzbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a;
$L^{p}(T,X)$	przestrzeń funkcji całkowalnych $u:T\to X$ w sensie Bochnera z normą $\|\|u\|\|_{p}=\left(\int\limits_{T}\|u(t)\|^{p}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$;
$L^{p}(T)$	przestrzeń funkcji całkowalnych $u:T\to\mathbb{R}$ w sensie Lebesgue'a z normą $\|\|u\|\|_{p}=\left(\int\limits_{T}\|u(t)\|^{p}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$;
$x+a$	przesunięcie zbioru A o wektor x;
$C(T,X)$	przestrzeń funkcji ciągłych z normą sup;
$AC(I,X)$	przestrzeń funkcji słabo absolutnie ciągłych $X:I\longrightarrow X$ z norma $\|\|x\|\|_{AC}=\|x(0)\|+\int\limits_{0}^{1}\|x'(s)\|\,ds$;
p.z.d.	półciągła z dołu;
p.z.g.	półciągła z góry;
p.w.	prawie wszędzie;
d.C.	dolnie Carathéodory'ego;
g.C.	górnie Carathéodory'ego;
$\varepsilon_n\searrow 0$	ciąg ε_n jest malejący i dąży do 0;
$\mathrm{ext}(A)$	profil zbioru A – zbiór punktów ekstremalnych.

2

Multifunkcje półciągłe z dołu i z góry

1. Podstawowe definicje i własności

Niech T, X i Y będą przestrzeniami topologicznymi. Topologię w tych przestrzeniach można scharakteryzować w języku ciągów uogólnionych. Przy pierwszym czytaniu proponujemy jednak założyć, że T, X i Y są ośrodkowymi przestrzeniami metrycznymi i w sformułowaniach poniżej opisanych faktów zastąpić ciągi uogólnione przez ciągi przeliczalne.

Definicja 2.1. Multifunkcja $P : T \rightsquigarrow X$ nazywa się:

(a) półciągła z dołu (p.z.d.) w punkcie $t_0 \in T$, jeśli t_0 jest punktem wewnętrznym zbioru $P^-(V)$ dla każdego zbioru otwartego V takiego, że $t_0 \in P^-(V)$;

(b) półciągła z góry (p.z.g.) w punkcie $t_0 \in T$, jeśli t_0 jest punktem wewnętrznym zbioru $P^+(V)$ dla każdego zbioru otwartego V takiego, że $t_0 \in P^+(V)$;

(c) ciągła w punkcie $t_0 \in T$, jeśli jest p.z.d. i p.z.g. w tym punkcie.

(d) p.z.g. (p.z.d.) na zbiorze $D \subset T$, jeżeli jest p.z.g. (p.z.d.) w każdym punkcie $t \in D$. Jeżeli $D = T$, to mówimy, że P jest p.z.g. (p.z.d.).

Półciągłość z góry i z dołu multifunkcji można scharakteryzować w języku ciągów uogólnionych. Zaczniemy od półciągłości w punkcie.

Twierdzenie 2.1. Rozważmy odwzorowanie wielowartościowe $P : T \rightsquigarrow X$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

(i) P jest p.z.d. w t_0;

(ii) dla każdego $x_0 \in P(t_0)$ i każdego ciągu uogólnionego $t_\alpha \longrightarrow t_0$ istnieją punkty $x_\alpha \in P(t_\alpha)$ takie, że $x_\alpha \longrightarrow x_0$.

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ustalmy $x_0 \in P(t_0)$ i $t_\alpha \longrightarrow t_0$. Konstrukcję ciągu $\{x_\alpha\}$ podamy tylko w przypadku, gdy przestrzeń X spełnia I-szy aksjomat przeliczalności. Wybierzmy malejącą rodzinę $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ składającą się ze zbiorów otwartych takich, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{x_0\}$. Wtedy zbiory $V_n = P^-(U_n)$ są otwartymi otoczeniami t_0 i również tworzą rodzinę malejącą. W takim razie istnieją dla każdego n takie α_n, że dla $\alpha \succeq \alpha_n$ mamy $t_\alpha \in V_n$. To oznacza, że $P(t_\alpha) \cap V_n \neq \emptyset$. Możemy przy tym założyć, że $\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \ldots \preceq \alpha_n \preceq \ldots$ Wybierzmy dowolnie elementy $x_\alpha \in P(t_\alpha) \cap V_n$ dla $\alpha_n \preceq \alpha \prec \alpha_{n+1}$. Łatwo sprawdzić, że wtedy $x_\alpha \longrightarrow x_0$. To kończy dowód.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Załóżmy przeciwnie, że P nie jest p.z.d. w t_0. Wtedy istnieje zbiór otwarty V taki, że $P(t_0) \cap V \neq \emptyset$ oraz t_0 nie jest punktem wewnętrznym w $P^-(V)$. W takim razie możemy znaleźć taki ciąg uogólniony

$$\{t_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset T \backslash P^-(V) = P^+(X \backslash V),$$

że $t_\alpha \longrightarrow t_0$. Weźmy $x_0 \in P(t_0) \cap V$ i wybierzmy dla każdego $\alpha \in \Lambda$ taki punkt $x_\alpha \in P(t_\alpha) \subset (X \backslash V)$, że $x_\alpha \longrightarrow x_0$. Wtedy musi być $x_0 \in X \backslash V$, co jest sprzeczne z jego wyborem. $\square$

Uwaga 2.1. Jeżeli T jest ośrodkową przestrzenią metryczną, to w powyższym twierdzeniu możemy ciągi uogólnione zastąpić przez ciągi przeliczalne.

Dla półciągłości z góry mamy następującą charakteryzację:

Twierdzenie 2.2. *Załóżmy, że X jest zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Wtedy dla odwzorowania wielowartościowego $P : T \longrightarrow \mathrm{cl}(X)$ następujące warunki są równoważne:*
(i) P jest p.z.g. w t_0;
(ii) dla każdego ciągu uogólnionego $(t_\alpha, x_\alpha) \in \mathrm{gr}\, P$ takiego, że $(t_\alpha, x_\alpha) \to (t_0, x_0)$ mamy $(t_0, x_0) \in \mathrm{gr}\, P$.
W dowolnej przestrzeni topologicznej warunek (i) implikuje warunek (ii).

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii). (przypadek ogólny). Niech $\{(t_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathrm{gr}\, P$ będzie dowolnym ciągiem uogólnionym zbieżnym do (t_0, x_0). Należy wykazać, że $(t_0, x_0) \in \mathrm{gr}\, P$. Przypuśćmy przeciwnie, że $(t_0, x_0) \notin \mathrm{gr}\, P$. W takim razie $x_0 \notin P(t_0)$, a ponieważ $P(t_0)$ jest domknięty, to istnieje zbiór otwarty $V \ni x_0$ taki, że $P(t_0) \cap \overline{V} = \emptyset$. Równoważnie $t_0 \in P^+\left(X \backslash \overline{V}\right)$. Ale zbiór $P^+\left(X \backslash \overline{V}\right)$ jest otwarty. Istnieje zatem indeks $\alpha_0 \in \Lambda$ taki, że dla $\alpha \succeq \alpha_0$ mamy $t_\alpha \in P^+\left(X \backslash \overline{V}\right)$ i $x_\alpha \in V$. Wtedy jednak $x_\alpha \in P(t_\alpha) \subset X \backslash \overline{V}$ co daje sprzeczność.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Załóżmy przeciwnie, że multifunkcja P nie jest p.z.g. w punkcie t_0. Wtedy istnieje zbiór otwarty $V \supset P(t_0)$ taki, że t_0 nie jest punktem wewnętrznym zbioru $P^+(V)$. W takim razie możemy znaleźć taki ciąg uogólniony $\{t_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset T \backslash P^+(V) = P^-(X \backslash V)$, że $t_\alpha \longrightarrow t_0$. Wybierzmy dla $\alpha \in \Lambda$ punkty $x_\alpha \in P(t_\alpha) \cap (X \backslash V)$. Z uwagi na zwartość X, możemy wybrać podciąg uogólniony zbieżny, powiedzmy $x_{\widetilde{\alpha}} \longrightarrow x_0$, taki, że $x_0 \in X \backslash V$. Wtedy $(t_{\widetilde{\alpha}}, x_{\widetilde{\alpha}}) \in \mathrm{gr}\, P$ i $(t_{\widetilde{\alpha}}, x_{\widetilde{\alpha}}) \longrightarrow (t_0, x_0)$. Wynika stąd, że $(t_0, x_0) \in \mathrm{gr}\, P$. Oznacza to, iż $x_0 \in P(t_0) \subset V$, co daje sprzeczność. $\square$

Podamy teraz pewną użyteczną charakteryzację odwzorowań p.z.d. i p.z.g.

Twierdzenie 2.3. *Dla multifunkcji $P : T \rightsquigarrow X$ następujące warunki są równoważne:*

(i) P jest p.z.g.;
(ii) dla każdego otwartego $V \subset X$ zbiór $P^+(V)$ jest otwarty w T;
(iii) dla każdego domkniętego $U \subset X$ zbiór $P^-(U)$ jest domknięty w T;
(iv) dla każdego zbioru $D \subset X$ zachodzi inkluzja $\operatorname{cl}\big(P^-(D)\big) \subset P^-(\operatorname{cl} D)$;
(v) dla każdego zbioru $D \subset X$ zachodzi inkluzja $P^+(\operatorname{int} D) \subset \operatorname{int} P^+(D)$.

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ustalmy zbiór otwarty $V \subset X$ i weźmy $t_0 \in P^+(V)$. Wtedy t_0 jest punktem wewnętrznym i dlatego zbiór $P^+(V)$ jest otwarty;

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Jeżeli $F \subset X$ jest domknięty to $P^-(F) = T \backslash P^+ (X \backslash F)$ jest również domknięty;

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Ponieważ $P^-(\operatorname{cl} D)$ domknięty oraz $P^-(D) \subset P^-(\operatorname{cl} D)$, to warunek (iv) jest prawdziwy;

(iv) $\Rightarrow$ (v). Wnioskujemy to następująco:

$$\begin{aligned} P^+(\operatorname{int} D) &= P^+ \left(X \backslash \operatorname{cl}(X \backslash D)\right) = T \backslash P^- \left(\operatorname{cl}(X \backslash D)\right) \\ &\subset T \backslash \operatorname{cl}\left(P^- (X \backslash D)\right) = T \backslash \operatorname{cl}\Big(T \backslash P^+(D)\Big) = \operatorname{int} P^+(D). \end{aligned}$$

(v) $\Rightarrow$ (i). Ponieważ dla dowolnego zbioru otwartego V mamy

$$P^+(V) = P^+(\operatorname{int} V) \subset \operatorname{int} P^+(D),$$

to każdy punkt $t_0 \in P^+(V)$ jest wewnętrzny. $\square$

Rozumując podobnie możemy udowodnić następującą charakteryzację półciągłości z dołu:

Twierdzenie 2.4. Dla multifunkcji $P : T \rightsquigarrow X$ następujące warunki są równoważne:
(i) P jest p.z.d.;
(ii) dla każdego zbioru otwartego $V \subset X$ zbiór $P^-(V)$ jest otwarty w T;
(iii) dla każdego zbioru domkniętego $F \subset X$ zbiór $P^+(F)$ jest domknięty w T;
(iv) dla każdego zbioru $D \subset X$ zachodzi inkluzja $\operatorname{cl}\big(P^+(D)\big) \subset P^+(\operatorname{cl} D)$;
(v) dla każdego zbioru $D \subset X$ zachodzi inkluzja $P^-(\operatorname{int} D) \subset \operatorname{int} P^-(D)$.

W zastosowaniach przydatne są również następujące fakty:

Stwierdzenie 2.1. Niech $P : T \rightsquigarrow X$. Multifunkcja P jest p.z.d. wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{cl} P : T \longrightarrow \operatorname{cl}(X)$ jest p.z.d.

Stwierdzenie 2.2. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wtedy multifunkcja $P : T \rightsquigarrow X$ jest p.z.d. wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz $P^-(B(x, r))$ jest otwarty dla każdej kuli otwartej $B(x, r)$.

Dowody powyższych Stwierdzeń pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenia (patrz Ćwiczenia 2.1 i 2.2, str. 41).

Stwierdzenie 2.3. Dana jest rodzina $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ funkcji ciągłych z T w X. Wtedy multifunkcja $P : T \longrightarrow \operatorname{cl}(X)$ dana wzorem $P(t) = \operatorname{cl}\{p_\alpha(t) : \alpha \in \Lambda\}$ jest p.z.d.

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnego zbioru domkniętego $F \subset X$ zachodzi wzór

$$P^+(F) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} p_\alpha^{-1}(F).$$

Z uwagi na ciągłość funkcji p_α, zbiory $p_\alpha^{-1}(F)$ są domknięte, więc domknięty jest także przeciwobraz $P^+(F)$. $\square$

Mając scharakteryzowane pojęcia p.z.g. i p.z.d. możemy powyższą teorię zilustrować przykładami. Sprawdzenie części tych własności pozostawiamy Czytelnikowi.

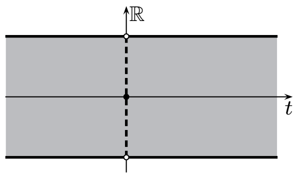
Przykład 2.1. (a) Multifunkcja $P_1 : T \longrightarrow \operatorname{clco}(\mathbb{R})$ dana wzorem

$$P_1(t) = \begin{cases} \{1\} & \text{dla} \quad t < 0, \\ \{-1\} & \text{dla} \quad t > 0, \\ [-1,1] & \text{dla} \quad t = 0 \end{cases}$$

jest p.z.g., ale nie jest p.z.d.

(b) Multifunkcja $P_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{cl}(\mathbb{R})$ określona wzorem

$$P_2(t) = \begin{cases} [-1,1] & \text{dla} \quad t \neq 0, \\ \{0\} & \text{dla} \quad t = 0 \end{cases}$$



jest p.z.d., ale nie jest p.z.g.

(c) Dla danej funkcji $p : T \longrightarrow X$ rozważmy multifunkcję $P_3 : T \rightsquigarrow X$ określoną wzorem $P_3(t) = \{p(t)\}$. Wtedy dla każdego zbioru $A \subset X$ mamy $P_3^+(A) = P_3^-(A) = p^{-1}(A)$. Jeśli zatem funkcja p jest ciągła, to dla każdego zbioru domkniętego $F \subset X$ przeciwobraz $P_3^+(F)$ jest domknięty. Podobnie, dla każdego zbioru otwartego $U \subset X$ przeciwobraz $P_3^-(U) = p^{-1}(U)$ jest otwarty. Oznacza to, że multifunkcja P_3 jest zarówno p.z.d. jak i p.z.g. Na odwrót, jeśli zakładać, że multifunkcja P_3 jest bądź p.z.d. bądź p.z.g., to p funkcją ciągłą.

Przykład 2.2. Załóżmy, że $Z \subset Y$ jest zbiorem zwartym i $f : T\times Y \longrightarrow X$ jest funkcją ciągłą. Wtedy multifunkcja $P_4 : T \longrightarrow \operatorname{cl}(X)$ określona wzorem $P_4(t) = f(t,Z)$ jest p.z.g. Ustalmy bowiem t_0 i ciąg uogólniony $(t_\alpha, x_\alpha) \in \operatorname{gr} P_4$ taki, że $(t_\alpha, x_\alpha) \longrightarrow (t_0, x_0)$. Wtedy dla każdego α mamy $x_\alpha \in P_4(t_\alpha) = f(t,Z)$. Istnieją zatem punkty $z_\alpha \in Z$ takie, że $x_\alpha = f(t_\alpha, z_\alpha)$. Ale zbiór Z jest zwarty. W takim razie ciąg uogólniony $\{z_\alpha\}$ zawiera podciąg $z_{\widetilde{\alpha}}$ zbieżny do $z_0 \in Z$. Z ciągłości funkcji f wynika więc, że

$$x_0 = f(t_0, z_0) \in f(t_0, Z) = P_4(t_0).$$

To zaś oznacza, że $(t_0, x_0) \in \operatorname{gr} P_4$ i dowodzi, iż multifunkcja P_4 jest p.z.g. w punkcie t_0.

Odwzorowania wielowartościowe, zarówno półciągłe z góry, jak i z dołu, posiadają wiele ciekawych własności. Najważniejsze z nich przedstawiamy poniżej.

Twierdzenie 2.5. Rozważmy ciąg p.z.d. multifunkcji $P_n : T \rightsquigarrow X$ i funkcji ciągłych $p_n : T \longrightarrow X$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Załóżmy też, że $\omega : X \longrightarrow Y$ i $r : T \longrightarrow \mathbb{R}^+$ są ciągłe. Wtedy multifunkcje określone wzorami:

(a) $P(t) = r(t)P_0(t) + p_0(t)$,

(b) $Q(t) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_n(t)$,

(c) $R(t) = \operatorname{cl}\{p_n(t) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$,

(d) $\omega(P)(t) = \omega\{P(t)\}$

są odwzorowaniami p.z.d.

(e) Ponadto, jeżeli $r : T \longrightarrow \mathbb{R}^+$ jest taką funkcją p.z.d., że dla każdego $t \in T$ mamy

$$S(t) = P_0(t) \cap B(p_0(t), r(t)) \neq \emptyset, \tag{2.1}$$

to multifunkcja $S : T \rightsquigarrow X$ jest p.z.d.

Dowód. (a) Ustalmy $x_0 \in P(t_0)$ i $t_\alpha \longrightarrow t_0$. Wtedy

$$z_0 = \frac{1}{r(t_0)}(x_0 - p_0(t_0)) \in P_0(t_0).$$

Z uwagi na p.z.d. odwzorowania P_0 oraz Twierdzenie 2.1 (str. 25) istnieją $z_\alpha \in P_0(t_\alpha)$ takie, że $z_\alpha \longrightarrow z_0$. Łatwo sprawdzić, że wtedy

$$x_\alpha = r(t_\alpha) z_\alpha + p_0(t_\alpha) \in P(t_\alpha) \quad \text{oraz} \quad x_\alpha \longrightarrow x_0.$$

(b) p.z.d. odwzorowania Q łatwo wynika z obserwacji, iż

$$Q^-(U) = \left\{t : \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} P_n(t)\right) \cap U \neq \emptyset\right\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{t : P_n(t) \cap U \neq \emptyset\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n^-(U),$$

(c) p.z.d. odwzorowania R wnioskujemy z faktu, iż

$$R(t) = \operatorname{cl}\left\{\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n(t)\right\}, \quad \text{gdzie } R_n(t) = \{p_n(t)\},$$

(d) p.z.d. odwzorowania D wynika z faktu, że

$$(\omega(P))^{-}(U) = P^{-}\left(\omega^{-1}(U)\right),$$

(e) dla dowodu p.z.d. odwzorowania S zauważmy, że z uwagi na (a), wystarczy to zrobić tylko w przypadku, gdy $p_0(t) = 0$. Ustalmy $x_0 \in S(t_0)$ i $t_\alpha \longrightarrow t_0$. Wtedy $x_0 \in P_0(t_0)$ i $|x_0| < r(t_0)$. Wybierzmy taką liczbę a, że $|x_0| < a < r(t_0)$ oraz taki ciąg $x_\alpha \in P_0(t_\alpha)$, że $x_\alpha \longrightarrow x_0$. Istnieje wtedy takie α_0 takie, że $|x_\alpha| < a < r(t_\alpha)$ dla $\alpha \succeq \alpha_0$. Dlatego dla $\alpha \succeq \alpha_0$ mamy $x_\alpha \in S(t_\alpha)$. □

Przykład 2.3. Pokazaliśmy, że odwzorowanie S dane wzorem (2.1) jest p.z.d. Nie jest to jednak prawdą, gdy kulę otwartą zastąpimy przez kulę domkniętą. Oznaczmy bowiem dla $t \in [0,1]$ przez $P(t) \subset \mathbb{R}^2$ okrąg o środku w punkcie (t,t) i promieniu $r = t$. Oczywiście $t \longrightarrow P(t)$ jest odwzorowaniem ciągłym oraz

$$P(t) \cap \overline{B}\,[(t,1);1] \quad = \quad \begin{cases} \{(t,0)\}, & \text{jeżeli} \quad t \in [0,1), \\ P(1), & \text{jeżeli} \quad t = 1. \end{cases}$$

Dlatego też odwzorowanie $t \longrightarrow P(t) \cap \overline{B}\,((0,0);1)$ nie jest p.z.d., ale jest p.z.g.

2. Półciągłość z góry i z dołu w przestrzeniach metrycznych

W tym paragrafie będziemy zakładać, że (X,d) jest przestrzenią metryczną. Prowadzi to do charakteryzacji pojęcia odwzorowań p.z.d. i p.z.g. przy użyciu tzw. półmetryki Hausdorffa. Określamy ją dla dowolnych $A, B \in b(X)$ wzorem

$$d_0(A,B) = \sup_{a \in A} d(a,B).$$

Symbol $d_H(A,B)$ oznacza metrykę Hausdorffa, tj.

$$d_H(A,B) = \max\{d_0(A,B), d_0(B,A)\}.$$

Twierdzenie 2.6. Niech $P : T \longrightarrow \mathrm{bcl}(X)$ będzie odwzorowaniem wielowartościowym. Wówczas

(a) P jest p.z.d. w punkcie t_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{t \to t_0} d_0\left(P(t_0), P(t)\right) = 0.$$

(b) Jeżeli P jest p.z.g. w punkcie t_0, to $\lim\limits_{t \to t_0} d_0\left(P(t), P(t_0)\right) = 0$.

Jeżeli przestrzeń (X,d) jest zwarta, to warunki w punkcie (b) są równoważne.

(c) Jeżeli $P : T \longrightarrow b(X)$ jest odwzorowaniem ciągłym w t_0, to

$$\lim_{t \to t_0} d_H\left(P(t), P(t_0)\right) = 0.$$

Dowód. (a)$\Rightarrow$. Ustalmy $x_0 \in P(t_0)$ i weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Oznaczmy przez $V = P^-(B(x_0, \varepsilon))$ i zauważmy, że V jest zbiorem otwartym oraz $t_0 \in V$.

Z uwagi na p.z.d. w punkcie t_0 mamy dla każdego $t \in V$

$$d(x_0, P(t)) \leqslant d(x_0, P(t) \cap B(x_0, \varepsilon)) < \varepsilon.$$

W takim razie $d_0(P(t_0), P(t)) = \sup\limits_{x_0 \in P(t_0)} d(x_0, P(t_0)) \leqslant \varepsilon$. Ponieważ $x_0 \in P(t_0)$ i $\varepsilon > 0$ były wybierane dowolne, to wynika stąd, że $\lim\limits_{t \to t_0} d_0(P(t_0), P(t)) = 0$.

(a)$\Leftarrow$. Załóżmy, że $\lim\limits_{t \to t_0} d_0(P(t_0), P(t)) = 0$, ale multifunkcja P nie jest p.z.d. w punkcie t_0. Zatem musi istnieć taki zbiór otwarty V, że $P(t_0) \cap V \neq \emptyset$ oraz t_0 nie jest punktem wewnętrznym w $P^-(V)$. W takim razie da się znaleźć taki ciąg uogólniony $\{t_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset T \backslash P^-(V) = P^+(X \backslash V)$, że $t_\alpha \longrightarrow t_0$. Ustalmy punkt $x_0 \in P(t_0) \cap V$ oraz ciąg $\varepsilon_\alpha \longrightarrow 0$. Wtedy można, dla każdego $\alpha \in \Lambda$, znaleźć takie punkty $x_\alpha \in P(t_\alpha) \subset X \backslash V$, że

$$d(x_0, x_\alpha) < d(x_0, P(t_\alpha)) + \varepsilon_\alpha \leqslant d_0(P(t_0), P(t_\alpha)) + \varepsilon_\alpha.$$

Oznacza to, iż $x_\alpha \longrightarrow x_0$. Ale wtedy również $x_0 \in X \backslash V$, co jest sprzeczne z wyborem x_0.

(b) Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i niech $V = \{x : d(x, P(t_0)) < \varepsilon\}$. Wtedy $P^+(V)$ jest zbiorem otwartym oraz $t_0 \in P^+(V)$. Zatem istnieje taki zbiór otwarty U, że $t_0 \in U \subset P^+(V)$. W takim razie dla każdego $t \in U$ mamy $P(t) \subset V$ i dlatego

$$d_0(P(t), P(t_0)) = \sup_{x \in P(t)} d(x, P(t_0)) \leqslant \sup_{x \in V} d(x, P(t_0)) \leqslant \varepsilon.$$

To zaś oznacza, że $\lim\limits_{t \to t_0} d_0(P(t), P(t_0)) = 0$.

Niech teraz X będzie przestrzenią zwartą oraz $\lim\limits_{t \to t_0} d_0(P(t), P(t_0)) = 0$. Gdyby multifunkcja P nie była p.z.g. w punkcie t_0, to istniałby taki zbiór otwarty $V \supset P(t_0)$, że t_0 nie byłby punktem wewnętrznym zbioru $P^+(V)$. Możemy więc znaleźć ciąg $\{t_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset T \backslash P^+(V) = P^-(X \backslash V)$ taki, że $t_\alpha \longrightarrow t_0$. Ponieważ $P(t_\alpha) \cap (X \backslash V) \neq \emptyset$, to wybierzmy, dla każdego $\alpha \in \Lambda$, punkty $x_\alpha \in P(t_\alpha) \cap (X \backslash V)$. Z uwagi na zwartość możemy założyć, iż $x_\alpha \longrightarrow x_0$, co daje $x_0 \in X \backslash V$. Zauważmy ponadto, że $d(x_\alpha, P(t_0)) \leqslant d_0(P(t_\alpha), P(t_0))$. To zaś oznacza, że

$$d(x_0, P(t_0)) = \lim d(x_\alpha, P(t_0)) \leqslant \lim_{t \to t_0} d_0(P(t), P(t_0)) = 0.$$

Stąd $x_0 \in P(t_0) \subset V$, co daje sprzeczność, gdyż $x_0 \in X \backslash V$.

(c) Jest to łatwy wniosek z części (a) i (b). □

Pojęcia odwzorowań wielowartościowych p.z.d. i p.z.g. można również scharakteryzować następująco:

Twierdzenie 2.7. Dla multifunkcji $P : T \rightsquigarrow X$ następujące warunki są równoważne:

(i) P jest p.z.d.;

(ii) odwzorowanie $t \longrightarrow d(x, P(t))$ jest p.z.g. dla każdego x.

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii). Weźmy dowolnie punkt (t_0, x_0) oraz ciąg $t_\alpha \longrightarrow t_0$. Mamy pokazać, że z warunku $d\,(x_0, P\,(t_\alpha)) \longrightarrow a$ wynika, iż $a \leqslant d\,(x_0, P\,(t_0))$. W tym celu ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\overline{x} \in P\,(t_0)$ będzie takim elementem, że

$$d\,(x_0, \overline{x}) \leqslant d\,(x_0, P\,(t_0)) + \varepsilon.$$

Założenie p.z.d. gwarantuje istnienie punktów $x_\alpha \in P\,(t_\alpha)$ takich, że $x_\alpha \longrightarrow \overline{x}$. Wtedy $d\,(x_0, P\,(t_\alpha)) \leqslant d\,(x_0, x_\alpha) \leqslant d\,(\overline{x}, x_\alpha) + d\,(x_0, P\,(t_0)) + \varepsilon$. Przechodząc do granicy z α i $\varepsilon \longrightarrow 0$ otrzymujemy $a \leqslant d\,(x_0, P\,(t_0))$, co kończy dowód.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Ustalmy $(t_0, x_0) \in \operatorname{gr} P$ i niech $t_\alpha \longrightarrow t_0$. Wtedy

$$\limsup d\,(x_0, P\,(t_\alpha)) \leqslant d\,(x_0, P\,(t_0)) = 0$$

i stąd $\lim d\,(x_0, P\,(t_\alpha)) = 0$. Dlatego też dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 1$ istnieje α_k takie, że dla $\alpha \succeq \alpha_k$ mamy $d\,(x_0, P\,(t_\alpha)) \leqslant 1/k$. Możemy przy tym założyć, że $\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \ldots \preceq \alpha_k \preceq \alpha_{k+1} \preceq \ldots$

Niech $x_{\alpha,k} \in P\,(t_\alpha)$ będą takimi punktami, że $d\,(x_0, x_{\alpha,k}) < 1/k$. Określmy ciąg $x_\alpha \in P\,(t_\alpha)$ kładąc $x_\alpha = x_{\alpha,k}$, gdy $\alpha_k \preceq \alpha \prec \alpha_{k+1}$. Wtedy $d\,(x_0, x_\alpha) < 1/k$ dla $\alpha_k \preceq \alpha \prec \alpha_{k+1}$, co oznacza, że $x_\alpha \longrightarrow x_0$. To kończy dowód. □

Rozumując podobnie można udowodnić następujące

Twierdzenie 2.8. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zwartą. Wtedy dla multifunkcji $P : T \longrightarrow \operatorname{cl}(X)$ następujące warunki są równoważne:

(i) P jest p.z.g.;

(ii) odwzorowanie $t \longrightarrow d\,(x, P\,(t))$ jest p.z.d. dla każdego $x \in X$.

Dowód tego Twierdzenia pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie (patrz Ćwiczenie 2.7, str. 42).

3. Półciągłość z góry i z dołu w przestrzeniach Banacha

W tym paragrafie będziemy zakładać, że $(X, |\cdot|)$ jest refleksywną przestrzenią Banacha. W takiej przestrzeni półciągłość z góry i z dołu odwzorowania wielowartościowego $P : T \rightsquigarrow X$ daje się opisywać przy pomocy funkcji podpierających. Przez funkcję podpierającą multifunkcji $P : T \rightsquigarrow X$ rozumieć będziemy odwzorowanie $c_{P} : T \times X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dane wzorem

$$c_{P}\,(t, x^*) = c_{P}(t)\,(x^*) = \sup\left\{\langle x^*, x\rangle : x \in P(t)\right\}.$$

Jest to funkcja dwóch zmiennych z ustaloną topologią po zmiennej t. Ze względu na drugą zmienną x^* będziemy rozpatrywać w B^* zarówno topologię mocną, jak i słabą*. Opisując własności topologiczne funkcji podpierającej będziemy precyzować, o której topologii w B^* jest mowa.

Rozważania rozpoczniemy od następującego:

Twierdzenie 2.9. Niech $P : T \longrightarrow b(X)$ będzie odwzorowaniem p.z.g. Wtedy funkcja podpierająca $c_P : T \times B^* \longrightarrow \mathbb{R}$ jest p.z.g. w mocnej topologii w B^*. Ponadto, dla multifunkcji $P : T \longrightarrow \mathrm{cc}(Z)$, gdzie $Z \subset X$ jest ustalonym zbiorem zwartym i wypukłym, funkcja c_P jest p.z.g. także w słabej * topologii w B^*. Na odwrót, jeżeli dla odwzorowania $P : T \longrightarrow \mathrm{cc}(Z)$, gdzie $Z \in \mathrm{cc}(X)$, jego funkcja podpierająca $c_P : T \times B^* \longrightarrow \mathbb{R}$ jest p.z.g. w słabej* topologii w B^*, to multifunkcja P jest p.z.g.

Dowód. Dla dowodu pierwszej części ustalmy $(t_0, x_0^*) \in T \times B^*$. Mamy wykazać, że jeśli dla dowolnych ciągów uogólnionych $t_\alpha \longrightarrow t_0$ oraz $x_\alpha^* \longrightarrow x_0^*$ ciąg $c_P(t_\alpha, x_\alpha^*) \longrightarrow \gamma$, to $\gamma \leqslant c_P(t_0, x_0^*)$.

W tym celu rozważmy, dla dowolnego $\varepsilon > 0$, zbiór

$$V = \{x : d(x, P(t_0)) < \varepsilon\}.$$

Zbiór ten jest otwarty i ograniczony oraz $d_H(V, P(t_0)) \leqslant \varepsilon$. W takim razie, używając nierówności ((**??**), str. **??**), otrzymujemy zależność

$$|c_P(t_0, x_0^*) - c_V(x_0^*)| \leqslant \varepsilon.$$

Zauważmy, że t_0 jest punktem wewnętrznym zbioru $P^+(V)$. Dlatego, dla „dostatecznie dużych α", mamy $t_\alpha \in P^+(V)$, a to oznacza, iż $P(t_\alpha) \subset V$. Zatem

$$\begin{aligned} c_P(t_\alpha, x_\alpha^*) &\leqslant c_V(x_\alpha^*) \leqslant c_V(x_0^*) + |V|\,|x_\alpha^* - x_0^*| \\ &\leqslant c_P(t_0, x_0^*) + |V|\,|x_\alpha^* - x_0^*| + \varepsilon, \end{aligned}$$

gdzie $|V| = \sup\{|x| : x \in V\}$. Wynika stąd, że $\gamma \leqslant c_P(t, x^*) + \varepsilon$. Przechodząc teraz do granicy z $\varepsilon \longrightarrow 0$ otrzymujemy żądaną nierówność.

Dla dowodu drugiej części załóżmy, że $t_\alpha \longrightarrow t_0$, $x_\alpha^* \longrightarrow x_0^*$ słabo* oraz $c_P(t_\alpha, x_\alpha^*) \longrightarrow \gamma$. Weźmy takie punkty $x_\alpha \in P(t_\alpha) \subset Z$, że $c_P(t_\alpha, x_\alpha^*) = \langle x_\alpha^*, x_\alpha \rangle$. Ponieważ Z jest zbiorem zwartym, to, przechodząc ewentualnie do podciągów, możemy zakładać, że $x_\alpha \longrightarrow x_0$. Ostatnia równość daje zatem $\langle x^*, x_0 \rangle = \gamma \leqslant c_P(t_0, x_0^*)$.

Aby wykazać trzecią część tezy załóżmy, że funkcja podpierająca c_P jest p.z.g. Musimy udowodnić, że dla każdego ciągu $(t_\alpha, x_\alpha) \in \mathrm{gr}\,P$ takiego, iż $(t_\alpha, x_\alpha) \longrightarrow (t_0, x_0)$, mamy $(t_0, x_0) \in \mathrm{gr}\,P$. Załóżmy przeciwnie, że istnieje ciąg uogólniony $(t_\alpha, x_\alpha) \in \mathrm{gr}\,P$, który jest zbieżny do $(t_0, x_0) \notin \mathrm{gr}\,P$. Ale wtedy $x_0 \notin P(t_0)$ i używając twierdzenia o oddzielaniu można znaleźć taki funkcjonał $x^* \in B^*$, że $\langle x^*, x_0 \rangle > c_P(t_0, x^*)$. W takim razie, dla „dostatecznie dużych α", musi być $\langle x^*, x_\alpha \rangle > c_P(t_\alpha, x^*)$, a to oznacza, że $x_\alpha \notin P(t_\alpha)$. Równoważnie, $(t_\alpha, x_\alpha) \notin \mathrm{gr}\,P$, co daje sprzeczność. $\square$

Rozumując podobnie można udowodnić następujące:

Twierdzenie 2.10. Niech $P : T \longrightarrow \mathrm{cb}\,(X)$ będzie multifunkcją p.z.g. i załóżmy, iż $t_n \longrightarrow t_0$. Wtedy prawdziwe jest zawieranie

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{clco}\left\{\bigcup_{n=k}^{\infty} P\,(t_n)\right\} \subset P\,(t_0)\,.$$

Dowód. Ustalmy $x^* \in B^*$, $\varepsilon > 0$ oraz rozważmy zbiór

$$V_\varepsilon = \{x : \langle x^*, x\rangle < c_{\scriptscriptstyle P}\,(t_0, x^*) + \varepsilon\}\,.$$

Łatwo zauważyć, że V_ε jest zbiorem otwartym i wypukłym oraz $P\,(t_0) \subset V_\varepsilon$. Korzystając z p.z.g. funkcji podpierającej możemy zatem znaleźć taki indeks k, że dla każdego $n \geqslant k$ zachodzi nierówność $c_{\scriptscriptstyle P}\,(t_n, x^*) < c_{\scriptscriptstyle P}\,(t_0, x^*) + \varepsilon$. Jeśli zatem $x \in P\,(t_n)$, to

$$\langle x^*, x\rangle \leqslant c_{\scriptscriptstyle P}\,(t_n, x^*) < c_{\scriptscriptstyle P}\,(t_0, x^*) + \varepsilon.$$

Wnioskujemy stąd, że dla każdego $n \geqslant k$ zachodzi zawieranie $P\,(t_n) \subset V_\varepsilon$.

Zatem

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{clco}\left\{\bigcup_{n=k}^{\infty} P\,(t_n)\right\} \subset \mathrm{clco}\, V_\varepsilon \subset \{x : \langle x^*, x\rangle \leqslant c_{\scriptscriptstyle P}\,(t, x^*) + \varepsilon\}\,.$$

Przechodząc do granicy z $\varepsilon \longrightarrow 0$ otrzymujemy

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{clco}\left\{\bigcup_{n=k}^{\infty} P\,(t_n)\right\} \subset \{x : \langle x^*, x\rangle \leqslant c_{\scriptscriptstyle P}\,(t, x^*)\}\,.$$

Ponieważ powyższe zawieranie zachodzi dla dowolnego $x^* \in B^*$, to

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{clco}\left\{\bigcup_{n=k}^{\infty} P\,(t_n)\right\} \subset \bigcap_{x^* \in B^*} \{x : \langle x^*, x\rangle \leqslant c_{\scriptscriptstyle P}\,(t, x^*)\} = P\,(t_0)\,,$$

co daje żądane zawieranie. □

Dla multifunkcji p.z.d. sytuacja jest podobna. Zachodzi bowiem następujące:

Twierdzenie 2.11. Niech $P : T \longrightarrow b\,(X)$ będzie odwzorowaniem p.z.d. Wtedy funkcja podpierająca $c_{\scriptscriptstyle P} : T \times B^* \longrightarrow \mathbb{R}$ jest p.z.d. w mocnej topologii w B^*. I na odwrót, jeżeli funkcja podpierająca odwzorowania $P : T \longrightarrow \mathrm{cc}(K)$, gdzie $K \in \mathrm{cc}\,(X)$, jest p.z.d. w słabej* topologii w B^*, to P jest multifunkcją p.z.d.

Dowód. Dla dowodu pierwszej części ustalmy $(t_0, x_0^*) \in T \times B^*$. Mamy wykazać, że jeśli dla dowolnych ciągów uogólnionych $t_\alpha \longrightarrow t_0$, $x_\alpha^* \longrightarrow x_0^*$ ciąg $c_{\scriptscriptstyle P}\,(t_\alpha, x_\alpha^*) \longrightarrow \gamma$, to $\gamma \geqslant c_{\scriptscriptstyle P}\,(t_0, x_0^*)$. W tym celu weźmy dowolny punkt $x_0 \in P\,(t_0)$ i wybierzmy ciąg uogólniony $x_\alpha \in P\,(t_\alpha)$ taki, że $x_\alpha \longrightarrow x_0$. Wtedy $c_{\scriptscriptstyle P}\,(t_\alpha, x_\alpha^*) \geqslant \langle x_\alpha^*, x_\alpha\rangle$ i dlatego $\gamma \geqslant \langle x_0^*, x_0\rangle$. Ponieważ punkt $x_0 \in P\,(t_0)$ wybieraliśmy dowolnie, to z powyższej nierówności wnioskujemy, iż

$$\gamma \geqslant \sup \{\langle x_0^*, x\rangle : x \in P(t_0)\} = c_P(t_0, x_0^*).$$

Dla dowodu części drugiej załóżmy, że funkcja podpierająca jest p.z.d., zaś multifunkcja $P : T \longrightarrow cc(K)$ nie jest odwzorowaniem p.z.d. w punkcie t_0. Oznacza to z definicji, że istnieje zbiór otwarty V taki, że $t_0 \in P^-(V)$ nie jest punktem wewnętrznym w $P^-(V)$. W takim razie można znaleźć taki ciąg uogólniony $t_\alpha \longrightarrow t_0$, że $t_\alpha \notin P^-(V)$. Zatem $P(t_\alpha) \cap V = \emptyset$, podczas gdy $P(t_0) \cap V \neq \emptyset$. Weźmy $x_0 \in P(t_0) \cap V$. Wtedy istnieje $r > 0$ takie, że kula $\overline{B}(x_0, r) \subset V$ i stąd $P(t_\alpha) \cap \overline{B}(x_0, r) = \emptyset$. Z twierdzenia o oddzielaniu wynika, iż dla każdego α można dobrać $x_\alpha^* \in B^*$ takie, że $|x_\alpha^*| = 1$ oraz

$$c_P(t_\alpha, x_\alpha^*) \leqslant \inf \left\{\langle x_\alpha^*, x\rangle : x \in \overline{B}(x_0, r)\right\} = \langle x_\alpha^*, x_0\rangle - r.$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że ciąg x_α^* jest słabo* zbieżny do $x_0^* \in B^*$. Wtedy

$$c_P(t_0, x_0^*) \leqslant \liminf c_P(t_\alpha, x_\alpha^*) \leqslant \langle x_0^*, x_0\rangle - r.$$

Oznacza to, że $x_0 \notin P(t_0)$, a to daje sprzeczność. □

4. Twierdzenie Michaela o ciągłych selekcjach

W tym paragrafie omówimy twierdzenie o istnieniu ciągłej selekcji dla multifunkcji p.z.d. z domkniętymi i wypukłymi wartościami oraz podstawowe jego konsekwencje. Będziemy teraz zakładać, że T jest parazwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Jak pokazaliśmy w Stwierdzeniu 2.3 (str. 28) dla dowolnej rodziny $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ funkcji ciągłych z T w przestrzeń Banacha X multifunkcja $P : T \longrightarrow \mathrm{cl}(X)$ dana wzorem

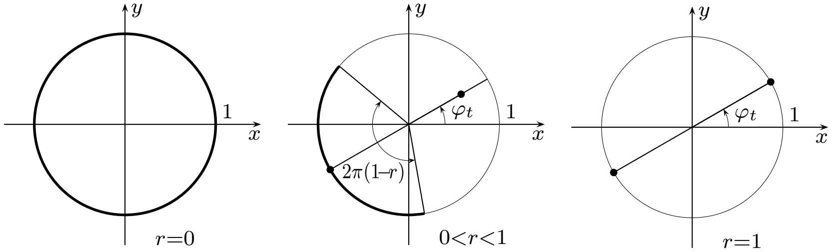
$$P(t) = \mathrm{cl}\{p_\alpha(t) : \alpha \in \Lambda\}$$

jest p.z.d. Oczywiście każda funkcja p_α jest ciągłą selekcją P. Z drugiej strony istnieją ciągłe multifunkcje, które nie mają ciągłych selekcji.

Przykład 2.4. (Patrz Przykład **??**, str. **??**). Niech T będzie domkniętą kulą jednostkową na płaszczyźnie. Rozważmy odwzorowanie wielowartościowe $P : T \longrightarrow \mathrm{cl}(T)$ dane dla $t = (r_t \cos\varphi_t,\ \ r_t \sin\varphi_t)$ wzorem

$$P(t) = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) : |\varphi + \varphi_t| \leqslant \pi(1 - r_t)\}.$$

Wtedy P jest odwzorowaniem ciągłym, ale nie ma ono ciągłych selekcji.



Dowód. Oczywiście P jest odwzorowaniem ciągłym, gdyż jest odwzorowaniem lipschitzowskim ze stałą 2. Pokażemy, że nie posiada ono ciągłej selekcji. Załóżmy przeciwnie, że multifunkcja P ma ciągłą selekcję $p : T \longrightarrow T$. Wtedy dla każdego $t \in B$ musi zachodzić $|p(t)| = 1$. Z Twierdzenia Schaudera **??** (str. **??**) wynika, że odwzorowanie p ma punkt stały t_0. Dla tego punktu mamy $|t_0| = |p(t_0)| = 1$, a to oznacza, że $t_0 = p(t_0) = -t_0$, co daje sprzeczność. □

Sformułujemy teraz podstawy wynik dotyczący istnienia selekcji ciągłych.

Twierdzenie 2.12. [Michael] Załóżmy, że $P : T \longrightarrow \mathrm{clco}(X)$ jest multifunkcją p.z.d. Wtedy P ma ciągłą selekcję.

Dowód. Konstrukcję rozbijemy na trzy etapy. W etapie I, dla dowolnego $\varepsilon > 0$, skonstruujemy tzw. ciągłą $\varepsilon-$selekcję, tzn. taką funkcję ciągłą $p : T \longrightarrow X$, że $d(p(t), P(t)) < \varepsilon$. Równoważnie oznacza to, że

$$R(t) = P(t) \cap B\{p(t), \varepsilon\} \neq \emptyset.$$

Wtedy, z uwagi na Twierdzenie 2.5 (e) (str. 29), multifunkcja $R : T \longrightarrow \mathrm{co}(X)$ jest p.z.d.

W etapie II podane zostaną konstrukcje dwóch ciągów: funkcji ciągłych $p_n : T \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$ i multifunkcji p.z.d. $P_n : T \longrightarrow \mathrm{clco}(X)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ mających, dla każdego $t \in T$, następujące własności:

$$d(p_{n+1}(t), P_n(t)) < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{oraz} \quad P_{n+1}(t) \subset P_n(t) \subset P(t).$$

W etapie III pokażemy, że $p_n \rightrightarrows p$ niemal jednostajnie i stąd wyniknie, że p jest żądaną selekcją.

Etap I. Ustalmy $\varepsilon > 0$, $t_0 \in T$ oraz $x_0 \in P(t_0)$ i rozważmy zbiory

$$V_{t_0,x_0} = P^-(B(x_0, \varepsilon)) = \{t \in T : P(t) \cap B(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset\}.$$

Ponieważ P jest p.z.d., to rodzina zbiorów $\{V_{t_0,x_0}\}_{t_0 \in T, x_0 \in P(t_0)}$ stanowi otwarte pokrycie przestrzeni parazwartej T. W pokrycie to można wpisać lokalnie skończony rozkład jedności $\{z_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Oznacza to, że:

(a) wszystkie funkcje $z_\alpha : T \longrightarrow I$ są ciągłe;

(b) dla każdego $t \in T$ zbiór $\Lambda(t) = \{\alpha \in \Lambda : z_\alpha(t) > 0\}$ jest skończony i $\sum_{\alpha \in \Lambda(t)} z_\alpha(t) = 1$;

(c) dla danego $\alpha \in \Lambda$ istnieją $t_\alpha \in T$ i $x_\alpha \in P(t_\alpha)$ takie, że

$$z_\alpha^{-1}((0,1]) \subset V_{t_\alpha,x_\alpha}. \tag{2.2}$$

Zauważmy, że zawieranie (2.2) oznacza w szczególności, że dla t takich, że $z_\alpha(t) > 0$ mamy $P(t) \cap B(x_\alpha, \varepsilon) \neq \emptyset$. Oznaczmy

$$p(t) = \sum_{\alpha \in \Lambda(t)} z_\alpha(t) x_\alpha$$

i zauważmy, że p jest funkcją ciągłą, gdyż $\{z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ jest lokalnie skończonym i ciągłym rozkładem jedności. Pokażemy, że p jest żądaną „$\varepsilon-$selekcją". W tym celu ustalmy t i niech $\Lambda(t) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Wtedy $t \in \bigcap_{i=1}^{m} V_{\alpha_i}$ oraz

$$p(t) = \sum_{i=1}^{m} z_{\alpha_i}(t) x_{\alpha_i}.$$

Ponadto dla $i = 1, 2, \ldots, m$ mamy

$$P(t) \cap B\left(x_{\alpha_i}, \varepsilon\right) \neq \emptyset.$$

Wybierzmy $y_i \in P(t) \cap B\left(x_{\alpha_i}, \varepsilon\right)$ i niech $y = \sum_{i=1}^{m} z_{\alpha_i}(t) y_{\alpha_i}$. Oczywiście $y \in P(t)$, gdyż zbiór ten jest wypukły. Należy jeszcze sprawdzić, że $|y - p(t)| < \varepsilon$. Ale to wynika z następujących zależności

$$|y - p(t)| = \left|\sum_{i=1}^{m} z_{\alpha_i}(t) x_{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{m} z_{\alpha_i}(t) y_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} z_{\alpha_i}(t) \left|x_{\alpha_i} - y_i\right| < \varepsilon.$$

Kończy to Etap I.

Etap II. Konstrukcję ciągów $\{p_n\}$ i $\{P_n\}$ przeprowadzimy przy użyciu indukcji matematycznej.

Dla $n = 0$ bierzemy $P_0(t) = P(t)$.

Korzystając z Etapu I mamy dla $\varepsilon = 1/2^1$ zagwarantowane istnienie takiej funkcji ciągłej $p_1 : T \longrightarrow X$, że $d\left(p_1(t), P_0(t)\right) < 1/2^1$. Wykorzystując Twierdzenie 2.5 (e) (str. 29) wnioskujemy, że multifunkcja $P_1 : T \longrightarrow \operatorname{clco}(X)$ dana wzorem

$$P_1(t) = \operatorname{cl}\left\{P_0(t) \cap B\left(p_1(t), \frac{1}{2^1}\right)\right\}$$

jest p.z.d. Daje to konstrukcję dla $n = 1$.

Załóżmy, że mamy już skonstruowane funkcje ciągłe $p_1, \ldots, p_n : T \longrightarrow X$ oraz p.z.d. multifunkcje $P_0, \ldots, P_{n-1} : T \longrightarrow \operatorname{clco}(X)$, takie, że dla każdych $t \in T$ i dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$ zachodzi

$$d\left(p_{k+1}(t), P_k(t)\right) < \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{oraz} \quad P_{n-1}(t) \subset P_{n-2}(t) \subset \ldots \subset P_0(t).$$

Oznaczając

$$P_n(t) = \operatorname{cl}\left\{P_{n-1}(t) \cap B\left(p_n(t), \frac{1}{2^n}\right)\right\}.$$

otrzymujemy multifunkcję p.z.d. Korzystając teraz z Etapu I z $\varepsilon = 1/2^{n+1}$ otrzymujemy taką funkcję ciągłą $p_{n+1} : T \longrightarrow X$, że zbiory

$$R(t) = P_n(t) \cap B\left(p_{n+1}(t), \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

są niepuste i wypukłe, a multifunkcja R jest p.z.d. (Twierdzenie 2.5 (e), str. 29). Określmy

$$P_{n+1}(t) = cl\left\{P_n(t) \cap B\left(p_{n+1}(t), \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right\}$$

i zauważmy, że $P_{n+1} : T \longrightarrow \operatorname{clco}(X)$ jest p.z.d. Łatwo sprawdzić, że

$$d\left(p_{n+1}(t), P_n(t)\right) < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{oraz} \quad P_{n+1}(t) \subset P_n\left(t\right) \subset \ldots \subset P_0(t),$$

a to kończy krok indukcyjny.

Etap III. Udowodnimy, że $p_n \rightrightarrows p$ oraz p jest żądaną selekcją. Pokażemy najpierw, że ciąg $\{p_n\}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego. W tym celu zauważmy, że dla dowolnych liczb całkowitych $n \geqslant 0$ i $k \geqslant 1$ oraz dowolnego punktu $t \in T$ mamy $P_{n+k-1}(t) \subset P_n(t)$. Zatem

$$d\left(p_{n+k}(t), P_n(t)\right) \leqslant d\left(p_{n+k}(t), P_{n+k-1}(t)\right) < \frac{1}{2^{n+k}} \tag{2.3}$$

i dlatego istnieją takie punkty $x_{n,t} \in P_n(t)$, że $|p_{n+k}(t) - x_{n,t}| < 1/2^{n+k}$. Ponieważ $P_n(t) = \operatorname{cl}\{P_{n-1}(t) \cap B\left(p_n(t), 1/2^n\right)\} \subset \overline{B}\left(p_n(t), 1/2^n\right)$, to zachodzi również nierówność $|x_{n,t} - p_n(t)| \leqslant 1/2^n$. W takim razie dla dowolnych liczb całkowitych $n \geqslant 0$ i $k \geqslant 1$ oraz dowolnego punktu $t \in T$ mamy

$$|p_{n+k}(t) - p_n(t)| < \frac{1}{2^{n+k}} + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

a to oznacza, że ciąg $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego. Istnieje więc taka funkcja ciągła p, że $p_n \rightrightarrows p$. Aby zakończyć konstrukcję wystarczy teraz zauważyć, iż p jest selekcją P. To zaś wynika z nierówności (2.3) dla $n = 0$, gdyż mamy wtedy $d\left(p(t), P(t)\right) = \lim\limits_{k\to\infty} d\left(p_k(t), P_0(t)\right) = 0$. □

Uwaga 2.2. Oryginalne Twierdzenie Michaela mówi znacznie więcej, niż przedstawione powyżej i ma następujące sformułowanie:

Twierdzenie 2.13. Przestrzeń topologiczna Hausdorffa jest parazwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każda ośrodkowa przestrzeń Banacha X posiada własność, że dowolna p.z.d. multifunkcja $P : T \longrightarrow \operatorname{clco}(X)$ ma ciągłą selekcję.

Sformułowanie to prezentujemy ze względów historycznych, gdyż zwykle jest wykorzystywana tylko przedstawiona wcześniej wersja.

Uwaga 2.3. W przedstawionym dowodzie założenie ośrodkowości przestrzeni X nigdzie nie było wykorzystywane. W takim razie twierdzenie selekcyjne Michaela zachodzi również w dowolnych przestrzeniach Banacha.

Zajmiemy się teraz odpowiedzią na pytanie, ile ciągłych selekcji posiada dana p.z.d. multifunkcja $P : T \longrightarrow \operatorname{clco}(X)$ i czy dla danego $t_0 \in T$ multifunkcja $P : T \longrightarrow \operatorname{clco}(X)$ posiada ciągłe selekcje przyjmujące zadaną z góry wartość $x_0 \in P(t_0)$.

Twierdzenie 2.14. Załóżmy, że multifunkcja $P : T \longrightarrow \mathrm{clco}\,(X)$ jest p.z.d. i niech $T_0 \subset T$ będzie ustalonym podzbiorem domkniętym. Niech $p_0 : T \longrightarrow X$ będzie takim odwzorowaniem ciągłym, że $p_0(t) \in P(t)$ dla $t \in T_0$. Wówczas p_0 można przedłużyć do ciągłej selekcji p odwzorowania P na całym T. W szczególności, dla danych $t_0 \in T$ oraz $x_0 \in P(t_0)$, istnieje ciągła selekcja p_{t_0,x_0} odwzorowania P taka, że $p_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$.

Dowód. Rozważmy mulifunkcję $P_0 : T \longrightarrow \mathrm{clco}\,(X)$ daną wzorem

$$P_0(t) = \begin{cases} \{p_0(t)\} & \text{dla } t \in T_0, \\ P(t) & \text{dla } t \notin T_0 \end{cases}$$

i zauważmy, że jest ono p.z.d. W takim razie posiada ono ciągłe selekcje. Łatwo sprawdzić, iż każda taka selekcja jest żądanym przedłużeniem. W szczególności biorąc $T_0 = \{t_0\}$ możemy przedłużyć $p_{t_0,x_0}(t_0) = x_0 \in P(t_0)$ do ciągłej selekcji odwzorowania P. □

Ważnym wnioskiem z poprzedniego twierdzenia jest następujące

Twierdzenie 2.15. Niech $P : T \longrightarrow \mathrm{clco}\,(X)$ będzie daną multifunkcją. Wówczas P jest p.z.d. wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ciągłe funkcje $p_\alpha : T \longrightarrow X$, $\alpha \in \Lambda$, takie, że dla każdego $t \in T$ zachodzi

$$P(t) = \mathrm{cl}\,\{p_\alpha(t) : \alpha \in \Lambda\}\,. \tag{2.4}$$

Jeżeli T jest przestrzenią metryczną i obie przestrzenie T i X są ośrodkowe to można zakładać, że reprezentacja (2.4) jest przeliczalna.

Dowód. Z uwagi na Twierdzenie 2.14 dla dowolnego p.z.d. odwzorowania $P : T \longrightarrow \mathrm{clco}\,(X)$ mamy $P(t) = \mathrm{cl}\,\{p_{t_0,x_0}(t) : t_0 \in T,\ x_0 \in P(t_0)\}$, co daje (2.4). Z drugiej strony, jeżeli (2.4) zachodzi to Stwierdzenie 2.3 (str. 28) daje łatwo p.z.d. odwzorowania P.

Przeliczalną reprezentację dla ośrodkowych przestrzeni T i X konstruujemy w następujący sposób. Niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie gęstym podzbiorem w X. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rozważmy zbiory otwarte

$$V_{n,k} = P^-\left(B\left(x_n, \frac{1}{k}\right)\right) = \left\{t : P(t) \cap B\left(x_n, \frac{1}{k}\right) \neq \emptyset\right\}.$$

Ze względu na wybór $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mamy wtedy $T = \bigcup\limits_{n,k=1}^{\infty} V_{n,k}$. Ale w ośrodkowej przestrzeni metrycznej dowolny zbiór otwarty można przedstawić jako przeliczalną sumą zbiorów domkniętych. Dlatego dla każdych $n, k = 1, 2, \ldots$ istnieją zbiory domknięte $F_{n,k,m}$, $m = 1, 2, \ldots$, takie, że $V_{n,k} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_{n,k,m}$. Rozważmy multifunkcje

$$P_{n,k,m}(t) = \begin{cases} \mathrm{cl}\,\{P(t) \cap B\,(x_n, 1/k)\} & \text{dla } t \in F_{n,k,m}, \\ P(t) & \text{dla } t \notin F_{n,k,m} \end{cases} \tag{2.5}$$

i zauważmy, że każde odwzorowanie $P_{n,k,m} : T \longrightarrow \operatorname{clco} X$ jest p.z.d. Zatem każda multifunkcja $P_{n,k,m}$, na podstawie Twierdzenia Michaela (str. 36), ma ciągłą selekcję $p_{n,k,m} : T \longrightarrow X$, która w oczywisty sposób jest również selekcją P. Pokażemy, że dla każdego $t \in T$

$$P(t) = \operatorname{cl}\{p_{n,k,m}(t) : n, k, m = 1, 2, \ldots\}\,. \tag{2.6}$$

Oznaczmy prawą stronę w (2.6) przez $R(t)$. Ponieważ $R(t) \subset P(t)$, więc wystarczy wykazać, iż $P(t) \subset R(t)$. W tym celu ustalmy $t \in T$, $x \in P(t)$ i $k \in \mathbb{N}$. Można dobrać n w taki sposób, że $x \in P(t) \cap B(x_n, 1/k)$. Wtedy $t \in V_{n,k}$. Zatem istnieje m takie, że $t \in F_{n,k,m}$ i stąd $x \in P_{n,k,m}(t)$. W takim razie dla ciągłej selekcji $p_{n,k,m}$ mamy $|p_{n,k,m}(t) - x_n| \leqslant 1/k$, to zaś pociąga za sobą nierówność $|p_{n,k,m}(t) - x| < 2/k$. Wnioskujemy stąd, że $d(x, R(t)) < 2/k$. Ale k było wybrane dowolnie. Zatem $x \in R(t)$, a to oznacza, iż $P(t) \subset R(t)$ i kończy dowód. □

Twierdzenie Michaela ma zastosowania w wielu działach matematyki, w tym również w badaniu funkcji rzeczywistych.

Wniosek 2.1. Rozważmy funkcje $a, b : T \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające nierówność $a \leqslant b$ i takie, że a jest p.z.g., zaś b −p.z.d. Załóżmy ponadto, że dla pewnego zbioru domkniętego $T_0 \subset T$ istnieje ciągła funkcja $p : T \longrightarrow R$ spełniająca dla wszystkich $t \in T_0$ nierówności

$$a(t) \leqslant p(t) \leqslant b(t). \tag{2.7}$$

Wtedy p daje się przedłużyć w sposób ciągły na całą przestrzeń T w taki sposób, by spełniona była nierówność (2.7). W szczególności, dla dowolnych $t_0 \in T$ i $x_0 \in [a(t_0), b(t_0)]$ istnieje ciągła funkcja p_{t_0,x_0} taka, że dla wszystkich $t \in T$ zachodzi (2.7) oraz $p_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$.

Dowód. Na mocy Ćwiczenia 2.3 (str. 42) multifunkcja $P(t) = [a(t), b(t)]$ jest p.z.d. Ponadto $p(t) \in P(t)$ dla $t \in T_0$. W takim razie teza jest konsekwencją Twierdzenia 2.14 (str. 39). □

Twierdzenie 2.15 ma również swój odpowiednik w analizie rzeczywistej. Zachodzi mianowicie

Wniosek 2.2. Niech $a, b : T \longrightarrow \mathbb{R}$ będą danymi odwzorowaniami. Wtedy:
(1) odwzorowanie a jest p.z.d. wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje ciągłe $a_\alpha : T \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \Lambda$ takie, że dla każdego $t \in T$

$$a(t) = \sup_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha(t). \tag{2.8}$$

(2) odwzorowanie b jest p.z.g. wtedy i tylko wtedy, gdy posiada ono reprezentację

$$b(t) = \inf_{\alpha \in \Lambda} b_\alpha(t) \tag{2.9}$$

z ciągłymi $b_\alpha : T \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \Lambda$. Ponadto, jeśli (T, d) jest ośrodkową przestrzenią metryczną, to reprezentacje (2.8) i (2.9) można dobrać przeliczalnie.

Dowód. Ponieważ a jest p.z.g. wtedy i tylko wtedy, gdy $-a$ jest p.z.d., to wystarczy rozpatrzyć tylko przypadek p.z.d. Ale teraz istnienie żądanych reprezentacji wynika ze wzoru (2.4) zastosowanego do multifunkcji p.z.d. $P(t) = (-\infty, a(t)]$. □

Należy zauważyć, że w Twierdzeniu Michaela wszystkie założenia są istotne. Przykład 2.4 (str. 35) pokazuje, że każde z założeń: wypukłość, domkniętość oraz p.z.d. jest istotne. Jednakże, w pewnych sytuacjach, można udowodnić istnienie ciągłych selekcji z pominięciem założeń domkniętości bądź wypukłości.

Twierdzenie 2.16. Niech $P : T \longrightarrow \operatorname{clco}(X)$ będzie multifunkcją p.z.d. i załóżmy, że mamy dane takie funkcje ciągłe $c : T \longrightarrow X$ i $r : T \longrightarrow \mathbb{R}^+$, że dla każdego $t \in T$ zbiór $R(t) = P(t) \cap B(c(t), r(t)) \neq \emptyset$. Wtedy multifunkcja $R : T \longrightarrow \operatorname{co}(X)$ ma ciągłą selekcję.

Dowód. Korzystając ze Twierdzenia 2.5 (str. 29) możemy problem zredukować do sytuacji, gdy $c = 0$ i $r = 1$. Ustalmy $t_0 \in T$ oraz $x_0 \in R(t_0) = P(t_0) \cap B(0,1)$. Z Twierdzenia 2.15 (str. 39) wynika, że multifunkcja P ma ciągłą selekcję p_{t_0,x_0} taką, że $p_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$. Zatem $V_{t_0,x_0} = \{t \in T : |p_{t_0,x_0}(t)| < 1\}$ jest otwartym otoczeniem t_0. W takim razie rodzina $\{V_{t_0,x_0}\}_{t_0 \in T,\, x_0 \in R(t_0)}$ jest otwartym pokryciem przestrzeni parazwartej T. W to pokrycie wpisujemy lokalnie skończony rozkład jedności $\{z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. W szczególności oznacza to, iż dla każdego α istnieją takie punkty (t_α, x_α), że $z_\alpha^{-1}((0,1]) \subset V_{t_\alpha,x_\alpha}$. Rozważmy funkcję

$$p(t) = \sum_{\alpha\in\Lambda} z_\alpha(t)\, p_{t_\alpha,x_\alpha}(t).$$

Pokażemy, że jest ona żądaną selekcją. Rzeczywiście, p jest ciągłą selekcją odwzorowania P, ponieważ $p_{t_\alpha,x_\alpha}(t)$ są takimi, a $\{z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ jest lokalnie skończonym rozkładem jedności. Łatwo również sprawdzić, że dla każdego $t \in T$ mamy $|p(t)| < 1$, a to kończy dowód. □

5. Ćwiczenia

Ćwiczenie 2.1. (Stwierdzenie 2.1, str. 27.) Niech $P : T \rightsquigarrow X$. Udowodnić, że P jest p.z.d. wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{cl} P : T \longrightarrow \operatorname{cl}(X)$ jest p.z.d.

Wsk. Należy najpierw zauważyć, że dla każdego zbioru otwartego U mamy $P^-(U) = (\operatorname{cl} P)^-(U)$.

Ćwiczenie 2.2. (Stwierdzenie 2.2, str. 27.) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Udowodnić, że multifunkcja $P : T \rightsquigarrow X$ jest p.z.d. wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz $P^{-}(B(x, r))$ jest otwarty dla każdej kuli otwartej $B(x, r)$.

Wsk. Należy wykorzystać wzór (3) ze Stwierdzenia **??** (str. **??**).

Ćwiczenie 2.3. Niech $P(t) = [a(t), b(t)]$, gdzie $a, b : T \longrightarrow \mathbb{R}$ są danymi funkcjami. Udowodnić, że multifunkcja:

(a) P jest p.z.d. wtedy i tylko wtedy, gdy a jest funkcją p.z.g., zaś b funkcją p.z.d.;

(b) P jest p.z.g. wtedy i tylko wtedy, gdy a jest funkcją p.z.d., zaś b funkcją p.z.g.

Ćwiczenie 2.4. Niech $P(t) = \overline{B}(0, r(t)) \subset \mathbb{R}^d$, gdzie $r : T \longrightarrow \mathbb{R}^+$ jest daną funkcją. Udowodnić, że multifunkcja:

(a) P jest p.z.g. wtedy i tylko wtedy, gdy r jest p.z.g.;

(b) P jest p.z.d. wtedy i tylko wtedy, gdy r jest p.z.d.

Ćwiczenie 2.5. Niech K będzie zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^d$ i załóżmy, że odwzorowanie wielowartościowe $P : T \rightsquigarrow K$ jest p.z.g. Udowodnić, że multifunkcja $\operatorname{co} P : T \rightsquigarrow K$ jest również p.z.g. Czy analogiczny fakt jest prawdziwy, gdy $P : T \rightsquigarrow \mathbb{R}^d$ jest p.z.d.?

Ćwiczenie 2.6. Niech T, X i Y będą przestrzeniami topologicznymi i niech $P : T \times X \rightsquigarrow Y$ będzie multifunkcją p.z.d., a $x : T \longrightarrow X$ funkcją ciągłą. Udowodnić, że multifunkcja $\mathcal{P} : T \rightsquigarrow Y$ dana wzorem $\mathcal{P}(t) = P(t, x(t))$ jest p.z.d. Czy analogiczny fakt jest prawdziwy dla multifunkcji p.z.g.?

Ćwiczenie 2.7. (Twierdzenie 2.8, str. 32). Niech (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną. Udowodnić, że dla multifunkcji $P : T \longrightarrow \operatorname{cl}(S)$ następujące warunki są równoważne:

(i) P jest p.z.g.;

(ii) odwzorowanie $t \longrightarrow d(s, P(t))$ jest p.z.d. dla każdego $s \in S$.

Ćwiczenie 2.8. Czy Twierdzenie 2.8 jest prawdziwe dla multifunkcji nie posiadającej domkniętych wartości?