Markowe Wykłady z Matematyki

Markowe Wykłady z Matematyki

geometria

Marek Zakrzewski

GiS

Marek Zakrzewski
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marek.zakrzewski@pwr.edu.pl

Projekt okładki
Andrzej Krupa

Skład komputerowy książki w systemie LaTeX wykonał autor.
Rysunki wykonał Marian Gewert.

ISBN 978–83–62780–62–4

Wydanie I, Wrocław 2018
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c.
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS sp. z o.o., A. Bieroński, P. Bieroński, s.j.

Gdy miałem 11 lat zacząłem [studiować] Euklidesa. Było to jedno z najważniejszych wydarzeń w moim życiu, równie porażające jak pierwsza miłość. Nie wyobrażałem sobie, że jest na świecie coś równie cudownego.

Bertrand Russell, cyt. wg John Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer Verlag 2002

Precz z Euklidesem!

Jean Dieudonné, 1969, cyt. wg *Le séminaire du Royaumont 1959-1979*, MATH ECOLE 1979/XI

.

Spis treści

Wstęp

Niechaj nie wchodzi tu nikt, kto nie zna geometrii.

Według tradycji napis u wejścia do Akademii Platońskiej

Niniejsza książka przedstawia propozycję jednosemestralnego kursu geometrii, uzupełnionego o kilka wykładów geometrii algebraicznej. Powinna być dostępna dla studentów II roku matematyki i kierunków pokrewnych. W zasadzie korzystam tu wyłącznie z podstawowego kursu analizy i geometrii analitycznej (z iloczynem wektorowym włącznie), pojęcia grupy i podstaw algebry liniowej.

Miejsce geometrii w wykształceniu matematyka

Współczesny, przeciętnie wykształcony matematyk miałby spore kłopoty z wejściem do Akademii Platońskiej, gdyż geometria rzadko kiedy jest jego mocną stroną. Oczywiście zna sporo analizy i algebry liniowej, zna podstawy teorii mnogości (ok. 1870-1920), topologii (lata międzywojenne), ale w zakresie geometrii zatrzymał się na geometrii analitycznej (w. XVII), a z późniejszych rzeczy zna działania na wektorach. Z tajemniczych powodów został pozbawiony wszelkiego kontaktu z nowszą geometrią.

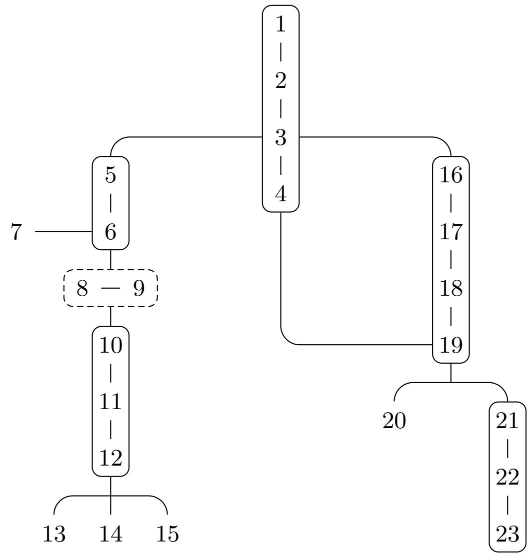
Gdy chodzi o *najnowszą* geometrię można to tłumaczyć jej trudnością. Poważny wykład wykorzystuje geometrię różniczkową, algebrę abstrakcyjną i kilka innych zaawansowanych dyscyplin w istotny sposób. Ale znaczna część geometrii XIX w. tak ostrych wymagań nie stawia.

Zamiast kapitulować przed trudnościami przyjąłem założenie, że nawet dość okrojona geometria dostarcza doskonałej motywacji dla wykładów z algebry abstrakcyjnej, geometrii różniczkowej, topologii i zapewne wielu innych dziedzin. A przede wszystkim jest fascynująca!

Strategie lektury

Zamierzałem napisać książkę o objętości ok. 180 stron, odpowiadającą jednosemestralnemu wykładowi, a przez swą niewielką objętość zachęcającą do lektury. Niestety geometria okazała się zbyt ciekawa. Przedstawiony materiał trudno zmieścić w całości ramach jednosemestralnego kursu dla młodszych studentów.

Na szczęście ogólną orientację w całości tematyki można zdobyć już po lekturze części wykładów. Poniższy schemat pokazuje podstawowe bloki każdej z pięciu części. Połączone wykłady 8-9 mają bardzo skromny wpływ na dalsze wykłady, przy szybkim studiowaniu książki można przejrzeć je pobieżnie.



Chcąc dojść relatywnie daleko, ograniczyłem się do geometrii płaszczyzny, nie dotykając wyższych wymiarów. Porównujemy cztery klasyczne geometrie: euklidesową, sferyczną, hiperboliczną i rzutową. W trzech pierwszych przyglądamy się prostym, okręgom i trójkątom, porównujemy podobieństwa i różnice. Porównujemy też parkietaże.

W geometrii euklidesowej i rzutowej przyglądamy się również krzywym stożkowym. Poznajemy klasyczne twierdzenia Pappusa, Desarguesa i Pascala. W końcowej części oprócz krzywych stożkowych (drugiego stopnia) pojawiają się krzywe trzeciego stopnia. Dzięki zastosowaniu metod geometrii rzutowej wyjaśnia się, dlaczego krzywe eliptyczne — z pozoru bardzo specjalne krzywe o równaniu $y^2 = x^3 + ax + b$ — niemal całkowicie zdominowały badania nad krzywymi sześciennymi.

Poziom trudności zadań

Przy braku poważnej tradycji nauczania geometrii przyjąłem, że należy zminimalizować zbędne trudności. Dlatego większa część zadań to dość proste (czasem może zbyt proste!) ćwiczenia pozwalające Czytelnikowi kontrolować, na ile rozumie tekst i poziom opanowania podstawowych technik. Zadania pojęciowe też są zazwyczaj umiarkowanej trudności.

W książce prawie nie ma zadań rachunkowych, a w konsekwencji nie ma tu typowych przykładów - wzorców. Takie przykłady pełnią oczywistą rolę w kursach analizy czy geometrii analitycznej, gdzie opanowanie standardowych technik rachunkowych jest ważnym elementem wykształcenia. Tu istotne jest raczej zrozumienie pojęć, sensu twierdzeń i związków pomiędzy nimi. Zrozumienie nietypowych geometrii tylko w niewielkim stopniu zależy od ćwiczeń rachunkowych.

Dowody, czyli wyjaśnienia

Większości istotnych twierdzeń towarzyszą dowody albo przynajmniej szkice dowodów. Z ważniejszych twierdzeń chyba tylko twierdzenie Bézouta przyjęte jest bez żadnego uzasadnienia. Na szczęście ma ono taki charakter, że jego prawdziwość nie budzi zdziwienia.

W niektórych rozumowaniach mogą pojawić się — czasem zamierzone — nieścisłości. Ważniejsze było dla mnie wyjaśnienie, *dlaczego* coś jest prawdziwe niż troska o formalną nieskazitelność dowodu.

Biogramy i uwagi historyczne

Podobnie, jak w poprzednich tomach cyklu książka zawiera krótkie biogramy. Starałem się umieścić krótkie notki o ważniejszych, symbolicznych dla geometrii postaciach, nawet jeżeli miały one swe biogramy we wcześniejszych tomach. Warto odnotować, że w geometrii pojawia się wiele postaci, których nie ma okazji poznać na innych wykładach.

W notkach będzie też mowa o uczonych i artystach z pogranicza matematyki (np. Merkator, Escher). Ich obecność przypomina, że geometria nie jest wyłącznie abstrakcyjną nauką; jest istotną częścią życia.

Uwagi dla Wykładowcy

Z książki można wykroić dwa zasadniczo różne kursy 15-tygodniowe.

Jedna z możliwości to dać przegląd czterech klasycznych geometrii: euklidesowej, sferycznej, hiperbolicznej i rzutowej. Można to zrobić np. na podstawie wykładów 1 - 6, 10 - 13 i 16 - 20.

Jednak poważną pokusę może stanowić krótkie wprowadzenie do geometrii algebraicznej. Przy takim ustawieniu priorytetów trzeba częściowo pominąć geometrię sferyczną i hiperboliczną. Realistyczny kurs mógłby składać się np. z wykładów 1 - 5, 10 - 12, 16 - 19 oraz 21 - 23.

Zauważmy jeszcze, że kurs (a także lekturę) można skrócić, pobieżniej traktując pierwsze cztery wykłady, w których spora część materiału jest jedynie przypomnieniem rzeczy przynajmniej po części znanych.

♢ ♢ ♢

Kończąc szósty tom serii chciałbym gorąco podziękować moim Kolegom i Wydawcom za wysiłek włożony w pracę nad książką: doc. dr Zbigniewowi Skoczylasowi za wnikliwą lekturę tekstu i szereg uwag redakcyjnych, a dr. Marianowi Gewertowi za *ogromną* pracę włożoną w wykonanie około 170 rysunków. Dziękuję też mojej żonie Danusi za przygotowanie wstępnych, ołówkowych szkiców znacznej ich części.

Wykład 5

Geometria sfery

Obliczając pola niewielkich obszarów korzystamy z wzorów geometrii euklidesowej, a nie geometrii sferycznej, mimo to otrzymane wyniki są wystarczająco dokładne. Jest tak dlatego, że na niewielkim obszarze powierzchnia małego wycinka kuli o odpowiednio dużym promieniu jest praktycznie nieodróżnialna od płaszczyzny.

W pewnym sensie geometria euklidesowa jest tylko przybliżeniem „prawdziwej" geometrii opisującej nasz świat — geometrii sferycznej.

5.1 Proste i okręgi na sferze

Okręgi wielkie i punkty antypodyczne - Odległość - Proste - Okrąg i koło - Obwód okręgu i pole koła - Zadania

W rozważaniach dotyczących sfery będziemy często nawiązywać do terminologii geograficznej, gdyż powierzchnia Ziemi jest naturalnym modelem takiej geometrii.

Okręgi wielkie i punkty antypodyczne

Okręgiem wielkim nazywać będziemy okrąg wycinany ze sfery płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli. Okręgiem wielkim jest równik, a także wszystkie południki.

Parę punktów sfery nazywamy **antypodycznymi**, jeżeli odcinek je łączący przechodzi przez środek sfery. Przykładem takiej pary są bieguny.

Odległość

Odległość punktów na sferze można zdefiniować na dwa sposoby: jako odległość euklidesową albo jako odległość wewnętrzną.

Odległość euklidesowa punktów sfery to ich odległość w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wadą takiego określenia jest to, że odwołuje się do innej przestrzeni niż sama sfera. Ma też mniejsze zastosowania: gdy mówimy o odległości pomiędzy Wrocławiem i Rzymem nie myślimy o długości tunelu, jaki należałoby przekopać, aby połączyć te miasta, ale o długości drogi, jaką musimy pokonać po powierzchni Ziemi.

Odległością wewnętrzną punktów A, B sfery nazywamy długość najkrótszej linii łączącej te punkty, zawartej w sferze. Dowodzi się, że linią taką jest łuk okręgu wielkiego. W dalszych rozważaniach przez odległość punktów sfery rozumiemy odległość wewnętrzną, zwaną też **sferyczną**.

Przyjmujemy, że punkty sfery reprezentowane są przez wektory zaczepione w początku układu, przy czym $A = a$, $B = b$ itd.

TWIERDZENIE 5.1 *Na sferze jednostkowej odległość sferyczna pomiędzy punktem A a punktem B jest równa*

$$\arccos(a \circ b).$$

DOWÓD: Niech γ będzie kątem pomiędzy wektorami a i b. Z definicji iloczynu skalarnego

$$a \circ b = ||a|| \cdot ||b|| \cos\gamma = \cos\gamma.$$

Zatem $\gamma = \arccos(a \circ b)$. Pozostaje zauważyć, że na sferze jednostkowej długość łuku jest równa mierze kąta.

Proste

Ponieważ sfera nie zawiera żadnej prostej, więc jasne jest, że rolę prostych odgrywają tu inne linie. Na płaszczyźnie najkrótszą krzywą łączącą dwa punkty jest odcinek prostej. Wiemy już, że na sferze analogiczną własność ma łuk okręgu wielkiego. Dlatego też za proste na sferze przyjmujemy okręgi wielkie.

Odnotujmy dwie podstawowe własności tych „ prostych”.

1. Przez dowolne dwa punkty nieantypodyczne przechodzi jedna prosta, przez punkty antypodyczne nieskończenie wiele prostych.

2. Każde dwie proste przecinają się w dwu punktach. W szczególności, na sferze nie ma prostych równoległych.

Okrąg i koło

Okręgiem sferycznym o środku O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów sfery, których odległość sferyczna od punktu O jest równa r. Łatwo uzasadnić, że okrąg sferyczny jest okręgiem euklidesowym. Podobnie, każdy okrąg euklidesowy zawarty w sferze jest też okręgiem sferycznym. Zauważmy jednak, że środek okręgu sferycznego nie leży w jego płaszczyźnie.

Kołem sferycznym nazywać będziemy zbiór punktów odległych od O co najwyżej o r.

Obwód okręgu i pole koła

Wzory na obwód okręgu sferycznego i pole koła sferycznego są podobne do wzorów euklidesowych. Wyprowadzimy je dla sfery o promieniu R, aby ułatwić porównanie wzorów z ich euklidesowymi odpowiednikami.

TWIERDZENIE 5.2 *Na sferze o promieniu R obwód okręgu o promieniu sferycznym r wyraża się wzorem*

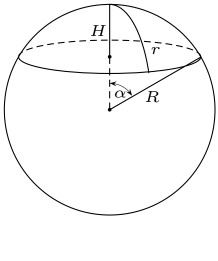
$$L(r) = 2\pi R \sin \frac{r}{R},$$

a pole koła o takim promieniu wzorem

$$P(r) = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{r}{2R}.$$

DOWÓD: Kąt α odpowiadający okręgowi o promieniu sferycznym r spełnia proporcję

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{r}{2\pi R}, \qquad \text{skąd} \qquad \alpha = \frac{r}{R}.$$



Promień euklidesowy takiego okręgu wynosi $R \sin \alpha$, a więc obwód

$$L(r) = 2\pi R \sin \alpha = 2\pi R \sin \frac{r}{R}.$$

Aby obliczyć pole przypomnijmy, że zgodnie z twierdzeniem Archimedesa pole czaszy o wysokości H w kuli o promieniu R wyraża sie wzorem $2\pi RH$. Zależność tę uzyskujemy metodami elementarnej analizy. Zauważmy, że

$$H = R - R\cos\alpha = R(1-\cos\alpha) = R\left(1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Zatem pole koła o promieniu sferycznym r jest równe

$$P(r) = 2\pi R \cdot 2R\sin^2\frac{\alpha}{2} = 4\pi R^2\sin^2\frac{r}{2R}.$$

Dla r małych w stosunku do R wzory te w przybliżeniu zgadzają się z analogicznymi wzorami geometrii euklidesowej (p. zad. 2).

Zadania

1. Jak wygląda wzór na odległość sferyczną na sferze o promieniu R?

2. Wykaż, że

$$\lim_{r\to 0+}\frac{L(r)}{2\pi r} = 1,$$

czyli dla małych r wzory na obwód okręgu sferycznego i euklidesowego są asymptotycznie równe. Pokaż, że podobnie jest dla wzorów na pole.

3. Pokaż, że środek okręgu sferycznego, ani jego promień na ogół nie są wyznaczone jednoznacznie. Czy istnieją okręgi mające jednoznacznie określony środek? A promień?

4. Dwa różne okręgi na płaszczyźnie mają co najwyżej dwa punkty wspólne. Czy podobnie jest na sferze?

5. Znajdź współrzędne punktu antypodycznego względem punktu o szerokości geograficznej północnej 51° i długości geograficznej 17°.

◊ ◊ ◊

6. Wykaż, że na sferze jednostkowej wektor wodzący punktu o szerokości geograficznej φ i długości geograficznej λ jest równy

$$(\cos\lambda\cos\varphi, \sin\lambda\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Wywnioskuj stąd, że na sferze o promieniu R odległość sferyczna pomiędzy punktami A, B wyraża się wzorem

$$d = R\arccos\left[\cos\varphi_A\cos\varphi_B\cos(\lambda_B-\lambda_A) + \sin\varphi_A\sin\varphi_B\right].$$

Przyjmujemy, że szerokości geograficzne na półkuli południowej i długości geograficzne na półkuli zachodniej brane są ze znakiem minus.

5.2 Kąty, trójkąty i twierdzenie Pitagorasa

Wielokąty wypukłe na sferze - Kąty sferyczne i prostopadłość - Twierdzenie Pitagorasa - Zadania

Zajmiemy się teraz wielokątami sferycznymi. W tej części geometria sferyczna wciąż tylko nieznacznie różni się od geometrii płaszczyzny euklidesowej.

Wielokąty wypukłe na sferze

Wielokąt wypukły na płaszczyźnie euklidesowej można zdefiniować jako część wspólną skończonej liczby półpłaszczyzn. Analogicznie definiujemy wielokąty sferyczne.

Półsferą — czyli „półpłaszczyzną sferyczną" — nazywamy obszar sfery leżący po jednej stronie okręgu wielkiego, wraz z ograniczającym go okręgiem. **Wypukłym wielokątem sferycznym** nazywamy część wspólną skończonej liczby półsfer. Część wspólna n różnych półsfer jest n-kątem.

To, że dwie proste sferyczne przecinają się w dwu punktach powoduje, że na sferze istnieją wielokąty o dwu bokach, czyli **dwukąty**. Dwa okręgi wielkie (np. południki) dzielą sferę na cztery dwukąty.

Kąty sferyczne i prostopadłość

Niech P będzie punktem przecięcia dwu okręgów wielkich. Rozważmy styczne w punkcie P do obu okręgów. Za miarę kąta pomiędzy prostymi sferycznymi przyjmujemy miarę kąta pomiędzy tymi stycznymi.

Równik przecina każdy z południków pod kątem prostym. Przez dany punkt prostej sferycznej może przechodzić więcej niż jedna do niej prostopadła. Przykładem są okręgi wielkie, które w biegunach przecinają się pod kątem prostym.

Twierdzenie Pitagorasa

Sferycznym odpowiednikiem twierdzenia Pitagorasa jest poniższe:

Twierdzenie 5.3 *Niech a, b, c będą bokami trójkąta sferycznego, α, β, γ kątami leżącymi na przeciw odpowiednich boków, przy czym $\gamma = \pi/2$. Wówczas*

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Dowód: Odpowiednio przesuwając trójkąt możemy przyjąć, że wierzchołkiem $C = c$ jest biegun północny, a dwa pozostałe leżą jeden w płaszczyźnie Oxz, a drugi w Oyz. Wówczas

$$c = [0, 0, 1], \qquad a = [\cos\alpha, 0, \sin\alpha], \qquad b = [0, \cos\beta, \sin\beta].$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzi równość

$$a \circ b = (a \circ c) \cdot (b \circ c),$$

czyli

$$\cos\left(\arccos(a \circ b)\right) = \cos\left(\arccos(a \circ c)\right) \cdot \cos\left(\arccos(b \circ c)\right).$$

Z twierdzenia 5.1wiemy, że $\arccos(a \circ b)$ to długość łuku AB, czyli c. Podobnie odpowiednie wyrażenia po prawej stronie, to długości b, c. Zatem

$$\cos c = \cos b \cos a.$$

Spójrzmy, jak sferyczne twierdzenie Pitagorasa wiąże się klasycznym dla płaszczyzny. Załóżmy, że trójkąt jest bardzo mały (a więc zawierający go obszar sfery jest niemal płaski). Wówczas

$$\cos c \approx 1 - \frac{c^2}{2}, \qquad \cos b \approx 1 - \frac{b^2}{2}, \qquad \cos a \approx 1 - \frac{a^2}{2}.$$

Dla małych a, b, c powyższa równość prowadzi do aproksymacji

$$1 - \frac{c^2}{2} \approx 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4} \approx 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2},$$

skąd $c^2 \approx a^2 + b^2$, przy czym w granicy otrzymujemy równość.

Zadania

7. Czy obszar sfery ograniczony dwoma południkami i równoleżnikiem jest trójkątem sferycznym?

8. Czy na płaszczyźnie euklidesowej istnieją trzy proste parami prostopadłe? Pokaż, że proste takie istnieją na sferze.

9. Na sferze istnieje prostokątny trójkąt równoboczny. Jakie długości mają boki takiego trójkąta na sferze jednostkowej?

♢ ♢ ♢

10. Czy sferyczne trójkąty równoboczne są przystające?

5.3 Twierdzenie Girarda-Harriota i pola wielokątów

Pole trójkąta - Przystawanie a podobieństwo trójkątów - Pole i eksces wielokąta - Zadania

Na poziomie lokalnym — gdy analizujemy mały obszar sfery — wzory geometrii sferycznej w przybliżeniu zgadzają się z analogicznymi wzorami geometrii euklidesowej. Ale jest rzeczą oczywistą, że globalnie — gdy patrzymy na całą sferę — jest ona zasadniczo inna niż płaszczyzna. Twierdzenie Girarda-Harriota i jego konsekwencje dobitnie te różnice obrazują.

Pole trójkąta

Twierdzenie Girarda-Harriota jest zapewne najważniejszym twierdzeniem geometrii sferycznej. Zacznijmy od lematu.

LEMAT 5.1 *Na sferze jednostkowej pole dwukąta sferycznego o kącie α jest równe 2α.*

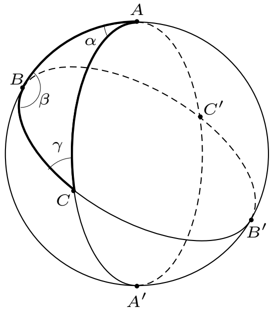
DOWÓD: Intuicyjnie jest oczywiste, że pole dwukąta jest proporcjonalne do miary jego kąta wewnętrznego α. Można to też wykazać metodami rachunku całkowego.

Ponieważ kąt półpełny ma miarę π, a odpowiadający mu dwukąt ma pole 2π, więc współczynnik proporcjonalnosci jest równy 2, zatem pole takiego dwukąta jest równe 2α.

TWIERDZENIE 5.4 (Girarda-Harriota)
Na sferze jednostkowej pole P trójkąta sferycznego o kątach α, β, γ jest równe

$$P = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

DOWÓD: Rozważmy trójkąt sferyczny ABC o kątach α, β i γ i polu P. Niech A', B' i C' będą punktami antypodycznymi względem A, B i C.



Zauważmy, że półsfera ograniczona okręgiem $ABA'B'$ i zawierająca punkt C jest sumą czterech trójkątów ABC, BCA', $A'CB'$ oraz $B'CA$ o polach odpowiednio

$$P, \qquad 2\alpha - P, \qquad 2\beta - P, \qquad 2\gamma - P.$$

Skoro te cztery obszary dają w sumie półsferę, to

$$P + (2\alpha - P) + (2\beta - P) + (2\gamma - P) = 2\pi.$$

Stąd po oczywistych przekształceniach $P = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Przystawanie a podobieństwo trójkątów

Pojęcie przystawania definiowane jest tak, jak dla płaszczyzny — za pomocą izometrii. Izometriom sfery przyjrzymy się w wykładzie 7., ale już teraz powinno być jasne, że są nimi obroty wokół osi sfery, a także symetrie lustrzane względem płaszczyzny równika i innych płaszczyzn przechodzących przez środek sfery. Tak więc trójkątów przystających nie brakuje.

Pojęcia podobieństwa dla sfery definiować nie będziemy. Nasze euklidesowe nawyki podpowiadają, że trójkąty o kątach parami odpowiednio równych są podobne. Przy takim intuicyjnym rozumieniu podobieństwa możemy poczynić ciekawą obserwację: podobne trójkąty sferyczne są przystające.

Istotnie, trójkąty o takich samych kątach mają równe pola, a więc współczynnik podobieństwa jest równy 1. Są zatem przystające.

Pole i eksces wielokąta sferycznego

Suma kątów w trójkącie euklidesowym jest równa π. Widzimy zatem, że pole trójkąta sferycznego jest równe sumie miar jego kątów pomniejszonej o sumę miar kątów w trójkącie euklidesowym. Ta różnica pomiędzy sumą kątów w wielokącie sferycznym a sumą kątów w odpowiednim wielokącie euklidesowym nazywana jest ekscesem albo nadmiarem trójkąta. Zgodnie z twierdzeniem Girarda-Harriota pole trójkąta sferycznego na sferze jednostkowej jest równe jego nadmiarowi.

Ogólnie, **ekscesem wielokąta sferycznego** o n bokach (albo jego **nadmiarem**) nazywamy liczbę

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) - (n-2)\pi,$$

czyli różnicę pomiędzy sumą jego kątów a sumą kątów w odpowiednim wielokącie euklidesowym. Zachodzi wynik ogólniejszy.

Twierdzenie 5.5 *Pole dowolnego wielokąta sferycznego na sferze jednostkowej jest równe jego ekscesowi.*

Prosty dowód indukcyjny pozostawiamy jako ćwiczenie. W dowodzie możesz skorzystać z tego, że wypukły wielokąt sferyczny mający przynajmniej cztery boki można podzielić na dwa, z których każdy ma mniej boków niż wyjściowy.

Zadania

11. Nie korzystając z twierdzenia Girarda-Harriota oblicz pole trójkąta o trzech kątach prostych.

12. Uzasadnij, że każdy czworokąt sferyczny ma kąt rozwarty.

13. Udowodnij twierdzenie 5.5.

◇ ◇ ◇

14. Łącząc odcinkami środki boków trójkąta równobocznego na płaszczyźnie dzielimy ten trójkąt na cztery trójkąty przystające. Czy podobnie jest na sferze?

5.4 Harriot i Girard

Do końca XVIII w. matematycy utrzymywali się z wykonywania praktycznych prac (budownictwo, kartografia, astrologia) albo rzadziej — dzięki opiece bogatego mecenasa. Próba utrzymywania się wyłącznie z pracy naukowej (w tym przekłady i redagowanie dzieł innych autorów) rzadko zapewniała godziwe życie. Oto przykłady dwu bardzo odmiennych karier z przełomu XVI i XVII w.

Thomas Harriot (1560-1621), matematyk i astronom angielski. Po studiach w Oksfordzie, wstąpił w służbę sir Waltera Raleigha, w charakterze kartografa i nawigatora. Wysłany do Wirginii poznał życie, język i obyczaje tamtejszych Indian, jak też topografię terenu. Po powrocie do Anglii zajmował się też astronomią i optyką. Po aresztowaniu jego protektora (wielka polityka rzadko jest bezpieczna) sam także spędził pół roku w więzieniu. W matematyce zajmował się głównie algebrą, której dotyczy jedyny jego traktat matematyczny, opublikowany zresztą pośmiertnie.

Albert Girard (1595-1632), matematyk francuski, ur. prawdopodobnie w Lotaryngii, jako protestant przeniósł się do Niderlandów, kraju znacznie bardziej tolerancyjnego. Wiadomo, że przez jakiś czas był inżynierem w służbie księcia. Ale większą część życia spędził w biedzie, zajmując się głównie matematyką i mało poświęcając uwagi jedenaściorgu dzieciom. Jest jednym z pierwszych matematyków, którzy przy liczeniu pierwiastków równania uwzględniali zespolone, co pozwoliło mu odkryć zasadnicze twierdzenie algebry. Uogólnił też na równania wyższych stopni znane wzory Viète'a.

Wykład 6

Parkietaże i twierdzenie Eulera

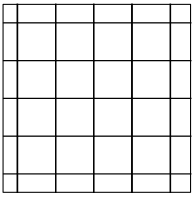
Ponieważ mały wycinek sfery jest niemal płaski, więc lokalne własności obu geometrii: euklidesowej i sferycznej muszą być w przybliżeniu podobne. Widzieliśmy to na przykładzie wzorów na obwód okręgu i pole koła czy twierdzenia Pitagorasa. Z drugiej strony twierdzenie Girada-Harriota przypomina, że zawsze będą to tylko przybliżenia; jakakolwiek próba przeskalowania trójkąta powoduje, że zmienią się jego kąty, a zatem i kształt.

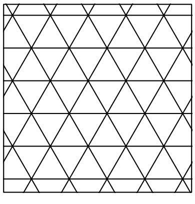
W tym wykładzie będziemy zajmować się równocześnie sferą i płaszczyzną. Znów zobaczymy, jak bardzo różnią się te dwie przestrzenie. Pokażemy, że całkiem inaczej wyglądają parkietaże na płaszczyźnie, a inaczej na sferze.

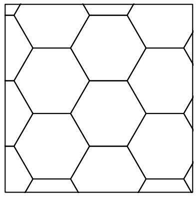
6.1 Parkietaże płaszczyzny

Trzy klasyczne parkietaże regularne - Parkietaże półregularne - Zadania

Parkietażem płaszczyzny nazywamy pokrycie płaszczyzny wielokątami o rozłącznych wnętrzach. Analogicznie określamy parkietaż sfery czy przestrzeni. Powszechnie znane są trzy klasyczne parkietaże płaszczyzny:







Przy naturalnych warunkach na jednorodność ułożenia istnieje tylko skończenie wiele istotnie różnych parkietaży płaszczyzny. W dalszej części zajmiemy się analogicznym problemem dla sfery.

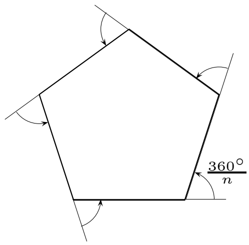
Trzy klasyczne parkietaże regularne

Parkietaż nazywamy **regularnym**, jeżeli składa się z jednakowych wielokątów foremnych. Okazuje się, że nie ma innnych parkietaży regularnych płaszczyzny niż trzy wyżej pokazane. Dowód nie jest trudny.

Przypomnijmy, że kąt wewnętrzny w n-kącie foremnym jest równy

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ.$$

W istocie, jest to kąt półpełny pomniejszony o wielkość skrętu. A ponieważ po n krokach wykonujemy skręt o 360°, więc przy każdym wierzchołku jest on równy n-tej części kąta pełnego.



Dla wielokąta foremnego $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6$ bokach otrzymujemy kąt o mierze odpowiednio

$$60^\circ, 90^\circ, 108^\circ, 120^\circ.$$

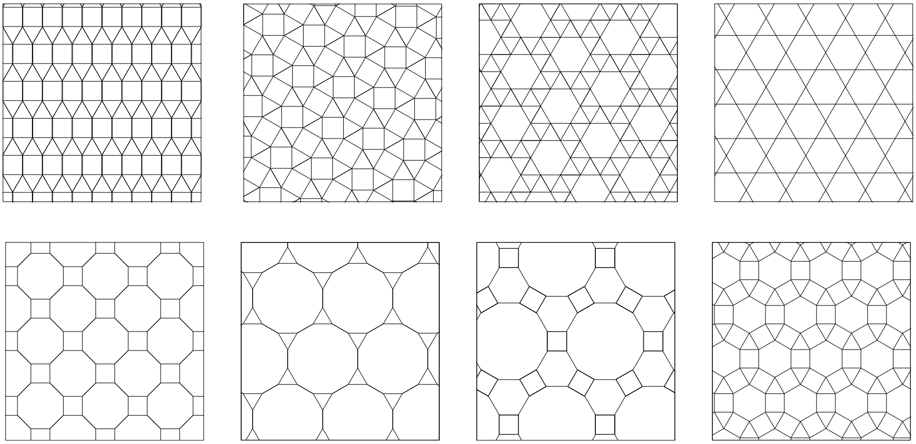
W wierzchołku stykają się przynajmniej trzy wielokąty, więc wielokąty o większej liczbie boków nie tworzą parkietażu regularnego. Musimy odrzucić też pięciokąty, gdyż 108 nie dzieli 360. Pozostają zatem trzy możliwe wartości n: 3, 4 oraz 6.

Jest oczywiste, że parkietaż złożony z samych trójkątów równobocznych, samych kwadratów albo samych sześciokątów foremnych musi wyglądać tak, jak jeden z trzech pokazanych na wstępie.

Parkietaże półregularne

Parkietaż nazywamy **półregularnym**, jeżeli składa się z różnych wielokątów foremnych, ale w każdym wierzchołku występują takie same wielokąty, w tej samej kolejności.

Jest tylko osiem półregularnych parkietaży płaszczyzny. Oto one:



Wykażemy, że innych nie ma. Najpierw rozważmy przypadek, gdy w każdym wierzchołku stykają się trzy wielokąty: k-kąt, l-kąt i m-kąt. Suma kątów wewnętrznych tych trzech wielokątów musi dać kąt pełny zatem

$$\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{k}\right) + \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{l}\right) + \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{m}\right) = 360^\circ,$$

skąd po rutynowych przekształceniach otrzymamy

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}.$$

Oczywiście $k, l, m \geqslant 3$. Jednym z rozwiązań ostatniego równania jest trójka $k = l = m = 6$, odpowiadająca regularnemu parkietażowi sześciokątnemu. Trzy dalsze rozwiązania to $(4, 8, 8)$, $(4, 6, 12)$ oraz $(3, 12, 12)$, w dowolnej kolejności (kolejność nie wpływa tu na typ parkietażu). Odpowiadają im trzy początkowe parkietaże w drugim rzędzie na rysunku powyżej.

Są jeszcze inne rozwiązania, np. $(5, 5, 10)$, ale można wykazać, że nie wyznaczają one żadnego parkietażu.

Ponieważ najmniejszy kąt w wielokącie foremnym to 60°, więc w jednym wierzchołku styka się co najwyżej sześć wielokątów. Pozostaje rozważyć przypadki, gdy w wierzchołku stykają się cztery, pięć albo sześć wielokątów. Ten ostatni, skrajny przypadek odpowiada parkietażowi regularnemu z trójkątów.

Przypadek, gdy w wierzchołku stykają się cztery albo pięć wielokątów prowadzi do równań

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1,$$

oraz

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{3}{2}.$$

Rozwiązaniem pierwszego (podajemy tylko te, które wyznaczają parkietaż) są czwórki $(3,3,6,6)$ i $(3,4,6,4)$, drugiego $(3,4,3,4,3)$, $(3,3,3,4,4)$ oraz $(3,3,3,3,6)$. Czytelnik zechce sam rozstrzygnąć, które z powyższych parkietaży im odpowiadają.

Zadania

1. Przyglądając się rysunkom parkietaży półregularnych wyznacz kąt wewnętrzny:
a) w ośmiokącie foremnym; b) w dwunastokącie foremnym.

2. **Parkietażem dwoistym** do danego nazywamy parkietaż utworzony przez połączenie odcinkami środków sąsiednich wielokątów parkietażu.
a) Jak wyglądają parkietaże dwoiste do trzech parkietaży regularnych?
b) Z jakich wielokątów składa się parkietaż dwoisty do parkietażu półregularnego złożonego z sześciokątów i trójkątów?

◊ ◊ ◊

3. Czy istnieje parkietaż złożony z kwadratów dwu wielkości, w którym każdy mały kwadrat sąsiaduje z czterema dużymi, a każdy duży z czterema małymi (i być może pewną liczbą dużych)?

6.2 Wzór Eulera i regularne parkietaże sfery

Wzór Eulera - Regularne parkietaże sfery - Zadania

Pojęcie parkietażu jest tu określone analogicznie, ale metody rozumowania istotnie inne. Przypomnijmy, że suma kątów wielokąta sferycznego nie jest w pełni określona przez liczbę jego boków, dlatego nie jest możliwe powtórzenie poprzednich rachunków. Narzędziem będzie wzór, którego odkrycie przypisuje się Leonhardowi Eulerowi (1707-1783).

Wzór Eulera

Dowolny parkietaż sfery wyznacza wielościan wpisany w sferę. Mówiąc o parkietażach sfery przyjęło się więc stosować terminologię związaną z wielościanami. Wielokąty parkietaży nazywa się **ścianami**, a ich boki i wierzchołki — **krawędziami** i **wierzchołkami** parkietażu.

Twierdzenie 6.1 (wzór Eulera)
Pomiędzy liczbą ścian S, liczbą krawędzi K i liczbą wierzchołków W parkietażu zachodzi zależność

$$W - K + S = 2.$$

Taka sama zależność zachodzi też dla wielościanów wypukłych.

Dowód: Niech P_i, $i = 1, 2, \ldots, i = S$ będą ścianami parkietażu, przy czym n_i — liczba krawędzi i-tej ściany, σ_i — suma kątów wewnętrznych, e_i — eksces. Z definicji

$$e_i = \sigma_i - (n_i - 2)\pi.$$

Sumując liczby boków poszczególnych ścian otrzymamy podwojoną liczbę krawędzi, gdyż każda krawędź jest liczona dwukrotnie. Zatem

$$\sum_{n=1}^{S} n_i = 2K.$$

Suma kątów w każdym wierzchołku jest równa 2π, więc sumując wszystkie kąty otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{S} \sigma_i = 2\pi W.$$

Z twierdzenia 5.5 wiemy, że eksces wielokąta sferycznego jest równy jego polu. Tak więc łączna suma ekscesów jest równa polu powierzchni sfery, czyli

$$4\pi = \sum_{i=1}^{S} e_i = \sum_{i=1}^{S} \sigma_i - \pi \sum_{i=1}^{S} n_i + 2\pi \sum_{i=1}^{S} 1 =$$

$$= 2\pi W - 2\pi K + 2\pi S = 2\pi(W - K + S).$$

Dzieląc stronami przez 2π otrzymujemy tezę twierdzenia dla parkietażu.

Naturalna odpowiedniość pomiędzy parkietażami sfery a wielościanami wypukłymi dowodzi, że wzór ten zachodzi także dla wielościanów wypukłych. W istocie zachodzi on też dla innych wielościanów, pod warunkiem, że nie mają „dziur”.

Parkietaże regularne i wielościany platońskie

Przypomnijmy, że wielościan wypukły nazywamy **platońskim** lub **foremnym**, jeżeli jego ściany są przystającymi wielokątami foremnymi, a z każdego wierzchołka wychodzi ta sama liczba krawędzi.

Istnieje pięć rodzajów takich wielościanów. Zauważmy przede wszystkim, że ścianami wielościanu platońskiego nie mogą być sześciokąty foremne (a tym bardziej wielokąty o większej liczbie boków), gdyż trzy sześciokąty wychodzące z wierzchołka nie tworzą kąta trójściennego. Tak więc ścianami mogą być tylko pięciokąty foremne, kwadraty albo trójkąty równoboczne.

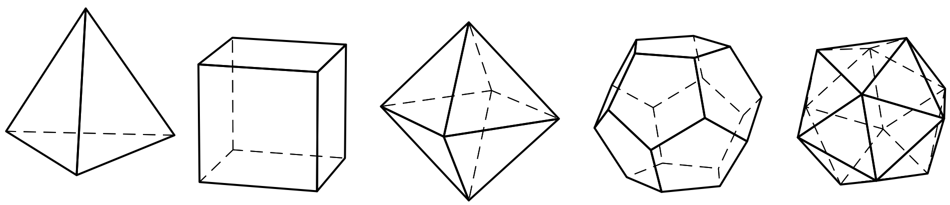
Rozważmy przypadek ścian pięciokątnych. W każdym wierzchołku muszą stykać się trzy takie ściany. Niech S będzie liczbą ścian parkietażu. Ponieważ każda krawędź należy do dwu ścian, a każdy wierzchołek do trzech, więc $2K = 5S$ oraz $3W = 5S$. Podstawiając $K = 5S/2$, $W = 5S/3$ do wzoru Eulera mamy

$$\frac{5S}{3} - \frac{5S}{2} + S = 2,$$

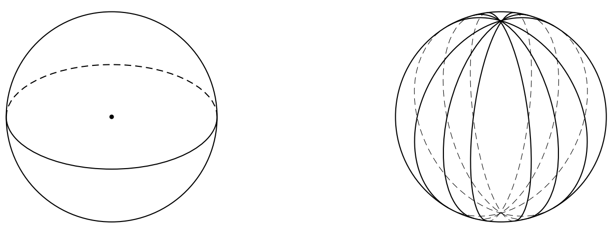
skąd $S = 12$.

Podobnie dowodzi się, że sześcian jest jedynym wielościanem platońskim o ścianach kwadratowych oraz że istnieją co najwyżej trzy wielościany platońskie o ścianach trójkątnych: czworościan, ośmiościan i dwudziestościan.

Wiemy, że istnieje czworościan foremny i sześcian. Składając podstawami dwie piramidy o odpowiednich wymiarach otrzymamy foremny ośmiościan. Dowodzi się, iż także konstrukcja dwunastościanu i dwudziestościanu jest wykonalna. Przypomnijmy, że opisy tych konstrukcji wieńczą *Elementy* Euklidesa.



Rzutowanie środkowe wielościanu platońskiego na sferę na nim opisaną daje regularny parkietaż sfery. Tak więc jest przynajmniej pięć takich parkietaży. Zauważmy jednak, że są jeszcze dwa typy parkietaży, które pominęliśmy.



Jeden składa się z dwu półsfer, drugi (dokładniej nieskończona seria) z n dwukątów sferycznych. Te dwa parkietaże nie odpowiadają żadnym wielościanom.

Zadania

4. Przeprowadź brakujące rachunki w dowodzie twierdzenia o wielościanach platońskich.

5. Gdy parkietaż złożony z dwukątów uzupełnimy linią równika otrzymamy inny prawie regularny parkietaż sfery. Dlaczego nie jest on parkietażem regularnym?

6. Parkietaż sfery odpowiadający czworościanowi foremnemu składa się z czterech trójkątów równobocznych. Znajdź miarę kąta w tych trójkątach. Analogiczne pytanie dla parkietażu złożonego z czworokątów.

♢ ♢ ♢

7. **Deficytem** wielościanu w danym wierzchołku nazwiemy różnicę pomiędzy miarą kąta pełnego a sumą miar kątów płaskich o danym wierzchołku. Zachodzi następujące twierdzenie Kartezjusza: Suma deficytów wszystkich wierzchołków wielościanu wypukłego jest równa 720°.
a) Sprawdź jego prawdziwość dla czworościanu foremnego i sześcianu.
b) Wykaż, że jest prawdziwe dla dowolnego wielościanu wypukłego.

8. **Trójkątem Coxetera** nazywamy trójkąt, w którym każdy kąt ma miarę będącą podzielnikiem 180°.
a) Podaj przykład trzech takich trójkątów płaskich i trzech sferycznych.
b) Wykaż, że jeśli N jednakowych trójkątów Coxetera o miarach $180^\circ/p$, $180^\circ/q$, $180^\circ/r$ tworzy parkietaż sfery, to

$$\frac{N}{p} + \frac{N}{q} + \frac{N}{r} = N + 4.$$

9. Oczywisty „parkietaż” przestrzeni złożony jest z sześcianów. Arystoteles niesłusznie uważał, że przestrzeń można parkietować też za pomocą czworościanów foremnych. Okazuje się jednak, że można ją parkietować za pomocą kombinacji dwu wielościanów platońskich. Jakie to wielościany?

6.3 Wielościany archimedesowskie i parkietaże półregularne sfery

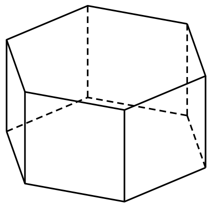
Wielościany archimedesowskie - Parkietaże półregularne sfery - Zadania

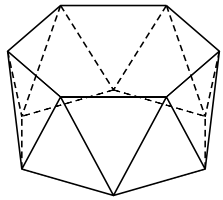
Widzieliśmy, że parkietaże regularne sfery są ściśle związane z wielościanami foremnymi. Podobnie parkietaże półregularne sfery wiążą się z wielościanami archimedesowskimi.

Wielościany archimedesowskie

Wielościanem **półforemnym** nazywamy dowolny wielościan nieplatoński, którego wszystkie ściany są wielokątami foremnymi, a otoczenia wierzchołków są jednakowe.

Istnieją dwie oczywiste nieskończone serie takich wielościanów: graniastosłupy oraz graniastosłupy skręcone (o odpowiednich proporcjach).





Wielościan półforemny nie mieszczący się w żadnej z tych dwu kategorii nazywamy **archimedesowskim**. Jest 13 takich wielościanów. W Internecie łatwo zobaczyć, jak one wyglądają. Rysunki, jakie moglibyśmy tu dać na pewno nie dorównywałyby kolorowym grafikom.

Parkietaże półregularne sfery

Na wielościanie półforemnym można opisać sferę. Rzutując ściany na powierzchnię sfery otrzymamy parkietaż półregularny sfery.

Tak więc mamy przynajmniej 13 parkietaży archimedesowskich i dwie nieskończone serie odpowiadające graniastosłupom prostym i skręconym.

Zadania

10. Odpowiednio przycinając naroża sześcianu otrzymamy wielościan archimedesowski. Ile ma ścian, wierzchołków i krawędzi?

11. Istnieje parkietaż sferyczny złożony z prostokątnych trójkątów równobocznych. Z ilu trójkątów się składa?

12. Śledząc transmisję telewizyjną meczu można zauważyć, że klasyczna piłka jest w przybliżeniu pewnym wielościanem archimedesowskim, którego czarne łaty są pięciokatami, a białe sześciokątami. Można też zauważyć, że w wierzchołku stykają sie trzy łaty: jedna czarna, dwie białe. Ile łat ma piłka?

♢ ♢ ♢

13. Niech S_3, S_4, S_5, ... oznaczają liczbę ścian trójkątnych, czworokątnych itd. w ustalonym wierzchołku parkietażu sferycznego. Wykaż, że

$$2K = (S_3 + S_4 + S_5 + \ldots)W.$$

Wywnioskuj stąd, że w wierzchołku wielościanu archimedesowskiego stykają się ściany co najwyżej trzech rodzajów.