

Markowe
Wykłady
z **M**atematyki

Markowe
Wykłady
z **M**atematyki

**równania
różniczkowe**



Marek Zakrzewski

Marek Zakrzewski
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marek.zakrzewski@pwr.edu.pl

Copyright © 2019 by Marek Zakrzewski

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Projekt okładki
Andrzej Krupa

Skład komputerowy książki w systemie \LaTeX wykonał autor.
Rysunki wykonał Marian Gewert.

ISBN 978-83-62780-67-9

Wydanie I, Wrocław 2019
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c.
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS sp. z o.o., A. Bieroński, P. Bieroński, s.j.

Od 300 lat analiza pozostaje głównym działem matematyki, a równania różniczkowe samym sercem analizy. Są one naturalnym zwieńczeniem elementarnego rachunku [różniczkowego i całkowego] i najważniejszym działem matematyki dla rozumienia nauk fizycznych. A także, na głębszym poziomie, źródłem większości idei i teorii składających się na zaawansowaną analizę. [...] Dostarczają one podstawowej motywacji dla analizy zespolonej, teorii szeregów Fouriera, (...) przestrzeni metrycznych i przestrzeni Hilberta, a także mnóstwa innych pięknych zagadnień nowoczesnej matematyki.

George F. Simmons,
z przedmowy do *Differential Equations*,
McGraw-Hill 1972

Spis treści

I	Równania I rzędu	1
1	Podstawowe pojęcia i najprostsze równania	4
1.1	Podstawowe pojęcia	4
1.2	Równania o zmiennych rozdzielonych	8
1.3	Bernoulli	13
2	Równania liniowe I rzędu	15
2.1	Struktura przestrzeni rozwiązań	15
2.2	Rozwiązywanie równań	18
3	Równanie rozpadu i modele wzrostu populacji	22
3.1	Równanie rozpadu i metoda węgla ^{14}C	22
3.2	Dwa prawa fizyki	24
3.3	Model maltuzjański i krzywa logistyczna	27
3.4	Chaos, bifurkacja i pogoda	32
3.5	Malthus i Verhulst	33
4	Istnienie i jednoznaczność*	35
4.1	Przybliżone rozwiązywanie równań algebraicznych	35
4.2	Twierdzenie Banacha o odwzorowaniach zwięzających	37
4.3	Metoda kolejnych przybliżeń i dowód twierdzenia Picarda	40
4.4	Banach	44
II	Równania II rzędu i układy drgające	47
5	Podstawy teoretyczne	49
5.1	Wrońskian i kwestie istnienia	49
5.2	Struktura przestrzeni rozwiązań	53
5.3	Poszukiwanie rozwiązań: dwa łatwe przypadki	55
5.4	Hoene-Wroński	58

6	Równania liniowe II rzędu o stałych współczynnikach	60
6.1	Równania jednorodne	60
6.2	Równania niejednorodne i metoda współczynników nieoznaczonych	66
7	Układy drgające	69
7.1	Drgania swobodne	69
7.2	Opór, drgania wymuszone i rezonans	73
8	Szeregi, funkcje specjalne i twierdzenie Sturma	77
8.1	Znane równania — nowe podejście	77
8.2	Trudne równania i funkcje specjalne	81
8.3	Twierdzenie Sturma i tematy pokrewne*	84
9	Prawa Keplera i grawitacja*	89
9.1	Krótki kurs stożkowych	89
9.2	Równania ruchu i II prawo Keplera	92
9.3	I prawo Keplera	94
9.4	III prawo Keplera i problem trzech ciał	98
9.5	Kepler i Newton	100
III	Układy równań liniowych	101
10	Układy równań i wrońskian	103
10.1	Układy równań a równania	103
10.2	Trochę teorii	106
11	Liniowe układy jednorodne o stałych współczynnikach	111
11.1	Najprostszy przypadek	111
11.2	Dwa trudniejsze przypadki	116
12	Eksponenta macierzy i układy niejednorodne	120
12.1	Eksponenta macierzy	120
12.2	Macierz fundamentalna i rozwiązanie zagadnienia początkowego	125
13	Układy autonomiczne i portrety fazowe	131
13.1	Portrety fazowe i stabilność	131
13.2	Portrety fazowe: cztery podstawowe typy	136

14 Mapa portretów fazowych i przypadki graniczne	142
14.1 Wyznacznik, ślad i mapa portretów fazowych	142
14.2 Przypadki graniczne*	144
14.3 Dwaj akademicy: Poincaré i Picard	146
15 Nieliniowość*	148
15.1 Układy nieliniowe i linearyzacja	148
15.2 Model Volterra-Lotka	151
15.3 Trajektorie cykliczne i twierdzenie Poincaré’go-Bendixsona . . .	155
15.4 Volterra	159
IV Transformata Laplace’a	161
16 Podstawowe własności transformaty Laplace’a	163
16.1 Wzory i własności	163
16.2 Transformata pochodnej i odwracalność	168
16.3 Laplace	170
17 Rozwiązywanie równań różniczkowych i . . .	172
17.1 Rozwiązywanie równań i układów równań	172
17.2 Pochodna i całka transformaty Laplace’a*	176
18 Funkcje Heaviside’a, Diraca i spłot*	179
18.1 Spłot funkcji i iloczyn transformat	179
18.2 Funkcja Heaviside’a	183
18.3 „Funkcja” Diraca i jej transformata	186
18.4 Heaviside i Dirac	189
V Trzy klasyczne równania fizyki matematycznej	191
19 Równania cząstkowe i zagadnienia brzegowe	193
19.1 Trzy klasyczne równania	193
19.2 Równanie struny (podejście d’Alemberta)	196
20 Szeregi Fouriera i twierdzenie Dirichleta	199
20.1 Szeregi Fouriera	200
20.2 Kwestie zbieżności	205
20.3 Fourier	207

21 Trzy zagadnienia brzegowe*	208
21.1 Równanie dyfuzji	208
21.2 Równanie struny (podejście Bernoulliego)	212
21.3 Równanie Laplace'a i problem Dirichleta	215
Epilog	220
Wskazówki do dalszej lektury	223
Odpowiedzi i wskazówki	225
Indeks	234

Wstęp

Twierdzenia matematyczne rzadko znajdują bezpośrednio zastosowanie; naprawdę użyteczne są same pojęcia. Gdy tylko poznasz pojęcie równania różniczkowego, będziesz widział je wszędzie, niezależnie od tego, co będziesz robić. Tego nie można osiągnąć nie przechodząc przez kurs abstrakcyjnych równań różniczkowych. To, co się stosuje to kultura matematyczna, jaką daje taki kurs, a nie konkretne twierdzenia.

Gian-Carlo Rota, *Indiscrete Thoughts*,
Birkhäuser, 2008

Książka może służyć jako podstawowy podręcznik dla studentów matematyki i kierunków pokrewnych. Wymagania wstępne to podstawy rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej i podstawy algebry liniowej.

Rola równań różniczkowych w wykształceniu matematyka

Równania różniczkowe mają zastosowania w fizyce, technice, chemii, biologii, medycynie, a nawet w naukach społecznych, więc dla wielu studentów są one po prostu bardzo ważną — niekiedy najważniejszą — częścią ich matematycznego wykształcenia. Ale ich rola jest istotna także dla tych studentów, których zainteresowania odbiegają daleko od zastosowań.

Dopiero równania różniczkowe naprawdę pokazują znaczenie wielu pojęć i technik algebry liniowej, istotne zastosowania analizy, a także elementy topologii. Historycznie, to problemy równań różniczkowych doprowadziły do odkrycia szeregów Fouriera, a w konsekwencji do uściślenia pojęcia funkcji i powstania teorii mnogości.

W każdej z pięciu części prezentowanej książki dochodzimy do momentu, gdy musimy wyjść poza granice elementarnej analizy i algebry. W pierwszej części jest to twierdzenie Banacha o odwzorowaniach zwięzających, w drugiej są to funkcje specjalne, w trzeciej eksponenta macierzy, w czwartej funkcja Diraca, a w piątej szeregi Fouriera.

Motywy przewodnie

W gruncie rzeczy tematem książki są dwa podstawowe równania różniczkowe:

$$x' = ax, \quad x'' = -ax.$$

Pierwsze z nich opisuje wzrost wykładniczy, np. wzrost liczebności populacji bakterii, drugie zaś zjawiska okresowe — np. ruch wahadła. W trzech pierwszych częściach książki analizujemy ich naturalne modyfikacje, uogólnienia i interpretacje.

Równanie $x' = ax$ jest szczególnym przypadkiem analogicznego równania macierzowego

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

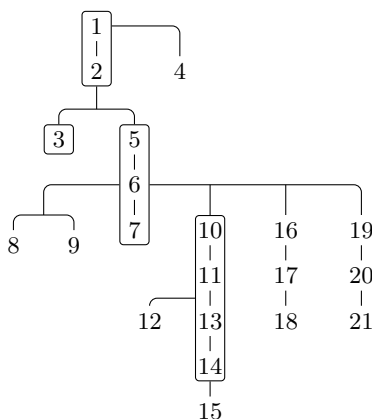
Okazuje się, iż także równanie $x'' = -ax$ — po prostej transformacji — można traktować jako szczególny przypadek tego równania macierzowego. Tak więc równanie $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ obejmuje bardzo szeroką klasę równań różniczkowych.

Wszystkie te równania są przykładami równań liniowych. Równania nieliniowe rzadko da się rozwiązać w sposób jawny, ale okaże się, że analiza jakościowa takich równań sprowadza się do analizy pokrewnych równań liniowych.

Strategie lektury i uwagi dla wykładowców

Przy typowym kursie 15-tygodniowym (ok. 150 stron książki) trzeba zrezygnować z czwartej oraz piątej części. Pominięcie wykładu 4. i 9. pozwala uzupełnić ten podstawowy kurs o dwa początkowe wykłady jednej z pominiętych części. Chociaż opuszczenie tych wykładów nie spowoduje żadnych istotnych luk, warto zachęcić słuchaczy przynajmniej do wstępnej lektury pominiętych wykładów.

Poniższy schemat przedstawia zależności pomiędzy kolejnymi wykładami. Obwódką zakreślone są wykłady odpowiadające podstawowej części kursu.



Poziom trudności zadań

Równania różniczkowe nie mają wśród studentów dobrej opinii. Spora różnorodność szczegółowych typów równań zawsze działała zniechęcająco. W ciągu ostatnich trzydziestu lat podręczniki równań różniczkowych stopniowo zaczęły zmieniać swój charakter. Ogólnie dostępne programy komputerowe pozwoliły zrezygnować z nacisku na biegłość techniczną i skupić się na stronie pojęciowej.

Ograniczając się do podstawowego nurtu równań różniczkowych mogłem pominąć większość zadań najeżonych trudnościami technicznymi. W konsekwencji podstawowe zadania rachunkowe i pojęciowe są raczej proste.

Nieco trudniejsze zadania pojawiają się niekiedy po symbolu $\diamond \diamond \diamond$, ale rzadko są naprawdę trudne. Żadne z tych zadań nie ma istotnego wpływu na rozumienie zasadniczego tekstu książki.

Dowody, czyli wyjaśnienia

Większości istotnych twierdzeń towarzyszą dowody albo szkice dowodów. Pewne nieścisłości są na ogół zamierzone. Zależało mi bardziej na przystępności dowodu niż absolutnej ścisłości.

Biogramy i uwagi historyczne

Podobnie, jak we wcześniejszych tomach cyklu książka zawiera krótkie biogramy. Oprócz matematyków w ścisłym tego słowa znaczeniu, pojawiają się też postaci z pogranicza, np. Kepler, Malthus czy Dirac. Obecność tych postaci przypomina, że znaczenie równań różniczkowych wykracza daleko poza samą matematykę.

Długość notki biograficznej nie jest proporcjonalna do rangi uczonego. W pewnym stopniu jest wprost przeciwnie: wolałem poświęcić więcej uwagi postaciom mniej znanym.

Jako ciekawostkę odnotujemy, że jedynym matematykiem, którego nazwisko pojawia się w każdym z dotychczasowych siedmiu tomów cyklu jest Leonhard Euler.



Pisząc tę książkę korzystałem z ponad 10 rozmaitych podręczników. Wszystkie zacytowane są w bibliografii, te, których wpływ jest najistotniejszy zaznaczyłem gwiazdką. Spory wpływ wywarł też artykuł Gian-Carla Roty *Ten lessons I wish I had learned before I started teaching differential equations*, choć pewnie autor piszący, że im dłużej uczy równań różniczkowych, tym mniej je rozumie, nie powinien być autorytetem.

Moi koledzy — Marian Gewert i Zbigniew Skoczylas — włożyli sporo wysiłku, by usunąć subtelne potknięcia merytoryczne, wygładzić tekst i zadbać o wygląd książki. Marian Gewert sporządził też rysunki, niekiedy bardzo trudne. Gorąco dziękuję za wszystkie uwagi i sugestie, dzięki którym książka na pewno wiele zyskała.

M. Z.

I

Równania I rzędu

Jak to się stało, że matematyka, produkt myśli ludzkiej, niezależny od doświadczenia, tak wspaniale pasuje do świata realnego?

Albert Einstein, cyt. wg McTutor
History of Mathematics

Matematyka zawsze znajdowała jakieś zastosowania w astronomii, geodezji, budownictwie i oczywiście — w księgowości. Jednak żywiołowy rozwój jej zastosowań zaczyna się wraz z Rewolucją Naukową XVII w., czyli — w wielkim uproszczeniu — od Galileusza (1564-1642), Keplera (1571-1630), a przede wszystkim Newtona (1642-1727). To Galileusz twierdził, że przyroda wyraża się w języku matematyki. Od niego też pochodzi najstarsze prawo nowożytnej fizyki, opisujące drogę przebywaną przez swobodnie spadające ciało

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Niespełna sto lat później Newton za pomocą metod matematycznych odkrywa prawo powszechnej grawitacji i jego związek z prawami Keplera rządzącymi ruchem planet. Odkrywanie takich związków niemal zawsze sprowadza się do rozwiązywania **równań różniczkowych**.

W fizyce przednewtonowskiej wszelkie zależności wyrażają się zasadniczo za pomocą funkcji liniowej lub kwadratowej. Na poziomie nieco bardziej zaawansowanym znaczna część praw przyrody wyraża się za pomocą funkcji przestępnych (wykładniczych, trygonometrycznych itp.). Wszechobecność tych funkcji w świecie przyrody i świecie matematyki bierze się stąd, iż są one rozwiązaniami podstawowych równań różniczkowych:

funkcje wykładnicze	$x' = kx,$	$k \neq 0;$
funkcje trygonometryczne	$x'' = -kx,$	$k > 0.$

Te dwa równania opisują fundamentalne prawa przyrody. Pierwsze opisuje wzrost (lub zanik), gdy jego tempo jest proporcjonalne do stanu aktualnego. Przykładem rozwój populacji: im większa liczba osobników, tym szybszy wzrost populacji. Przy braku ograniczeń daje to nieograniczony wzrost populacji w tempie wykładniczym.

Wiele procesów ma tendencję do oscylowania wokół stanu równowagi, przy czym im większe jest odchylenie, tym większa tendencja, by powrócić do stanu równowagi. Przykładem jest ruch wahadła. Przy (nierealistycznym) założeniu braku tarcia i innych czynników hamujących, ruch wahadła i inne podobne procesy mają charakter okresowy. Opisuje je drugie z równań. Rozwiązaniem jest kombinacja funkcji sinus i cosinus.

Realne procesy przebiegają w sposób bardziej skomplikowany niż sugerują to te dwa równania. Znaczna część kursu poświęcona jest modyfikacjom równania $x'' = -kx$. Najpierw jednak zajmiemy się równaniem $x' = kx$ i kilkoma innymi pokrewnymi.

Równania różniczkowe pojawiają się już ok. 1675 r. w pracach Leibniza i Newtona. Podstawowe techniki rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych I rzędu zostały odkryte jeszcze w XVII w. (w znacznym stopniu dzięki braciom Bernoulli), a przez dalsze kilkadziesiąt lat opanowano praktycznie wszystkie elementarne metody także dla równań wyższych rzędów.

Wykład 1

Równanie rozpadu i modele wzrostu populacji

Przedstawimy teraz kilka klasycznych zastosowań równań różniczkowych pierwszego rzędu. W istocie wszystkie one wychodzą od równania $x' = ax$ bądź jego modyfikacji. Zaczniemy od zastosowań w fizyce i chemii, w dalszej części pokażemy przykłady zastosowań w demografii, czy ogólniej, w biologii populacji.

1.1 Równanie rozpadu i metoda węgla ^{14}C

Wprowadzenie - Rozpad radioaktywny - Metoda węgla ^{14}C - Zadania

Jeszcze w XVI w. dość powszechnie przyjmowano, że Biblia jest absolutnym autorytetem w zakresie dziejów ludzkości. Na jej podstawie szacowano wiek świata. Najdokładniejsze datowanie pochodzi od Jamesa Usshera, irlandzkiego arcybiskupa, który utrzymywał, że stworzenie świata nastąpiło w niedzielę 23 października 4004 roku p.n.e.

Przynajmniej od końca XVIII w., gdy ostatecznie zakwestionowano chronologię opartą na Biblii, geolodzy, paleontolodzy i archeologowie poszukują metod pozwalających na określenie wieku znajdujących artefaktów. Już w XVIII w. metody oparte na szacowaniu wieku skał kazały uczonym wydłużyć wiek Ziemi z ok. 6000 - 8000 lat do ok. 75 000 lat, a sto lat później wiek Ziemi szacowano już na 20-400 milionów lat. Dla krótszych okresów typowych dla archeologii jedną z podstawowych metod jest opracowana w roku 1949 roku przez Willarda Libby'ego metoda węgla ^{14}C . Teoretyczną podstawą tej metody jest równanie rozpadu.

Wprowadzenie

Zacznijmy od podstawowego równania opisującego wzrost lub rozpad w tempie proporcjonalnym do aktualnego stanu. Niech $x(t)$ oznacza stan w chwili t . Przyjmując dodatni współczynnik proporcjonalności k otrzymujemy równanie postaci

$$x' = kx \text{ (rozwój)} \quad \text{albo} \quad x' = -kx \text{ (rozpad/zanik)}.$$

Wiemy już, że rozwiązaniem ogólnym równania $x' = kx$ jest $x = Ce^{kt}$. Wynika stąd, że rozwiązaniem równania $x' = -kx$ jest rodzina funkcji $x(t) = Ce^{-kt}$. Wszystkie dalsze przykłady rozważane w tym podrozdziale prowadzą do jakiejś formy równania rozpadu.

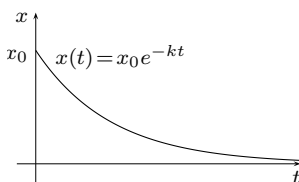
Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x' = -kx, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Wówczas mamy $x(0) = Ce^0 = C$, skąd stała $C = x_0$. Zatem rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest

$$x(t) = x_0 e^{-kt}.$$

Przy $t \rightarrow \infty$ funkcja $y(t)$ dąży wówczas w tempie wykładniczym do zera. Rysunek poniżej przedstawia typowy przebieg takiego procesu.



Rozpad radioaktywny

Równanie rozpadu rządzi bardzo różnymi procesami. Spójrzmy na funkcję $x(t) = x_0 e^{-kt}$, w przypadku, gdy opisuje ona przebieg rozpadu radioaktywnego.

Z postaci rozwiązania można zauważyć, iż ilość substancji wraz z czasem t dążącym do nieskończoności maleje do zera, ale nie znika całkowicie. Zatem nie można mówić o *okresie rozpadu*. Zwyczajową charakterystyką substancji

radioaktywnej jest **okres półrozpadu**, tzn. czas, w którym masa substancji zmniejsza się do połowy.

Zależność pomiędzy współczynnikiem k a okresem półrozpadu T wyznaczymy z warunku

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-kT}.$$

Mamy $e^{-kT} = 1/2$, skąd $k = \ln 2/T$.

Podstawiając tę wartość otrzymujemy wzór na ilość substancji radioaktywnej w zależności od okresu półrozpadu

$$x(t) = x_0 e^{-t \ln 2/T}.$$

Metoda węgla ^{14}C

Węgiel występujący w atmosferze zawiera izotopy promieniotwórczy ^{14}C oraz trwale ^{12}C i ^{13}C . Każdy żywy organizm (roślina czy zwierzę) w trakcie procesów życiowych pobiera węgiel z atmosfery tak, że proporcja izotopu promieniotwórczego do pozostałych izotopów jest stała. Jednak, wraz ze śmiercią organizmu, traci on stopniowo radioaktywną część węgla, co powoduje, że stosunek ilości izotopu promieniotwórczego do pozostałych izotopów maleje. Ta proporcja pozwala określić czas śmierci organizmu.

Zadania

- Po jakim czasie od ustania funkcji życiowych zawartość węgla ^{14}C w organizmie osiągnie poziom 1%, skoro okres półrozpadu wynosi ok. 5370 lat?
- W znalezionych szczątkach mamuta pozostało 30% izotopu ^{14}C . Oszacuj wiek szczątek.

1.2 Dwa prawa fizyki

Newtona prawo stygnięcia - Równanie spadku przy uwzględnieniu oporu powietrza - Zadania

Rozważamy tu dwa zjawiska fizyczne, z pozoru bardzo odległe. Jednak w obu przypadkach mamy sytuację podobną: zanik/wzrost w tempie malejącym wraz ze zbliżaniem się do granicy — temperatury otoczenia czy prędkości granicznej.

Newtona prawo stygnięcia

Zgodnie z prawem Newtona tempo stygnięcia ciała jest proporcjonalne do różnicy temperatur pomiędzy ciałem a otoczeniem. Temperaturę pomieszczenia oznaczmy przez T_p . Temperatura $T(t)$ w chwili t spełnia zatem równanie różniczkowe

$$(*) \quad T' = -k(T - T_p), \quad k > 0.$$

W procesie stygnięcia różnica temperatur maleje wraz z czasem. Stąd znak minus przy dodatnim współczynniku k . Współczynnik ten zależy od ciepła właściwego stygnącej substancji.

Oznaczmy przez T_0 jej temperaturę początkową. Skoro mowa o stygnięciu, to mamy $T_0 > T_p$. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} T' = -k(T - T_p), \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Rozdzielając zmienne w powyższym równaniu otrzymujemy

$$\frac{dT}{T - T_p} = -k dt.$$

Stąd, całkując stronami, dochodzimy do równości

$$\ln |T - T_p| = -kt + C.$$

W trakcie stygnięcia temperatura $T(t)$ jest stale wyższa od temperatury otoczenia T_p , więc znak wartości bezwzględnej można pominąć. Z równości $\ln(T - T_p) = -kt + C$ wynika zależność

$$T(t) - T_p = e^{-kt+C}, \quad \text{czyli} \quad T(t) = T_p + e^C e^{-kt}.$$

Dla $t = 0$, uwzględniając warunek $T(0) = T_0$, otrzymujemy $T_0 = T_p + e^C$, a stąd ostatecznie

$$T(t) = T_p + (T_0 - T_p)e^{-kt}.$$

Przy t dążącym do nieskończoności, drugi składnik dąży do zera, a więc $T(t)$ dąży do temperatury otoczenia T_p , w zgodzie z naszym doświadczeniem.

Równanie spadku przy uwzględnieniu oporu powietrza

Rozważmy ruch ciała (np. kamienia) o masie m , spadającego w próżni pod wpływem siły ciężenia $F = mg$. Jeśli na początku ciało znajduje się w spoczynku, to zgodnie z II zasadą dynamiki, przy odpowiednio dobranym układzie

współrzędnych, jego położenie $s(t)$ w chwili t opisane jest równaniami

$$ms'' = mg, \quad s'(0) = v(0) = 0, \quad s(0) = 0.$$

Masa oczywiście się skraca. Rozwiązaniem tego zagadnienia początkowego jest znany wzór na ruch jednostajnie przyspieszony

$$s(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

Jeżeli ciało nie porusza się w próżni, to działa na nie siła oporu (hamująca), zależna od jego prędkości. W uproszczonym, ale realistycznym modelu zakłada się, że siła ta jest wprost proporcjonalna do prędkości. Siła wypadkowa jest wówczas sumą dwu przeciwnie skierowanych sił: siły ciężenia $F_1 = mg$ i siły oporu $F_2 = -bv$, gdzie współczynnik b jest dodatni. Wówczas warunki opisujące ruch i stan początkowy przyjmują postać

$$ms'' = mg - bv, \quad s'(0) = v(0) = 0, \quad s(0) = 0.$$

Występujące po lewej stronie przyspieszenie to pochodna prędkości, więc równanie możemy sprowadzić do postaci

$$mv' = mg - bv, \quad v(0) = 0.$$

Podzielmy obie strony równania przez m i wprowadźmy stałą $k = b/m$:

$$v' = g - \frac{b}{m}v = g - kv = -k \left(v - \frac{g}{k} \right).$$

Skoro wzór ma sens fizyczny, to wielkość g/k jest pewną prędkością. Oznaczmy więc ją przez v_p . Otrzymamy wówczas równanie

$$(**) \quad v' = -k(v - v_p).$$

Podczas spadania prędkość rośnie, zatem $v' > 0$. Ponieważ k jest dodatnie, więc $v - v_p < 0$, czyli $v < v_p$.

Zauważmy, że równanie $(**)$ jest niemal tym samym równaniem, co równanie stygnięcia $(*)$; różni się tylko oznaczeniem zmiennych. Poprzednie rachunki musimy jednak nieznacznie zmodyfikować, gdyż tym razem mamy $v < v_p$ (a przy temperaturach mieliśmy $T > T_p$). Uwzględniając tę drobną modyfikację oraz warunek początkowy $v(0) = 0$ otrzymujemy

$$v(t) = v_p \left(1 - e^{-kt} \right).$$

Przy $t \rightarrow \infty$ prędkość ta dąży do v_p , tak więc współczynnik v_p ma konkretny sens fizyczny: jest to graniczna prędkość spadającego ciała. Formalnie ta graniczna prędkość nigdy nie będzie osiągnięta. Ale z punktu widzenia realnej fizyki od pewnego momentu ciało będzie spadać ze stałą prędkością.

Zadania

3. W pomieszczeniu o temperaturze 20°C pewna substancja o temperaturze 100°C stygnie do temperatury 60°C po 30 minutach.

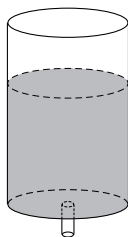
- Znajdź wzór na jej temperaturę po czasie t godzin;
- Po jakim czasie osiągnie temperaturę 25°C ?

4. Rozważmy pojemnik w kształcie walca napełniony wodą. Jeśli w denku pojemnika jest mały otwór, to jak głosi prawo Torricellego poziom wody $y(t)$ w momencie t będzie się zmieniał zgodnie z równaniem

$$y' = -k\sqrt{y},$$

gdzie k jest stałą zależną od pola otworu.

- Znajdź rozwiązanie ogólne tego równania.
- Przyjmijmy, że pełny pojemnik opróżnia się w ciągu godziny. Po jakim czasie poziom wody w tym pojemniku spada do połowy?



1.3 Model maltuzjański i krzywa logistyczna

Czysty model maltuzjański - Równanie logistyczne - Analiza jakościowa zamiast rachunków - Zadania

Pod koniec XVIII w. Thomas Malthus (1766-1834) zastanawiał się nad skutkami zauważalnego wówczas wzrostu liczby ludności na świecie. Uważał on, że dostępne zasoby pożywienia rosną w tempie liniowym, a liczba ludności w tempie wykładniczym. W takim razie ludzkość skazana jest na głód.

Czysty model maltuzjański

Czysty model maltuzjański zakłada, że tempo przyrostu populacji $p(t)$ jest proporcjonalne do wielkości samej populacji, co prowadzi do równania różniczkowego

$$p' = rp.$$

Wiemy już, że jego rozwiązaniem jest

$$p(t) = Ce^{rt}.$$

Dla dodatniego r (wzrost populacji, a nie jej stopniowy zanik) funkcja ta dąży do nieskończoności, a więc wcześniej czy później model ten traci związek z rzeczywistością.

Równanie logistyczne

W bardziej realistycznym modelu zakładamy, że środowisko ma ograniczoną pojemność K — stanowi ona górne ograniczenie na liczbę przedstawicieli populacji w danym środowisku. Wielkość tej populacji w momencie t będziemy oznaczać przez $p(t)$.

W realistycznych modelach zakłada się ponadto, że wraz ze wzrostem liczby osobników narasta liczba konfliktów w walce o przestrzeń i pożywienie, a co za tym idzie pojawia się czynnik hamujący rozwój populacji. Najwcześniejszy taki model rozważał belgijski matematyk Pierre-François Verhulst (1804 - 1849). W modelu Verhulsta przyjmuje się, że ten czynnik hamujący rośnie proporcjonalnie do $p^2(t)$.

Przy ustalonej pojemności K i przyjętych wyżej założeniach standardowe równanie rozwoju populacji — zwane **równaniem logistycznym** — ma postać

$$\frac{dp}{dt} = r \left(p - \frac{p^2}{K} \right),$$

gdzie r - dodatni współczynnik proporcjonalności.

Dla uproszczenia rozważań wybierzmy jednostkę wielkości populacji tak, że graniczna pojemność wyniesie $K = 1$. Przy takim założeniu wielkość $p(t)$ wyraża stosunek wielkości populacji do górnego ograniczenia K , czyli poziom nasycenia. Gdyby założyć, że Ziemia jest w stanie żywić jednocześnie maksimum 100 miliardów ludzi, to obecnie mielibyśmy $p \approx 8\%$.

Przy $K = 1$ otrzymujemy równanie

$$\frac{dp}{dt} = r (p - p^2).$$

Przyjmijmy ponadto naturalne założenie, że wyjściowe nasycenie populacji $p(0) = p_0 < 1$. Można wykazać, że wielkość $p(t)$ będzie wówczas stale dodatnia i mniejsza od 1.

Zanim rozwiążemy to równanie, przeprowadźmy wstępną analizę przewidywanego rozwiązania. W okresie początkowym rozwoju populacji — gdy osobników jest niewiele — czynnik hamujący i ograniczenie pojemności prawie nie

odgrywają roli. Zatem przebieg szukanej funkcji w fazie początkowej powinien pokrywać się w przybliżeniu z rozwiązaniem równania Malthusa $p' = rp$. Tak więc także w tym modelu wzrost populacji w fazie początkowej powinien przypominać wzrost wykładniczy.

Z kolei, jeżeli p będzie zbliżać się do poziomu nasycenia 1, to wyrażenie $p - p^2$ będzie bliskie 0, więc tempo wzrostu będzie bardzo wolne.

Przepiszmy równanie w postaci

$$\frac{dp}{p(1-p)} = rdt,$$

i rozłóżmy lewą stronę na sumę ułamków prostych:

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right) dp = rdt.$$

Całkując stronami otrzymamy

$$(*) \quad \ln p - \ln(1-p) = rt + C.$$

Przy całkowaniu pominęliśmy wartości bezwzględne, gdyż obie wielkości p , $1-p$ są dodatnie.

Dla $t = 0$ mamy

$$\ln p_0 - \ln(1-p_0) = 0 + C,$$

skąd

$$C = \ln p_0 - \ln(1-p_0) = \ln \frac{p_0}{1-p_0}.$$

Z warunku (*) otrzymujemy więc

$$\ln \frac{p}{1-p} = rt + \ln \frac{p_0}{1-p_0} = \ln \frac{p_0}{1-p_0} + \ln e^{rt} = \ln \left(\frac{p_0}{1-p_0} e^{rt} \right),$$

a stąd

$$\frac{p}{1-p} = \frac{p_0}{1-p_0} e^{rt}.$$

Ostateczny wzór warto zapisać w postaci jawnie wskazującej, że wielkość p jest funkcją czasu t . Po rutynowych przekształceniach otrzymamy

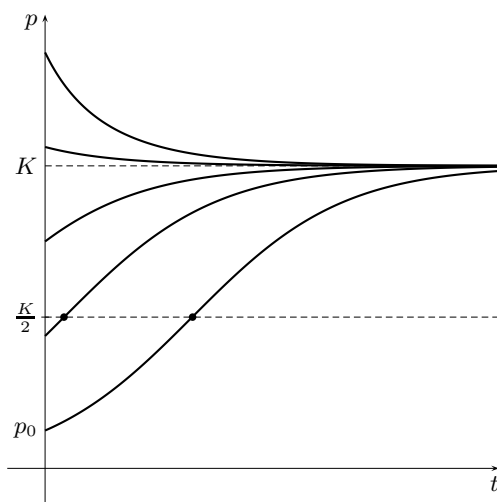
$$p(t) = \frac{p_0 e^{rt}}{1 + p_0(e^{rt} - 1)}.$$

Powyższy wzór uzyskaliśmy przy założeniu $K = 1$. W podobny sposób możemy otrzymać rozwiązanie ogólnego równania logistycznego

$$p(t) = \frac{Kp_0e^{Krt}}{K + p_0(e^{Krt} - 1)}.$$

Zauważmy, że przy $t \rightarrow \infty$ wielkość $p(t)$ dąży do K — stanu pełnego nasycenia środowiska.

Przy założeniu, że $p_0 < K$ wykres otrzymanej funkcji nazywamy **krzywą logistyczną**. Charakterystyczną cechą krzywej logistycznej jest punkt przecięcia odpowiadający wartości $p(t) = K/2$. Oznacza to, że po osiągnięciu stanu połowicznego nasycenia środowiska *tempo wzrostu zaczyna maleć*.



Rozważany model stosuje się także do przypadku, gdy poziom wyjściowy populacji przekracza naturalny poziom nasycenia. Może się tak zdarzyć, gdy w zamkniętym środowisku umieścimy nadmierną liczbę przedstawicieli pewnej populacji. W takim przypadku jej liczebność zmniejsza się do granicznego poziomu K , przy czym tempo tej zmiany jest coraz mniejsze. Obydwa przypadki ilustruje rysunek.

Analiza jakościowa zamiast rachunków

W poprzednim wykładzie wyprowadziliśmy jawny wzór na krzywą logistyczną. Jeżeli interesuje nas tylko ogólny charakter procesu, to dość dokładny kształt

krzywej logistycznej możemy otrzymać szybciej i prościej. Spójrzmy jeszcze raz na równanie logistyczne

$$p' = rp \left(1 - \frac{p}{K}\right).$$

Przy p rosnącym od zera do K mamy $p' > 0$, więc populacja rośnie. Ponadto

$$\begin{aligned} p'' &= \left[rp \left(1 - \frac{p}{K}\right) \right]' = rp' \left(1 - \frac{p}{K}\right) - rp \cdot \frac{p'}{K} = \\ &= rp' \left(1 - \frac{2p}{K}\right) = r^2 p \left(1 - \frac{p}{K}\right) \left(1 - \frac{2p}{K}\right). \end{aligned}$$

Wynika stąd, że na przedziale $(0, K)$ funkcja jest wypukła, gdy $p < K/2$, a wklęsła, gdy $p > K/2$. Punkt $p = K/2$ jest jedynym punktem przegięcia. Taka wiedza wystarczy w zupełności, by naszkicować krzywą logistyczną.

Zadania

5. Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$p' = kp, \quad p(t_0) = p_0.$$

6. W roku 1700 Europa liczyła około 120 milionów mieszkańców, a w roku 1800 około 180 milionów. Zapisz wzór na szacunkową liczbę mieszkańców w roku t , przyjmując czysty model maltuzjański. Porównaj otrzymane wyniki dla poniższych lat z podanymi niżej szacowaniami historyków: 1850 – 265 mln; 1900 – 390 mln; 1950 – 635 mln?¹

7. Pierre-François Verhulst zaproponował też inne równanie modelujące wzrost populacji:

$$p' = r \left(1 - \frac{p}{K}\right).$$

Rozwiąż je dla $r = 1$.

◇ ◇ ◇

8. Powtórz wyprowadzenie wzoru na rozwiązanie równania logistycznego dla $K = 1$, ale $p_0 > 1$.

9. Dla dodatniego $p_0 < 1$ rozwiązanie równania $p' = rp(1 - p)$ ma punkt przegięcia. Czy jest tak również dla $p_0 > 1$?

¹C. McEvedy, R. Jones, Atlas of world population, Penguins Books Ltd 1979

1.4 Chaos, bifurkacja i pogoda

Chaos i bifurkacja - Prognozowanie pogody - Zadania

Jeszcze Laplace na przełomie XVIII i XIX w. był przekonany, że gdyby znać położenia wszystkich ciał niebieskich w ustalonym momencie, to można by dokładnie przewidzieć dalszą historię Kosmosu. Dopiero niedawno, wraz z odkryciem chaosu zrozumiano, że nie jest to możliwe.

Nieprzewidywalne zachowania rozwiązań niektórych równań nieliniowych odkrył już ok. roku 1900 Henri Poincaré. Ale dopiero dzięki szybkim komputerom naukowcy zdobyli bogaty materiał poglądowy pozwalający na lepsze zrozumienie tego zjawiska. Równanie logistyczne daje znakomitą okazję, aby pokrótce wyjaśnić, na czym chaos polega. O zjawisku chaosu w kontekście równań *różniczkowych* wspomnimy w trzeciej części książki. Tu rozważymy przypadek dyskretny dla równania *różnicowego*.

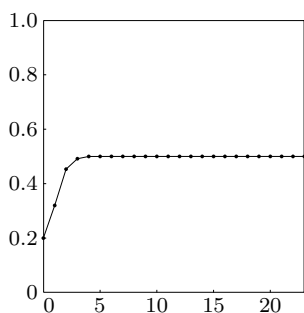
Chaos i bifurkacja

Rozważmy dyskretny odpowiednik równania logistycznego

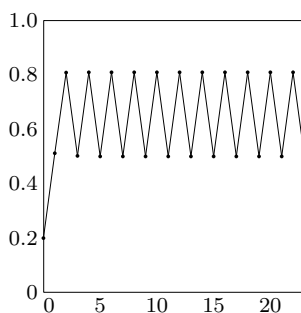
$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n).$$

Spójrzmy najpierw, co dzieje się, gdy proces zaczyna się od $x_0 = 0,2$. Dla większej czytelności wykresu kolejne punkty łączymy odcinkami.

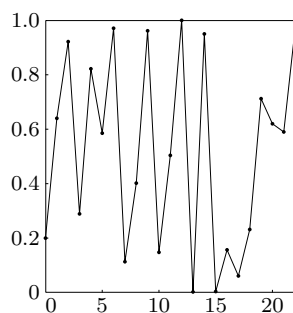
Charakter wykresu zależy od parametru A . Poniżej widzimy wykresy reprezentujące trzy typy takiego wykresu.



$$A = 2,$$



$$A = 1 + \sqrt{5},$$



$$A = 4.$$

Zauważmy, że w pierwszym przypadku wartości funkcji zbliżają się do granicznej wartości $1/2$. Z kolei, gdy $A = 1 + \sqrt{5}$, wartości funkcji oscylują zbliżając się na przemian do $0,50$ i do $0,81$. W takim przypadku mówimy o **bifurkacji**.

Przy $A = 4$ nie dostrzegamy żadnej wyraźnej prawidłowości. Zachowanie funkcji jest **chaotyczne**. Oczywiście nie możemy twierdzić, że wartości te układają się przypadkowo. Trudno mówić o przypadku, skoro rządzi nimi ściśle określony wzór. Aby podkreślić ten zdeterminowany charakter kolejnych wyników często używamy terminu **chaos deterministyczny**.

Ta pozorna przypadkowość to tylko jeden z aspektów chaosu. Jest też drugi aspekt. Nieznaczące zaburzenie warunków początkowych przy dwu pierwszych parametrach ma konsekwencje z trudem zauważalne. Ale przy $A = 4$ drobna zmiana tego parametru zmienia dalszy wykres radykalnie.

Tak więc najkrócej rzecz ujmując rozwiązanie równania różnicowego bądź różniczkowego ma charakter chaotyczny, jeżeli jego wykres odznacza się wyraźną nieregularnością, a zmiana parametrów początkowych powoduje zasadniczą zmianę rozwiązania.

Prognoza pogody

Ze zjawiskiem chaosu spotykamy się na co dzień przy prognozie pogody. Dawniej przypuszczano, że wraz z udoskonalaniem komputerów będzie można pogodę przewidywać w miarę dokładnie. Pamiętajmy jednak, że parametry pogodowe, na których opiera się prognoza są zawsze znane tylko w przybliżeniu. Skoro drobna różnica w danych początkowych może zasadniczo zmienić prognozę, każda prognoza wykraczająca poza najbliższy horyzont czasowy jest niepewna.

Zadania

10. Dla jakich wartości x_0 ciąg zadany rekurencyjnie wzorem $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ jest stały?

11. Dla jakich wartości początkowych x_0 ciąg $x_{n+1} = (1 + \sqrt{5})x_n(1 - x_n)$ przyjmuje tylko dwie wartości?

◇ ◇ ◇

12. Wykaż, że ciąg $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$ jest zbieżny dla dowolnego $x_0 \in (0, 1)$. Jaką ma granicę?

1.5 Malthus i Verhulst

Problemy demografii były przedmiotem zainteresowania matematyków i ekonomistów przynajmniej od połowy XVII w. Zajmowali się nimi m.in. Halley (ten od komety), Euler, d'Alembert i Daniel Bernoulli. Poniżej sylwetki dwu postaci, których nazwiska kojarzone są z najbardziej znanym modelem rozwoju populacji.

Thomas Robert Malthus (1766-1834), angielski ekonomista i demograf. W roku 1797 przyjął święcenia kapłańskie kościoła anglikańskiego. Rok później opublikował pierwszą broszurę, w której przedstawiał swoją teorię rozwoju społeczeństw. Ten pierwszy tekst znacząco poszerzył i modyfikował w kolejnych wydaniach. Od roku 1805 jest profesorem historii i ekonomii politycznej w koledżu w Hailebury. W roku 1819 został członkiem *Royal Society*.

Malthus twierdził, że liczba ludności rośnie w tempie geometrycznym, a rolnictwo rozwija się w tempie arytmetycznym. Ten wzrost geometryczny hamowany jest przez wojny, klęski nieurodzaży i zarazy. Uważał, że wszelka pomoc biedniejszym tylko zwiększa obszary biedy. Zarówno Darwin, jak i Wallace, przyznawali, że dzieło Malthusa wywarło wpływ na ich teorie ewolucji.

Pierre-François Verhulst (1804-1849), matematyk belgijski. W okresie nauki szkolnej jednym z jego przyjaciół był sławny później matematyk Joseph Plateau, a nauczycielem słynny statystyk Adolphe Quetelet. Ten ostatni wpłynął na zainteresowania Verhulstaproblemami demografii. Od niego pochodzi równanie logistyczne i sama nazwa tego równania.

Wkrótce po ukończeniu studiów w Gandawie Verhulst zapadł na zdrowiu, i w celach leczniczych udał się do Włoch. Podczas pobytu w Rzymie próbował przekonać hierarchów watykańskich do wprowadzenia w państwie kościelnym konstytucji. Pomysły te zostały przyjęte na tyle chłodno, że musiał Rzym opuścić. Gdy w roku 1830 Belgia stała się niepodległym państwem, Verhulst objął stanowisko korepetytora w świeżo utworzonej wówczas Akademii Wojskowej. Przez kilka lat łączył to stanowisko z profesurą na uniwersytecie. W roku 1841 został członkiem Belgijskiej Akademii Nauk, a w roku 1848 jej prezydentem.

Wykład 2

Istnienie i jednoznaczność*

Można przyjąć, że ważniejsze równania różniczkowe zwyczajne mają rozwiązania, a przy naturalnych warunkach początkowych ich rozwiązania są jednoznaczne. Dowody twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań bywają trudne.

Poniżej przedstawiamy dowód jednego z najprostszych twierdzeń tego rodzaju. Wykażemy, że przy odpowiednich założeniach o f zagadnienie początkowe

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. W tym celu pokażemy, jak zbudować ciąg rozwiązań przybliżonych i wykażemy, że jego granicą jest rozwiązanie dokładne. Oczywiście najpierw musimy wykazać, że wspomniana granica istnieje. Posłużymy nam do tego twierdzenie Banacha o odwzorowaniach zwężających.

Lektura tego wykładu wymaga znajomości podstaw topologii przestrzeni metrycznych.

2.1 Przybliżone rozwiązywanie równań algebraicznych

Przykład - Dlaczego to działa? - Zadania

Zanim przejdziemy do właściwego dowodu przedstawimy jego zasadniczą ideę pokazując analogiczny sposób przybliżonego rozwiązywania równań *algebraicznych*.

Przykład

Znajdziemy przybliżone dodatnie rozwiązanie równania $x^3 + x^2 = 3$. Równoważnie $x^2(x + 1) = 3$, czyli

$$x = \sqrt{\frac{3}{x+1}}.$$

Przybliżoną wartość rozwiązania znajdziemy składając wielokrotnie funkcję

$$f(x) = \sqrt{\frac{3}{x+1}}.$$

Przyjmijmy za pierwsze przybliżenie pewne x_0 , a kolejne

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \dots \text{ itd.}$$

Na przykład dla $x_0 = 1$, przyjmując dokładność czterech miejsc po przecinku, otrzymujemy

$$\begin{array}{llll} x_1 \approx 1,2247, & x_2 \approx 1,1612, & x_3 \approx 1,1782, & x_4 \approx 1,1736, \\ x_5 \approx 1,1748, & x_6 \approx 1,1745, & x_7 \approx 1,1746, & x_8 \approx 1,1746, \dots \end{array}$$

Ciąg ten stabilizuje się na $x \approx 1,1746$. Łatwo sprawdzić, że jest to przybliżona wartość jedyne dodatniego rozwiązania.

Dlaczego to działa?

Zastanówmy się, dlaczego tak jest. Przypuśćmy, że ciąg x_n ma granicę a . Wówczas, przy założeniu ciągłości f ciąg $f(x_n)$ ma granicę $f(a)$. Ale ten drugi ciąg to pierwszy przesunięty o jeden wyraz, a więc obie granice są równe. Skoro $f(a) = a$, to

$$\sqrt{\frac{3}{a+1}} = a, \quad \text{czyli} \quad a^3 + a^2 = 3.$$

Zauważmy, że mieliśmy tu sporo szczęścia. Wyjściowe równanie można też przekształcić do postaci $x = \sqrt{3 - x^3}$. Wówczas

$$f(x) = \sqrt{3 - x^3},$$

a analogicznie określony ciąg $x_1 \approx 1,4142$, $x_2 \approx 0,4143$, $x_3 \approx 1,7114$, $x_4 \approx 1,4186i$, $x_5 \approx 1,8995 + 0,7550i$ jest rozbieżny. Tak więc algorytm działa tylko pod warunkiem, że konstruowany ciąg jest zbieżny.

Podsumujmy: jeżeli f jest funkcją ciągłą, a ciąg $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots$ jest zbieżny, to jego granica spełnia równanie $x = f(x)$.

Zadania

1. Równanie $x^4 - x^2 - x - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste, w tym jeden dodatni. Dobierz funkcję f tak, aby ciąg $x_0 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$ był zbieżny do tego pierwiastka.

2. Niech

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad x_0 = 2.$$

- Znajdź pięć początkowych wyrazów.
- Uzasadnij, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.
- Zmodyfikuj ten ciąg tak, aby jego granicą był $\sqrt[3]{2}$.

◇ ◇ ◇

3. Aby rozwiązać równanie $x + \sqrt{x} = 3$ przekształcamy je do postaci $x = (3-x)^2$ i rozważamy ciąg x_0 , $x_{n+1} = (3-x_n)^2$.

- Sprawdź, że dla $x_0 = 4$ ciąg ten przyjmuje tylko dwie wartości.
- Jak zachowuje się ten ciąg dla $x = 4,00001$?
- Czy dla jakiejś wartości x_0 ciąg ten jest zbieżny?

2.2 Twierdzenie Banacha o odwzorowaniach zwężających

Odwzorowania zwężające - Twierdzenie Banacha (wersja podstawowa) - Wzmocnienie twierdzenia Banacha - Zadania

W dowodzie twierdzenia Picarda o istnieniu i jednoznaczności decydującym momentem jest wykazanie, że pewne przekształcenie f ma punkt stały, tzn. taki punkt a , dla którego $f(a) = a$. Istnienie żądanego punktu stałego jest prostym wnioskiem z twierdzenia Banacha o odwzorowaniach zwężających.

Odwzorowania zwężające

Przekształcenie $f : E \rightarrow E$ przestrzeni metrycznej w siebie nazywamy **odwzorowaniem zwężającym**, jeżeli istnieje stała $L < 1$ taka, że dla dowolnych $x, y \in E$ zachodzi nierówność

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y).$$

Przypomnijmy, iż ciąg a_n w przestrzeni metrycznej z metryką d nazywany ciągiem Cauchy'ego, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że

$$n, m > N \implies d(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

Innymi słowy jest to ciąg, w którym odległości pomiędzy dostatecznie dalekimi wyrazami są odpowiednio małe.

Przestrzeń metryczną w której dowolny ciąg Cauchy'ego jest zbieżny nazywamy **zupełną**. Dla nas — w dalszej części wykładu — istotne będzie tylko, że zupełną jest pewna przestrzeń funkcji ciągłych.

Twierdzenie Banacha (wersja podstawowa)

Zachodzi następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 2.1 (Banacha o odwzorowaniach zwężających)

Jeżeli f jest odwzorowaniem zwężającym zupełnej przestrzeni metrycznej E w siebie, to dla dowolnego $a \in E$ ciąg

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

jest zbieżny, a jego granica jest jedynym rozwiązaniem równania $f(x) = x$.

Z pełnym dowodem twierdzenia Czytelnik spotkał się zapewne — lub spotka — na kursie topologii lub analizy funkcjonalnej. Tu ograniczymy się tylko do nakreślenia głównej linii rozumowania.

Z założenia, iż f jest odwzorowaniem zwężającym wynika, że dla ustalonego N i $n \geq m \geq N$ mamy

$$d(x_n, x_m) \leq Ld(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq \dots \leq L^N d(x_{n-N}, x_{m-N}),$$

gdzie $L < 1$ jest stałą, o której mowa w definicji. Tak więc dostatecznie dalekie wyrazy ciągu x_n różnią się dowolnie mało. Z założenia E jest przestrzenią zupełną, więc ciąg ten jest zbieżny. Niech $a \in E$ będzie jego granicą.

Ponieważ funkcja f jest ciągła, więc ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(a)$. A skoro granice ciągów x_n oraz $f(x_n)$ są równe, to $f(a) = a$. Pozostaje kwestia jednoznaczności. Załóżmy, że a, b są dwoma różnymi rozwiązaniami tego równania, więc $a \neq b$ oraz $f(a) = a, f(b) = b$. Wówczas

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq Ld(a, b) < d(a, b),$$

więc $d(a, b) < d(a, b)$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Wzmocnienie twierdzenia Banacha

W dalszej części wykładu potrzebne okaże się twierdzenie mocniejsze. Pokażemy, że wystarczy — tu osłabiamy założenia, a więc wzmacniamy twierdzenie — iż odwzorowaniem zwężającym jest pewna potęga f , czyli przekształcenie postaci

$$x \rightarrow \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_N(x)$$

oznaczane dalej przez f^N .

Z twierdzenia Banacha wynika, że istnieje dokładnie jedno a takie, że $f^N(a) = a$. Oczywiście z ostatniej równości wynika, że $f^{N+1}(a) = f(a)$, zatem $f^N(f(a)) = f(a)$. Tak więc również $f(a)$ jest punktem stałym f^N . Skoro taki punkt jest tylko jeden, to $f(a) = a$. Zatem a jest punktem stałym przekształcenia f .

Pozostaje wykazać, że ciąg $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$ jest zbieżny do punktu a . Na mocy twierdzenia Banacha zbieżny do a jest ciąg $x_0, f^N(x_0) = x_N, f^{2N}(x_0) = x_{2N}, \dots$. Zatem także ciąg $x_1 = f(x_0), x_{N+1} = f(x_N), x_{2N+1} = f(x_{2N}), \dots$ dąży do $f(a) = a$. Podobnie jest dla ciągu $x_2, x_{N+2}, x_{2N+2}, \dots$ itd. Tak więc a jest wspólną granicą N ciągów

$$x_0, x_N, x_{2N}, \dots, \quad x_1, x_{N+1}, x_{2N+1}, \dots, \quad x_{N-1}, x_{2N-1}, x_{3N-1}, \dots,$$

a więc też granicą całego ciągu x_n .

Podsumujmy:

Twierdzenie 2.2 *Jeżeli pewna ustalona potęga przekształcenia f zupełnej przestrzeni metrycznej w siebie jest przekształceniem zwężającym, to f ma punkt stały, a dowolny ciąg postaci $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$ jest zbieżny do tego punktu.*

Zadania

4. Uzasadnij, że $f(x) = \sqrt{x}$ jest przekształceniem zwężającym na przedziale $[1, \infty]$. Czy prawdą jest, że jest nim także na półprostej $[0, \infty)$?



5. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sin x$ nie jest odwzorowaniem zwężającym na całej prostej. Pokaż, że jest ona odwzorowaniem zwężającym na niektórych przedziałach.

2.3 Metoda kolejnych przybliżeń i dowód twierdzenia Picarda

Wprowadzenie - Metoda kolejnych przybliżeń - Dowód twierdzenia Picarda - Końcowy wniosek - Zadania

Teraz możemy już udowodnić twierdzenie Picarda gwarantujące istnienie i jednoznaczność rozwiązań dla zagadnienia początkowego $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, o którym mowa była w wykładzie 1.

Za pomocą iteracji pewnego przekształcenia φ zbudujemy ciąg rozwiązań przybliżonych. Granica tego ciągu — punkt stały przekształcenia φ — okaże się szukanym rozwiązaniem. Nietrudno będzie uzasadnić, że jest to rozwiązanie jedyne.

Wprowadzenie

Widzieliśmy, że przybliżone rozwiązanie równania algebraicznego można otrzymać za pomocą iteracji odpowiednio dobranych przekształceń. Podobnie jest dla równań różniczkowych. Przedstawiona niżej metoda pochodzi od Picarda.

Przybliżone obliczanie całek jest łatwiejsze niż przybliżone obliczanie pochodnych. Dlatego zagadnienie początkowe

$$(*) \quad x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

przekształcimy w równoważne równanie całkowe

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du.$$

Rzeczywiście, jeżeli funkcja $x(t)$ spełnia powyższe równanie całkowe, to oczywiście jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego (*). Na odwrót, jeżeli $x'(t) = f(t, x(t))$, to

$$x(t) - x_0 = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t x'(u) du = \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du,$$

skąd

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du.$$

Metoda kolejnych przybliżeń

Wyjdźmy od funkcji stałej $x(t) = x_0$, a następnie powtarzamy poniższą operację:

$$x(t) \rightarrow x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du.$$

Oznaczmy przez $x_1(t)$, $x_2(t)$, \dots kolejne funkcje otrzymane w wyniku tej operacji. Przy dość naturalnych założeniach będą one coraz lepszymi przybliżeniami rozwiązania dokładnego, a funkcja będąca ich granicą — rozwiązaniem dokładnym.

Rozważmy bardzo prosty przykład $x' = x + 1$, $x(0) = 0$. Mamy tu $x_0(t) = 0$,

$$x_1(t) = \int_0^t (0 + 1) du = t,$$

$$x_2(t) = \int_0^t (u + 1) du = \frac{t^2}{2} + t,$$

$$x_3(t) = \int_0^t \left(u + \frac{u^2}{2} + 1\right) du = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + t.$$

Łatwo odgadnąć ogólną prawidłowość:

$$x_n(t) = \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!}.$$

Nietrudno też zauważyć, że granicą tego ciągu funkcji jest $x(t) = e^t - 1$. Łatwo sprawdzić, że w istocie funkcja $x(t)$ spełnia rozważane równanie.

W typowych sytuacjach metoda ta pozwala uzyskać jedynie aproksymację wielomianową szukanego rozwiązania.

Dowód twierdzenia Picarda

Zacniemy od twierdzenia ogólniejszego.

TWIERDZENIE 2.3 (Picarda)

Niech $f : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, przy czym istnieje stała L taka, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in [a, b]$ zachodzi nierówność

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

Wówczas zagadnienie początkowe $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ ma rozwiązanie i to tylko jedno.

Stałą L , o której mowa wyżej, nazywamy **stałą Lipschitza** funkcji f .

DOWÓD: Rozważać tu będziemy przestrzeń $C[a, b]$ — przestrzeń rzeczywistych funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$ z metryką zadaną wzorem

$$d(g, h) = \sup_{t \in [a, b]} |g(t) - h(t)|.$$

Dowodzi się, że jest to przestrzeń zupełna.

Dla uproszczenia dowód przeprowadzimy przy dodatkowym założeniu, że $t_0 = a$ (a wówczas $x(a) = x_0$), dzięki czemu redakcja dowodu będzie nieco prostsza. Określmy odwzorowanie $\varphi : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ wzorem

$$[\varphi(x)](t) = x_0 + \int_a^t f(u, x(u)) du.$$

Przypuśćmy, że odwzorowanie $x \rightarrow \varphi(x)$ ma punkt stały, tzn. istnieje funkcja $x(t)$ taka, że $\varphi(x) = x$. Oznacza to, że

$$x_0 + \int_a^t f(u, x(u)) du = x(t),$$

a więc funkcja $x(t)$ jest rozwiązaniem rozważanego równania całkowego.

Istnienie punktu stałego wynika z twierdzenia Banacha. Aby się o tym przekonać, wystarczy wykazać, że pewna potęga przekształcenia φ jest przekształceniem zwężającym.

Dla dowolnych funkcji $x(t)$, $y(t)$ mamy

$$\begin{aligned} & |[\varphi(x)](t) - [\varphi(y)](t)| = \\ & = \left| \left[x_0 + \int_a^t f(u, x(u)) du \right] - \left[x_0 + \int_a^t f(u, y(u)) du \right] \right| = \\ & = \left| \int_a^t (f(u, x(u)) - f(u, y(u))) du \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int_a^t |f(u, x(u)) - f(u, y(u))| du \leq L \int_a^t |x(u) - y(u)| du.$$

Z określenia metryki wynika, że wyrażenie pod całką jest równe co najwyżej odległości $d(x, y)$ funkcji $x(t)$ i $y(t)$, więc ostatnia całka jest mniejsza bądź równa $d(x, y)(t - a)$. Zatem

$$|[\varphi(x)](t) - [\varphi(y)](t)| \leq Ld(x, y)(t - a).$$

Podobnie, zastępując funkcje $x(u)$, $y(u)$ przez $\varphi(x)(u)$ i $\varphi(y)(u)$ otrzymujemy

$$\left| [\varphi^2(x)](t) - [\varphi^2(y)](t) \right| \leq \int_a^t L |[\varphi(x)](u) - [\varphi(y)](u)| du$$

Zatem

$$\begin{aligned} \left| [\varphi^2(x)](t) - [\varphi^2(y)](t) \right| &\leq \int_a^t L^2 d(x, y)(u - a) du = \\ &= L^2 d(x, y) \int_a^t (u - a) du = L^2 d(x, y) \cdot \frac{(t - a)^2}{2}. \end{aligned}$$

Postępując podobnie otrzymamy ogólną zależność

$$|[\varphi^n(x)](t) - [\varphi^n(y)](t)| \leq L^n d(x, y) \cdot \frac{(t - a)^n}{n!}.$$

Ponieważ silnia zbiega do nieskończoności szybciej niż funkcja wykładnicza, więc różnice te dążą do zera. Tak więc istnieją naturalne N oraz dodatnia stała $K < 1$ takie, że

$$\left| [\varphi^N(x)](t) - [\varphi^N(y)](t) \right| \leq Kd(x, y).$$

Wynika stąd, że funkcja $x \rightarrow \varphi^N(x)$ jest odwzorowaniem zwięzającym. Zgodnie z twierdzeniem 4.2 odwzorowanie to ma tylko jeden punkt stały. Oznacza to, że istnieje dokładnie jedna funkcja $x(t)$ taka, że

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(u, x(u)) du.$$

Końcowy wniosek

W zastosowaniach rzadko korzystamy bezpośrednio z warunku Lipschitza. Łatwiej korzystać z pochodnej. Dlatego w twierdzeniu 1.2 mowa była o pochodnej. Przypomnijmy, że w jego założeniach mowa o ograniczoności pochodnej cząstkowej f_x .

Weźmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$. Przy ustalonym t funkcja $f(t, u)$ jest funkcją jednej zmiennej u . Zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a o wartości średniej istnieje c_t takie, że

$$\frac{f(t, x) - f(t, y)}{x - y} = f_x(t, c_t).$$

Zatem

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |f_x(t, c_t)| \cdot |x - y|.$$

Z założenia pochodna f_x jest ograniczona. Niech L będzie jakimkolwiek jej ograniczeniem. Wówczas

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|,$$

a więc funkcja f spełnia warunek Lipschitza.

Zadania

6. Korzystając z metody Picarda rozwiąż zagadnienie początkowe $x' = x + 1$, $x(0) = 0$. Wsk.: Znajdź kilka początkowych iteracji i odgadnij wynik.

2.4 Banach

Polska matematyka odgrywała w rozwoju teorii równań różniczkowych rolę stosunkowo skromną. Poza Hoene-Wrońskim, którego nazwisko pojawi się już w najbliższym wykładzie, ważne wyniki uzyskali m.in. Kazimierz Żorawski i Juliusz Schauder. Banach nie zajmował się równaniami różniczkowymi, ale nowoczesne metody, których był współtwórcą przeniknęły do wielu dziedzin współczesnej matematyki, w tym do teorii równań różniczkowych.

Stefan Banach (1892-1845), bezsprzecznie największy matematyk polski i jeden z najwybitniejszych matematyków w dziejach matematyki światowej. W zasadzie samouk, jego wykształcenie formalne to dwa lata studiów na Politechnice Lwowskiej, przerwane wybuchem wojny. W roku 1916 odkrywa go na krakowskich plantach Hugo Steinhaus, słysząc słowa *calka Lebesgue'a*. Wkrótce Banach ze Steinhausem napisali wspólną pracę, która zapoczątkowała ich długoletnią współpracę.

Niedługo po zakończeniu wojny otrzymuje dzięki Steinhausowi posadę asystenta na Politechnice Lwowskiej. W roku 1920 otrzymuje doktorat (bez studiów) za pracę o operatorach liniowych — pracę którą uważa się za symboliczny moment narodzin analizy funkcjonalnej. Pojawiają się w niej przestrzenie, zwane dziś *przestrzeniami Banacha*. Przekład rozszerzonej wersji tej pracy stanie się pierwszym tomem wysoko cenionej na świecie serii *Monografie Matematyczne*.

Od roku 1922 jest profesorem Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie. Intensywną pracę naukową prowadzi głównie w *Kawiarni Szkockiej*, gdzie przy stoliku Banacha pracują też Mazur, Ulam, Orlicz i inni. Pojawiające się przy okazji problemy zapisywane były z zeszytów, znanym na świecie jako *Księga Szkocka*. W okresie wojny Banach przebywał we Lwowie. Podczas okupacji radzieckiej pracował na uniwersytecie, podczas okupacji niemieckiej — w Instytucie Weigla jako karmiciel wszy. Zmarł w sierpniu 1945. Na krótko przed śmiercią, w lipca 1945 został powołany na katedrę matematyki na Uniwersytecie Jagiellońskim; nie jest jasne, czy zdążył się o tym dowiedzieć.

Chociaż nazwisko Banacha kojarzy się przede wszystkim z analizą funkcjonalną, jego dorobek zawiera też klasyczne wyniki z innych dziedzin. Zapewne najbardziej znanym jest tzw. paradoks Banacha-Tarskiego. Mówi on, że kulę można podzielić na skończoną liczbę części, z których po odpowiednich przesunięciach i obrotach powstaną dwie kule, tej samej wielkości co wyjściowa.

II

Równania II rzędu i układy drgające

Historia mówi, że badanie ruchu drgającego podjęte zostało w celu ulepszenia pomiaru czasu. Podstawą pomiaru czasu jest oczywiście ruch Ziemi dookoła Słońca, ale ten naturalny zegar nie jest szczególnie przydatny w życiu codziennym człowieka. Przy wyznaczaniu długości geograficznej trzeba było bardzo dokładnie mierzyć małe odstępstwa czasu i dlatego uczeni XVII wieku musieli szukać bardziej dokładnych zegarów. Poszukiwania uwieńczone zostały sukcesem, przy czym sukcesy okazały się co najmniej tak cenne dla rozwoju matematyki i badań takich zjawisk Natury jak światło i dźwięk, jak dla samego pomiaru czasu.

Morris Kline, *Matematyka a świat fizyczny*,
PWN 1964, tłum. Antoni Sobotka

Jak już wspomnieliśmy we wstępie równanie

$$x'' + kx = 0$$

jest jednym z dwu najważniejszych równań różniczkowych, przynajmniej póki mowa o równaniach różniczkowych zwyczajnych. Warianty tego równania pełnią fundamentalną rolę w mechanice, kosmologii i nauce o elektryczności. Ale tylko nieliczne równania II rzędu — przede wszystkim równania liniowe o stałych współczynnikach — mają rozwiązania wyrażające się za pomocą kombinacji znanych funkcji. Równaniom tym i ich zastosowaniom poświęcamy wykłady 6. i 7. W kolejnym wykładzie pokazujemy, jak rozwiązać niektóre trudniejsze równania za pomocą szeregów potęgowych. Kończymy jednym z najstarszych i najslawniejszych zastosowań analizy: wyprowadzeniem praw Keplera z prawa powszechnego ciążenia.