STUDENCKI KONKURS MATEMATYCZNY

Zbigniew Skoczylas

STUDENCKI KONKURS MATEMATYCZNY

Zadania z rozwiązaniami

Wydanie szóste powiększone

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2022

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978-83–62780–92–1

Wydanie szóste powiększone, Wrocław 2022
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp

Książka zawiera zadania ze studenckiego konkursu matematycznego pn. „Egzamin na ocenę celującą”, który od 1994 r. prowadzony jest w Politechnice Wrocławskiej. W konkursie mogą brać udział studenci wydziałów technicznych (bez Wydziału Matematyki), którzy bardzo dobrze zaliczyli standardowe kursy z matematyki. Każdego roku akademickiego odbywają się cztery edycje konkursu. W semestrze zimowym obejmują one analizę matematyczną 1 oraz algebrę z geometrią analityczną, a semestrze letnim — analizę matematyczną 2 oraz algebrę liniową. W konkursie zwykle bierze udział kilkadziesiąt osób. Nagrodą dla zwycięzców jest ocena celująca z danego przedmiotu. Zadania konkursowe są trudne i nietypowe. Ich rozwiązanie wymaga dużej pomysłowości, ale nie trzeba mieć wiedzy wykraczającej po za program. W zbiorze umieszczono zadania ze 126 edycji konkursu z 28 lat. Książkę podzielono na cztery rozdziały poświęcone wymienionym wcześniej przedmiotom. W pierwszej części rozdziałów zawarto zadania konkursowe, a w drugiej omówiono ich rozwiązania albo podano odpowiedzi ze wskazówkami. Zadania są w większości oryginalne. W wykazie na końcu książki wymieniono ich autorów lub wskazano źródła, skąd je zaczerpnięto. Rozwiązania zadań zwykle pochodzą od autorów albo z tego samego miejsca, co zadania.

Książka jest przeznaczona dla ambitnych studentów, którzy lubią rozwiązywać niestandardowe zadania z matematyki na poziomie akademickim. Zbiór będzie pomocny osobom przygotowującym się do międzynarodowych studenckich zawodów matematycznych. Studentów, którzy planują udział w tych zawodach, zachęcam do zapoznania się z książką pt. „Przykłady i kontrprzykłady z analizy matematycznej”.

Do obecnego wydania dołączono zadania wraz z rozwiązaniami z konkursów, które odbyły się w 2021 r. Dwa początkowe wydania książki miały tytuł „Algebra i analiza. Egzaminy na ocenę celującą”.

Serdecznie dziękuję Pani dr Teresie Jurlewicz za przygotowanie oryginalnych zadań konkursowych z algebry z geometrią analityczną i algebry liniowej oraz za pomoc w organizacji konkursu. Panu dr. Marianowi Gewertowi także dziękuję za pomoc w organizacji konkursu oraz za przygotowanie do druku kolejnych wydań książki. Podziękowania składam również Panu dr. Jerzemu Cisło za propozycje nowych zadań oraz przedstawienie interesujących rozwiązań wielu zadań z dotychczasowych konkursów. Czytelników proszę o zgłaszanie uwag o zadaniach oraz o wskazanie błędów i usterek w zbiorze.

Zbigniew Skoczylas

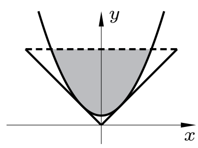
Uzupełnienie
Konkursy z 2021 r.

Zadania konkursowe

Analiza matematyczna 1, luty 2021 r. *Rozwiązania str. 174*

1. Znaleźć liczbę rzeczywistą p taką, że ciąg $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p}$ dąży do e szybciej niż ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$, tzn. spełnia warunek $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e - x_n}{e - e_n} = 0$.

2. Parabole $y = ax^2 + b$ o zmiennych parametrach a, $b > 0$ są styczne do wykresu funkcji $y = |x|$, $x \in [-1, 1]$. Wyznaczyć wartości a, b, dla których pole obszaru zaznaczonego na rysunku jest największe.



3. Dla jakich liczb naturalnych k istnieje wielomian, który ma tylko k punktów przegięcia i nie ma żadnego ekstremum lokalnego? Odpowiedź uzasadnić.

4. Obliczyć całkę $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x\, dx}{1 + e^x}$.

Algebra z geometrią analityczną, luty 2021 r. *Rozwiązania str. 176*

1. Czy istnieje liczba rzeczywista x taka, że liczba

$$\left(x + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^9$$

też jest rzeczywista? Odpowiedź uzasadnić.

2. Udowodnić, że wszystkie pierwiastki wielomianu $W(z) = (z - i)^{11} + i(z + i)^{11}$ są liczbami rzeczywistymi.

3. Pokazać, że macierz odwrotna do macierzy obróconej w lewo o 90° wokół środka pokrywa się z macierzą odwrotną obróconą o 90° w prawo.

4. Punkty $A = (3, 2, 5)$, $B = (3, 1, 6)$, $C = (2, 1, 7)$ są kolejnymi wierzchołkami pewnego n-kąta foremnego w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznaczyć n oraz współrzędne pozostałych wierzchołków wielokąta.

Analiza matematyczna 2, czerwiec 2021 r. *Rozwiązania str. 179*

1. Mamy po jednym prostokącie każdego wymiaru:

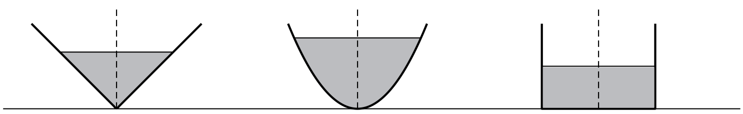
$$1 \times \frac{1}{1},\ 1 \times \frac{1}{2},\ 1 \times \frac{1}{3},\ 1 \times \frac{1}{4}, \ldots$$

Czy płaszczyznę można pokryć całkowicie tymi prostokątami tak, aby miały rozłączne wnętrza? Odpowiedź uzasadnić.

2. Niech (p_n) oznacza ciąg kolejnych liczb pierwszych. Pokazać, że istnieje funkcja f, która spełnia warunek $f^{(n)}(0) = p_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Wskazówka. Można wykorzystać nierówność $p_n \leqslant 2^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

3. Znaleźć wielomian dwóch zmiennych, który w punkcie $(0, 0)$ ma minimum lokalne właściwe, a punkcie $(2, 2)$ maksimum lokalne właściwe i są to jedyne jego ekstrema lokalne. Opisać rozumowanie prowadzące do uzyskania takiego wielomianu.

4. Pierwszy zbiornik na wodę ma kształt stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, drugi paraboloidy $z = x^2 + y^2$, a trzeci jest walcem o promieniu 1. Przekrój pionowy zbiorników pokazano na rysunku. Jak należy rozlać do nich wodę o objętości 96π, aby środek masy całej cieczy był najniżej?



Odpowiedzi, rozwiązania, wskazówki

Analiza matematyczna 1, luty 2021 r. *Zestaw str. 173*

1. Rozważmy granicę z parametrem p

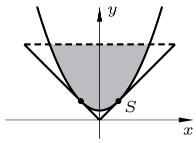
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+p}}{e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}}.$$

Korzystając z reguły de L'Hospitala otrzymamy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+p}}{e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}} \left[\frac{0}{0}\right] = 1 - 2p.$$

Zatem tylko $p = \dfrac{1}{2}$ spełnia warunek zadania.

2. Niech $S=(c,c)$, gdzie $c\in(0,1]$, będzie prawym punktem styczności paraboli $y=ax^2+b$ i wykresu funkcji $y=|x|$.



Wtedy parametry a, b spełniają układ równań:

$$\begin{cases} c = ac^2 + b \text{ (jednakowe wartości w punkcie } c\text{)},\\ 1 = 2ac \text{ (jednakowe pochodne w punkcie } c\text{)}.\end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a=\dfrac{1}{2c}$, $b=\dfrac{c}{2}$. Wyznaczymy punkty przecięcia paraboli $y=\dfrac{x^2}{2c}+\dfrac{c}{2}$ i prostej $y=1$. Mamy $\dfrac{x^2}{2c}+\dfrac{c}{2}=1$, stąd $x=\pm\sqrt{c(2-c)}$. Teraz możemy wyrazić pole odcinka paraboli, jako funkcję zmiennej c. Mamy

$$\text{pole}\,(c)=\int\limits_{-\sqrt{c(2-c)}}^{\sqrt{c(2-c)}}\left(1-\frac{x^2}{2c}-\frac{c}{2}\right)dx=\frac{2}{3}\sqrt{c(2-c)^3},\ \text{ gdzie } c\in(0,1].$$

Znajdziemy parametr c, dla którego funkcja pod pierwiastkiem, tj. $f(c)=c(2-c)^3$, przyjmuje największą wartość w przedziale $(0,1]$. Z prostego rachunku wynika, że tak będzie dla $c=\dfrac{1}{2}$. Szukana parabola ma zatem równanie $y=x^2+\dfrac{1}{4}$.

3. Najpierw uzasadnimy, że wielomian nie może mieć stopnia parzystego. Rzeczywiście, gdyby taki wielomian miał stopień parzysty, to musiałby mieć ekstremum lokalne. A to jest sprzeczne warunkami zadania.

Pokażemy, że wielomiany istnieją dla wszystkich nieparzystych k. Zatem niech $k=2n-1$, gdzie $n\in\mathbb{N}$. Skonstruujemy wielomian w, który spełnia warunki zadania. Aby miał on $2n-1$ punktów przegięcia, jego druga pochodna powinna mieć dokładnie $2n-1$ pierwiastków. Np. może mieć postać

$$w''(x)=x\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\ldots\left(x^2-(n-1)^2\right).$$

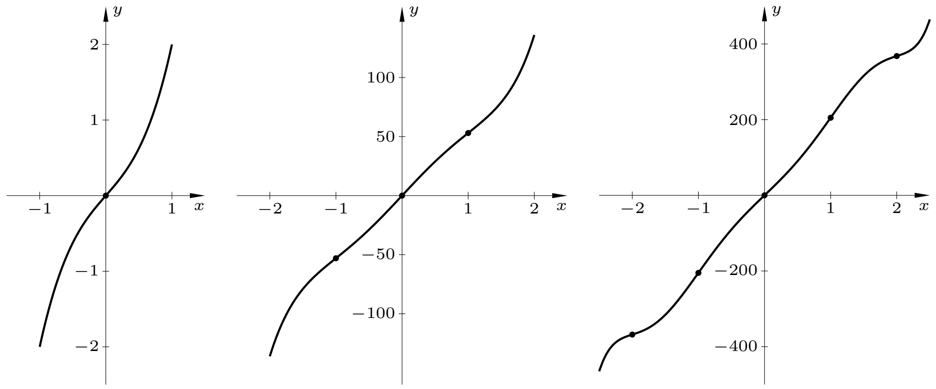
Wtedy pierwsza pochodna wyraża się wzorem

$$w'(x)=\int x\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\ldots\left(x^2-(n-1)^2\right)dx+C,\ \text{ gdzie } C\in\mathbb{R}.$$

Otrzymana pochodna jest wielomianem stopnia parzystego $2n$, zatem przyjmuje gdzieś wartość najmniejszą. Dobierając odpowiednio dużą stałą C możemy sprawić, że $w'(x)>0$ dla $x\in\mathbb{R}$. To z kolei zagwarantuje, że wielomian w nie będzie miał ekstremów. Obliczając kolejną całkę nieoznaczoną otrzymamy wielomian o żądanej własności

$$w(x)=\int\left(\int x\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\ldots\left(x^2-(n-1)^2\right)dx+C\right)dx.$$

Poniżej przedstawiamy przykładowe wielomiany dla $k=1,\,3,\,5$.



4. Mamy

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x\, dx}{1+e^x} \begin{bmatrix} u = -x \\ du = -dx \end{bmatrix} = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(-u)\,(-du)}{1+e^{-u}} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^u \cos^3 u\, du}{e^u+1}.$$

Po dodaniu stronami równości

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x\, dx}{1+e^x}, \quad I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \cos^3 x\, dx}{1+e^x},$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} 2I &= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+e^x)\cos^3 x\, dx}{1+e^x} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 x\right)\cos x\, dx \\ &= \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{bmatrix} = \int\limits_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)\, dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Zatem $I = \dfrac{2}{3}$.

Algebra z geometrią analityczną, luty 2021 r. *Zestaw str. 173*

1. Odpowiedzią na postawione pytanie jest tak.

I sposób. Niech $x = \dfrac{\cos\frac{\pi}{9}}{\frac{\pi}{9}} \cdot \sin\dfrac{\pi}{7}$. Oczywiście $x \in \mathbb{R}$. Ponadto mamy

$$\left(x + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^9 = \left(\frac{\cos\frac{\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} \cdot \sin\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^9 = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{9}}\right)^9 \left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)^9 = -\left(\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{9}}\right)^9.$$

Otrzymaliśmy liczbę rzeczywistą.

II sposób. Wykorzystamy twierdzenie Bolzano o miejscach zerowych funkcji ciągłej. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = \operatorname{Im}\left[\left(x + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^9\right].$$

Oczywiście funkcja f jest ciągła. Obliczymy jej wartości w punktach 0 oraz $\cos\frac{\pi}{7}$. Mamy

$$f(0) = \operatorname{Im}\left[\left(0 + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^9\right] = \operatorname{Im}\left(i\sin^9\frac{\pi}{7}\right) = \sin^9\frac{\pi}{7} > 0,$$

$$f\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{Im}\left[\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^9\right] = \operatorname{Im}\left(\cos\frac{9\pi}{7} + i\sin\frac{9\pi}{7}\right) = \sin\frac{9\pi}{7} < 0.$$

Ponieważ w tych punktach funkcja f przyjmuje wartości przeciwnych znaków, więc z twierdzenia Bolzano wynika, że istnieje punkt c $\left(0 < c < \cos\frac{\pi}{7}\right)$, w którym $f(c) = 0$. To oznacza, że dla $x = c$ rozważana liczba jest rzeczywista.

2. I sposób. Mamy pokazać, że rozwiązania równania

$$(z - i)^{11} + i(z + i)^{11} = 0.$$

są liczbami rzeczywistymi. Równanie to ma równoważną postać

$$(z - i)^{11} = -i(z + i)^{11}.$$

Obliczmy moduły obu stron równania. Otrzymamy

$$|z - i|^{11} = |-i|\,|z + i|^{11}.$$

Stąd

$$|z - i| = |z + i|.$$

Teraz wystarczy zauważyć, że liczby zespolone z, które spełniają warunek $|z - i| = |z + i|$, tworzą symetralną odcinka łączącego punkty i, $-i$, czyli oś rzeczywistą.

II sposób. Ponieważ $z = -i$ nie jest pierwiastkiem wielomianu W, więc równanie możemy zapisać w postaci

$$\left(\frac{z - i}{z + i}\right)^{11} = -i.$$

Równanie to jest równoważne alternatywie jedenastu równań postaci:

$$\frac{z - i}{z + i} = \cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{11} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{11}, \text{ gdzie } 0 \leqslant k \leqslant 10.$$

Z tych równań wyznaczymy rozwiązanie z i pokażemy, że ma ono zerową cześć urojoną. Po uporządkowaniu poprzednie równanie przyjmuje postać

$$\frac{z - i}{z + i} = \cos\frac{(4k + 3)\pi}{22} + i\sin\frac{(4k + 3)\pi}{22}.$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{i\cos\frac{(4k+3)\pi}{22} - \sin\frac{(4k+3)\pi}{22} + i}{\cos\frac{(4k+3)\pi}{22} + i\sin\frac{(4k+3)\pi}{22} - 1} \\
&= \frac{\left(i\cos\frac{(4k+3)\pi}{22} - \sin\frac{(4k+3)\pi}{22} + i\right)\cdot\left(\cos\frac{(4k+3)\pi}{22} - 1 - i\sin\frac{(4k+3)\pi}{22}\right)}{\left(\cos\frac{(4k+3)\pi}{22} - 1 + i\sin\frac{(4k+3)\pi}{22}\right)\cdot\left(\cos\frac{(4k+3)\pi}{22} - 1 - i\sin\frac{(4k+3)\pi}{22}\right)} \\
&= \frac{\sin\frac{(4k+3)\pi}{22}}{1-\cos\frac{(4k+3)\pi}{22}} = \frac{2\sin\frac{(4k+3)\pi}{44}\cos\frac{(4k+3)\pi}{44}}{2\sin^2\frac{(4k+3)\pi}{44}} = \operatorname{ctg}\frac{(4k+3)\pi}{44}, \quad \text{gdzie } 0 \leqslant k \leqslant 10.
\end{aligned}
$$

To oznacza, że wszystkie pierwiastki są rzeczywiste.

3. Łatwo sprawdzić, że macierze A_L, A_P otrzymane z macierzy A po jej obrocie o 90° w lewo, w prawo wokół środka wyrażają się odpowiednio wzorami:

$$
A_L = J\cdot A^T, \quad A_P = A^T\cdot J, \text{ gdzie } J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Zatem

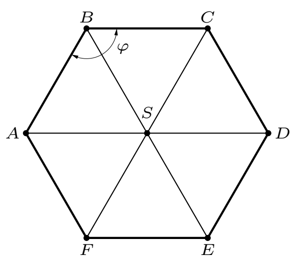
$$
(A_L)^{-1} = \left(J\cdot A^T\right)^{-1} = \left(A^T\right)^{-1}\cdot J^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T\cdot J = \left(A^{-1}\right)_P.
$$

4. Mamy $\overrightarrow{BA} = (0,1,-1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1,0,1)$. Zatem $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{2}$. Wyznaczymy kąt φ wielokąta foremnego i na tej podstawie określimy liczbę jego boków. Mamy

$$
\varphi = \sphericalangle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \arccos\frac{\overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right|} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ
$$

Zatem $n = 6$.

Przechodzimy do wyznaczenia współrzędnych wierzchołków D, E, F sześciokąta foremnego.



Niech O oznacza początek układu współrzędnych, a S środek sześciokąta. Wtedy mamy

$$
\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = (3,2,5) + (-1,0,1) = (2,2,6) \text{ oraz } \overrightarrow{BS} = (-1,1,0).
$$

Ponadto mamy

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{BC} = (3,2,5) + 2(-1,0,1) = (1,2,7) = D,$$
$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BS} = (3,1,6) + 2(-1,1,0) = (1,3,6) = E,$$
$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{BA} = (2,1,7) + 2(0,1,-1) = (2,3,5) = F.$$

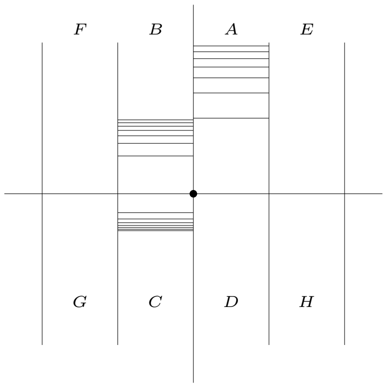
Analiza matematyczna 2, czerwiec 2021 r.

Zestaw str. 174

1. Najpierw podzielimy szereg harmoniczny na nieskończoną liczbę szeregów rozbieżnych do ∞ (o rozłącznych wyrazach). Przykładem takiego podziału jest:

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^0 \cdot (2k-1)}, \ \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^1 \cdot (2k-1)}, \ \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^2 \cdot (2k-1)}, \ \text{(d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^3 \cdot (2k-1)},$$
$$\text{(e)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^4 \cdot (2k-1)}, \ \text{(f)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^5 \cdot (2k-1)}, \ \text{(g)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^6 \cdot (2k-1)}, \ \text{(h)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^7 \cdot (2k-1)}, \ldots$$

Pokażemy jak prostokątami, których drugimi bokami są wyrazy tych szeregów, można wypełnić płaszczyznę zgodnie z warunkami zadania. Na rysunku pionowe pasy mają szerokość 1. Pas **A** wypełniamy nieskończoną liczbą prostokątów, których drugie boki są wyrazami szeregu (a), następnie pas **B** wypełniamy nieskończoną liczbą prostokątów, których drugie boki są wyrazami szeregu (b), itd. obchodzimy zaznaczony punkt nieskończenie wiele razy.



2. Rozważmy szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$$

Pokażemy, że ma on promień zbieżności $R = \infty$. W tym celu rozważmy szereg potęgowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n.$$

Ponieważ $2 \leqslant p_n \leqslant 2^n$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc drugi szereg ma współczynniki większe co do wartości bezwzględnej. Łatwo sprawdzić, że ma on promień zbieżności $R = \infty$. Zatem szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$$

ma także promień zbieżności $R = \infty$. Niech

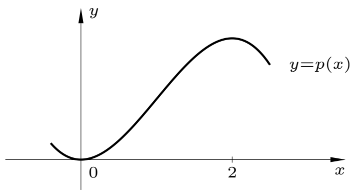
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n!} x^n \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ pochodne szeregu potęgowego zbieżnego w pewnym otoczeniu 0 wyrażają się wzorem $f^{(n)}(0) = n! \cdot c_n$, więc dla funkcji f mamy

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot \frac{p_n}{n!} = p_n.$$

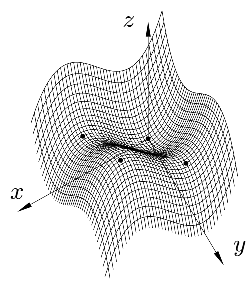
3. Poniższe rozwiązanie zaproponował dr Jerzy Cisło. Najpierw znajdziemy wielomian p jednej zmiennej x, który tylko w punktach 0 i 2 ma ekstrema. Przy czym w punkcie 0 ma minimum lokalne właściwe, a w punkcie 2 — maksimum lokalne właściwe. Pochodna takiego wielomianu powinna mieć np. postać $3x(2-x)$. Całkując tę pochodną otrzymamy wielomian:

$$p(x) = \int_0^x 3t(2-t)dt = -x^2(x-3).$$



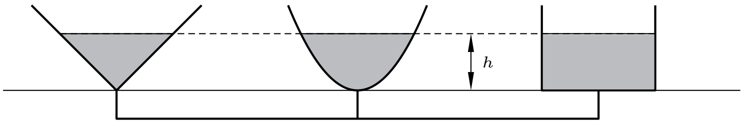
Rozważmy jednocześnie wielomian p, ale zmiennej y. Pokażemy, że suma tych wielomianów jest wielomianem dwóch zmiennych mającym żądane ekstrema. Niech zatem

$$w(x, y) = p(x) + p(y) = -x^2(x-3) - y^2(y-3).$$



Z monotoniczności wielomianu p wynika, że wielomian w ma minimum lokalne właściwe w punkcie $(0, 0)$ i maksimum lokalne właściwe w punkcie $(2, 2)$. Z kolei w punktach $(0, 2)$, $(2, 0)$ wielomian ten ma „siodła". Po za tym wielomian w nie ma innych punktów stacjonarnych. Można to łatwo potwierdzić korzystając z warunku koniecznego i wystarczającego istnienia ekstremów funkcji dwóch zmiennych.

4. Połączmy od dołu puste zbiorniki układem cienkich rurek (rysunek) i napełnijmy je wodą do poziomu dna zbiorników. Następnie do jednego ze zbiorników wlewamy wodę o objętości 96π. Zgodnie z prawami fizyki dla naczyń połączonych poziom wody w zbiornikach będzie jednakowy, a środek masy całej cieczy będzie najniżej.



Niech h oznacza poziom wody. Wtedy objętość wody w stożku, paraboloidzie i walcu wynosi odpowiednio:

$$\frac{\pi}{3}h^3, \quad \frac{\pi}{3}h^2, \quad \pi h.$$

Z warunków zadania wynika równanie

$$\frac{\pi}{3}h^3 + \frac{\pi}{2}h^2 + \pi h = 96\pi,$$

Jedynym rozwiązaniem rzeczywistym tego równania jest $h = 6$. Zatem do stożka, paraboloidy i walca należy wlać odpowiednio: 72π, 18π oraz 6π jednostek wody.

Uwaga. Układ połączonych zbiorników można wykorzystać do doświadczalnego wyznaczania rozwiązań równań stopnia trzeciego

$$ax^3 + bx^2 + cx = V$$

z dodatnimi współczynnikami a, b, c oraz parametrem $V > 0$. Potrzebne współczynniki a, b, c uzyskamy dobierając odpowiednie wymiary zbiorników. W równaniu V oznacza zmienną ilość wody wlewanej do układu zbiorników. Poziom x, który osiągnie woda po napełnieniu zbiorników, jest rozwiązaniem równania.

Źródła zadań

Analiza matematyczna 1

Styczeń 1994 r.
zad.: 1 – [9]; 2, 3, 4 – ZS.
Styczeń 1995 r.
zad.: A1 – [9]; A2, A4 – [2]; A3 – ZS.
Styczeń 1995 r.
zad.: B1 – ZS; B2 – [10]; B3, B4 – USA.
Styczeń 1996 r.
zad.: 1 – USA; 2 – AI; 3, 4 – ZS.
Styczeń 1997 r.
zad.: 1 – Rosja; 2 – USA; 3, 4 – ZS.
Styczeń 1998 r.
zad.: 1, 4 – ZS; 2 – Rosja; 3 – [14].
Styczeń 1999 r.
zad.: A1 – ZS; A2 – [12]; 3 – [7]; 4 – [11].
Styczeń 1999 r.
zad.: B1 – KM; B2 – Rosja; B3 – [3], B4 – ZS.
Styczeń 2000 r.
zad.: 1 – [7], 2 – ZS; 3 – USA; 4 – [14].
Styczeń 2001 r.
zad.: A1, A2, A3 – TJ; A4 – folklor*.
Styczeń 2001 r.
zad.: B1, B2, B3 – ZS; B4 – [7].
Styczeń 2002 r.
zad.: 1 – [12]; 2, 3 – ZS; 4 – [9].
Styczeń 2003 r.
zad.: 1, 2, 3 – ZS; 4 – [8].
Styczeń 2004 r.
zad.: 1 – USA; 2, 4 – Rosja; 3 – [9]
Styczeń 2005 r.
zad.: 1 – KS, 2, 3 – ZS, 4 – [2].
Styczeń 2006 r.
zad.: 1 – ZS; 2 – Rosja; 3, 4 – USA.
Styczeń 2007 r.
zad.: 1, 2 – Rosja; 3 – USA; 4 – [9].
Styczeń 2008 r.
zad.: 1, 2 – ZS; 3 – USA; 4 – [3].
Styczeń 2009 r.
zad.: A1, A2, A3 – ZS; A4 – MG.
Styczeń 2009 r.
zad.: B1, B4 – USA; B2, B3 – ZS.
Styczeń 2010 r.
zad.: 1 – ZS; 2 – [14]; 3 – [2]; 4 – [3].
Styczeń 2011 r.
zad.: 1, 2, 4 – ZS; 3 – Rosja.
Styczeń 2012 r.
zad.: A1 – Rosja; A2, A3, A4 – ZS.
Styczeń 2012 r.
zad.: B1 – Rosja; B2 – USA; B3 – ZS; B4 – [3].
Styczeń 2013 r.
zad.: 1, 2, 3, 4 – ZS.
Styczeń 2014 r.
zad.: 1, 2 – ZS; 3 – Rosja, 4 – folklor.
Styczeń 2015 r.
zad.: 1 – KS; 2 – ZS; 3 – TI, 4 – Rosja.
Styczeń 2016 r.
zad.: 1, 2, 3 – ZS; 4 – folklor.
Luty 2017 r.
zad.: 1, 2, 3, 4 – ZS.
Styczeń 2018 r.
zad.: 1, 3 – ZS; 2. – folklor; 4 – czasopismo „Pi Mu Epsilon”.
Luty 2019 r.
zad.: A1, A2, A4 – ZS; A3 – folklor.
Luty 2019 r.

* „folklor” oznacza, że problem jest powszechnie znany.

zad.: B1, B2, B3 – ZS; B4 – folklor.
Luty 2020 r.
zad.: 1, 2, 3, 4 – ZS.
Luty 2021 r.
zad.: 1 – folklor; 2, 3 – ZS; 4 – Litwa.

Algebra i geometria analityczna

Luty 1994 r.
zad.: 1 – USA; 2, 3 – ZS; 4 – [11].
Luty 1995 r.
zad.: 1, 2 – [11]; 3 – [9]; 4 – [6].
Luty 1996 r.
zad.: 1, 2 – ZS; 3 – [1]; 4 – [9].
Styczeń 1997 r.
zad.: A1 – USA; A2 – [10]; A3 – [11]; A4 – ZS.
Styczeń 1997 r.
zad.: B1, B3 – ZS; B2, B4 – TJ.
Styczeń 1998 r.
zad.: A1 – [9]; A2 – TJ; A3 – ZS; A4 – USA.
Styczeń 1998 r.
zad.: B1 – ZS; B2 – [8]; B3 – AI; B4 – USA.
Styczeń 1999 r.
zad.: 1, 2 – ZS; 3 – TJ; 4 – [13].
Styczeń 2000 r.
zad.: A1, A2, A4 – ZS; A3 – [9].
Styczeń 2000 r.
zad.: B1, B3 – TJ; B2 – Rosja; B4 – folklor.
Styczeń 2001 r.
zad.: A1 – folklor; A2, A4 – TJ; A3 – [10].
Styczeń 2001 r.
zad.: B1 – TJ; B2 – ZS; B3 – folklor, B4 – [10].
Styczeń 2002 r.
zad.: A1, A2, A3, A4 – TJ.
Styczeń 2002 r.
zad.: B1 – ZS; B2, B4 – [14]; B3 – [11].
Styczeń 2003 r.
zad.: 1, 4 – ZS; 2, 3 – TJ.
Styczeń 2004 r.
zad.: 1, 3 – ZS; 2 – USA; 4 – Rosja.
Styczeń 2005 r.
zad.: 1 – USA; 2, 3 – TJ; 4 – ZS.
Styczeń 2006 r.
zad.: 1, 2 – TJ; 3 – Rosja; 4 – ZS.
Styczeń 2007 r.
zad.: 1 – ZS; 2, 3 – TJ; 4 – [13].
Styczeń 2008 r.
zad.: 1, 3, 4 – ZS; 2 – [14].
Styczeń 2009 r.
zad.: 1 – ZS; 2, 3, 4 – Rosja.
Styczeń 2010 r.
zad.: 1 – Rosja; 2, 4 – ZS; 3 – USA.
Styczeń 2011 r.
zad.: 1 – folklor, 2 – USA; 3 – ZS; 4 – Rosja.
Styczeń 2012 r.
zad.: 1, 2, 3 – ZS; 4 – Rumunia.
Styczeń 2013 r.
zad.: 1, 3 – ZS; 2, 4 – USA.
Styczeń 2014 r.
zad.: 1 – [14]; 2, 3, 4 – ZS.
Styczeń 2015 r.
zad.: 1, 2, 4 – ZS; 3 – JC.
Styczeń 2016 r.
zad.: 1, 2, 3 – ZS; 4 – [14].
Luty 2017 r.
zad.: 1, 2, 3, 4 – ZS.
Styczeń 2018 r.
zad.: 1 – JC; 2 – Rosja; 3 – ZS; 4. – miesięcznik „Delta".
Luty 2019 r.
zad.: A1, A2, A3 – ZS; A4 – JC.
Luty 2019 r.
zad.: B1 – Rumunia, B2 – Ameryka Środkowa, B3, B4 – ZS.
Luty 2020 r.
zad.: 1, 2, 3, 4 – ZS.
Luty 2021 r.
zad.: 1, 2 – [17]; 3 – [18]; 4 – ZS.

Analiza matematyczna 2

Czerwiec 1994 r.
zad.: 1 – [2]; 2, 3, 4 – ZS.
Czerwiec 1995 r.
zad.: A1, A2 – ZS; A3, A4 – [6].
Czerwiec 1995 r.
zad.: B1, B3, B4 – ZS; B2 – [6].
Czerwiec 1996 r.
zad.: 1 – Rosja; 2 – [9]; 3, 4 – ZS.

Czerwiec 1997 r.
zad.: 1 – [14]; 2 – [1]; 3, 4 – ZS.
Czerwiec 1998 r.
zad.: 1, 2, 4 – ZS; 3 – [2].
Czerwiec 1999 r.
zad.: A1 – USA; A2, A3, A4 – ZS.
Czerwiec 1999 r.
zad.: B1, B2, B4 – ZS; B3 – Rosja
Czerwiec 2000 r.
zad.: A1, A2, A3, A4 – TJ.
Czerwiec 2000 r.
zad.: B1, B2, B3 – ZS; B4 – [2].
Czerwiec 2001 r.
zad.: A1, A2, A3, A4 – TJ.
Czerwiec 2001 r.
zad.: B1, B4 – ZS; B2 – [2]; B3 – [3].
Czerwiec 2002 r.
zad.: 1 – Rosja; 2 – folklor; 3 – USA; 4 – ZS.
Czerwiec 2003 r.
zad.: 1 – folklor; 2 – [2]; 3 – ZS; 4 – folklor.
Czerwiec 2004 r.
zad.: 1, 3, 4 – ZS, 2 – folklor.
Czerwiec 2005 r.
zad.: 1 – Rosja; 2, 3, 4 – ZS.
Czerwiec 2006 r.
zad.: 1 – [5]; 2, 3, 4 – ZS.
Czerwiec 2007 r.
zad.: 1, 2 – ZS; 3 – Wietnam; 4 – folklor.
Czerwiec 2008 r.
zad.: A1 – USA; A2, A3, A4 – ZS.
Czerwiec 2008 r.
zad.: B1 – USA; 2, 4 – ZS; 3 – folklor.
Czerwiec 2009 r.
zad.: 1 – USA; 2, 3, 4 – ZS.
Czerwiec 2010 r.
zad.: 1, 2, 4 – ZS; 3 – Rosja.
Czerwiec 2011 r.
zad.: 1 - Rosja; 2, 3 – ZS; 4 – USA.
Czerwiec 2012 r.
zad.: 1 – Rosja; 2 – [2]; 3, 4 – ZS.
Czerwiec 2013 r.
zad.: 1, 2, 3, 4 – ZS.
Czerwiec 2014 r.
zad.: A1, A4 – ZS; A2, A3 – USA.
Czerwiec 2014 r.
zad.: B1, B2, B3, B4 – ZS.
Czerwiec 2015 r.
zad.: A1, A2, A3, A4 – ZS.
Czerwiec 2015 r.
zad.: B1, B2, B3, B4 – ZS.
Czerwiec 2015 r.
zad.: C1 – JC; C2, C4 – folklor; C3 – ZS.
Czerwiec 2016 r.
zad.: 1, 2, 3 – ZS; 4 – JC.
Czerwiec 2017 r.
zad.: 1, 2, 3, 4 – ZS.
Czerwiec 2018 r.
zad.: 1, 3 – ZS; 2 – jawna pula zadań na kolokwia z analizy matematycznej, Wydział Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego; 4 – JC.
Czerwiec 2019 r.
zad.: 1, 2, 3, 4 – ZS.
Czerwiec 2020 r.
zad.: 1, 3, 4 – ZS; 2 – JC.
Czerwiec 2021 r.
zad.: 1, 2, 3, 4 – ZS.

Algebra liniowa

Styczeń 1994 r.
zad.: 1 – USA; 2, 3 – TJ; 4 – ZS.
Czerwiec 1994 r.
zad.: 1, 3 – ZS; 2, 4 – TJ.
Styczeń 1995 r.
zad.: 1, 2 – ZS; 3, 4 – TJ.
Czerwiec 1995 r.
zad.: 1, 2, 3 – TJ; 4 – ZS.
Czerwiec 1996 r.
zad.: 1, 3, 4 – ZS; 2 – TJ.
Czerwiec 1997 r.
zad.: 1, 4 – ZS; 2, 3 – TJ.
Czerwiec 1998 r.
zad.: 1, 2, – TJ; 3, 4 – ZS.
Styczeń 1999 r.
zad.: 1, 2, 3, 4 – TJ.
Czerwiec 1999 r.
zad.: 1, 2, – ZS; 3, 4 – TJ.
Styczeń 2000 r.
zad.: 1, 4, – ZS; 2, 3 – TJ.
Czerwiec 2000 r.
zad.: 1, 2, 4 – ZS; 3 – TJ.
Styczeń 2001 r.
zad.: 1 – JP; 2, 3, 4 – TJ.

Czerwiec 2001 r.
zad.: $1, 3, 4$ – ZS; 2 – folklor.
Czerwiec 2002 r.
zad.: $1, 2, 3, 4$ – TJ.
Czerwiec 2003 r.
zad.: 1 – ZS; $2, 3, 4$ – TJ.
Czerwiec 2004 r.
zad.: 1 – ZS; 2 – USA; $3, 4$ – TJ.
Czerwiec 2005 r.
zad.: $1, 2, 4$ – TJ; 3 – ZS.
Czerwiec 2006 r.
zad.: 1 – ZS; 2 – Rosja; $3, 4$ – TJ.
Czerwiec 2007 r.
zad.: $1, 4,$ – ZS; 2 – folklor; zad 3 – Rosja.
Czerwiec 2010 r.
zad.: $1, 3,$ – ZS; 2 – USA; 4 – Rosja.
Czerwiec 2011 r.
zad.: $1, 2, 3$ – ZS; 4 – folklor.
Czerwiec 2012 r.
zad.: $1, 2, 3, 4$ – ZS.
Czerwiec 2013 r.
zad.: $1, 2, 3, 4$ – ZS.

Autorzy zadań

JC – Jerzy Cisło, Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej.

MG – Marian Gewert, Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej.

TI – Tadeusz Inglot, Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej.

AI – Anzelm Iwanik (1946 - 1998), Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej.

TJ – Teresa Jurlewicz, Przedsiębiorstwo Informatyczne *YUMA*, Wrocław.

KM – Kornel Morawiecki (1941 - 2019), Marszałek Senior Sejmu RP.

JP – Jerzy Pietraszko (1954 - 2020), Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej.

ZS – Zbigniew Skoczylas, Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej.

KS – Krzysztof Stempak, Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej.

Książki i czasopisma

1. Gerald L. Alexanderson, Leonard F. Klosinski, Loren C. Larson, *The William Lowell Putnam Competition. Problems and Solutions, 1965–1984*, Mathematical Association of America, New York 1985.
2. Boris P. Demidowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2020.
3. Răzvan Gelca, Titu Andreescu, *Putnam and Beyond*, Springer, New York 2007.
4. George T. Gilbert, Mark I. Krusemeyer, Loren C. Larson, *The Wohascum County Problem Book*, Mathematical Association of America, New York 1993.
5. Ed. Rick Gillman, *A Frendly Mathematics Competions. 35 Years of Teamwork in Indiana*, Mathematical Association of America, New York 2003.
6. Andrew M. Gleason, Robert. E. Greenwood, Leroy M. Kelly, *The William Lowell Putnam Competition. Problems and Solutions, 1938–1964*, Mathematical Association of America, New York 1980.
7. Kiran S. Kedlaya, Bjorn Poonen, Ravi Vakil, *The William Lowell Putnam Competition. Problems and Solutions, 1985–2000*, Mathematical Association of America, New York 2002.
8. Joseph D. E. Konhauser, Dan Velleman, Stan Wagon, *Which Way Did the Bicycle Go? … and Other Intriguing Mathematical Mysteries*, Mathematical Association of America, Washington 1996.

9. L. C. Larson, *Problem – Solving Through Problems*, Springer, New York 1983.
10. W. A. Sadowniczyj, A. S. Podkolzin, *Zadania studenckich olimpiad matematycznych*, Wydawnictwo „Nauka”, Moskwa 1978.
11. W. A. Sadowniczyj, A. A. Grigorian, S. B. Koniagin, *Studenckie olimpiady matematyczne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Moskiewskiego, Moskwa 1987.
12. Paulo N. de Souza, Jorge-Nuno Silva, *Berkeley Problems in Mathematics*, Series: Problem Books in Mathematics, Springer, New York 2004.
13. G. A. Tonojan, W. N. Sergeev, *Studenckie olimpiady matematyczne*, Wydawnictwo Uniwersytetu w Erewaniu, Erewań 1985.
14. *„American Mathematical Monthly”* miesięcznik matematyczny, USA.
15. *„KBAHT”* miesięcznik matematyczno-fizyczny, Rosja.
16. *„DELTA”* miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczno-informatyczny.
17. R. Wituła, *Liczby zespolone i wielomiany*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2018.
18. D. K. Faddiejew, I. S. Somiński, *Zbiór zadań z algebry wyższej* (w jęz. ros.), Wydawnictwo Nauka, Moskwa 1977.

Studenckie konkursy i olimpiady matematyczne

Rosja – Studenckie Olimpiady Matematyczne w Rosji.

USA – Studenckie Konkursy Matematyczne w USA.

Wietnam – Olimpiada Matematyczna w Wietnamie.

Rumunia – Olimpiada Matematyczna w Rumunii.

Ameryka Środkowa – Olimpiada Matematyczna Krajów Ameryki Środkowej.

Litwa – Studencki Konkurs Matematyczny na Litwie.