MATEMATYKA

DAWNA I NOWA

Marek Zakrzewski

MATEMATYKA

DAWNA I NOWA

TOM II

Struktura i przypadek

GiS

Projekt okładki
DWA:WIATRY Pracownia graficzna

Skład komputerowy książki w systemie LaTeX wykonał autor.
Rysunki wykonał Marian Gewert.

ISBN 978–83–62780–79–2

Wydanie I, Wrocław 2020
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BIS Sp. z o.o. Sp. k.

Myślę, że dla mnie główną motywacją jest satysfakcja, jaką daje pełne zrozumienie pewnych subtelnych matematycznych pojęć i zależności, i wyjaśnianie tego innym.

Terence Tao, cyt. wg
https://www.brainyquote.com/authors/terence-tao

Nauczanie ma tylko jednego wroga: nudę; ale ów jest nielitościwy. Ktokolwiek uczy, winien o tym pamiętać, że zachęca albo zniechęca, że zraża albo pociąga; że podnieca ciekawość i pozostawia zdziwienie albo też, kładąc grubą rękę na budzącej się duszy, tłumi jej brzmienie, dławi jej poryw.

Władysław Natanson, *Wspomnienia i szkice*,
Wydawnictwo Literackie 1977

Spis treści

Wstęp do II tomu

Im bardziej rozwinięta jest matematyka, tym bardziej harmonijnie i jednolicie kształtuje się jej struktura i odkrywane są nieoczekiwane związki pomiędzy dyscyplinami wcześniej odrębnymi.

David Hilbert (1862-1943),
cyt. wg https://mathshistory.st-andrews.ac.uk

Drugi tom książki to seria krótkich kursów z kombinatoryki, teorii prawdopodobieństwa, algebry abstrakcyjnej (ciała i grupy), teorii liczb, teorii grafów z elementami teorii Ramsey'a, geometrii nieeuklidesowych i teorii obliczeń. Czytając krótki, starannie umotywowany, kurs o objętości 40-80 stron Czytelnik zyska pewne **wyobrażenie** o charakterze tej dyscypliny, a dzięki ich zwięzłości można było osiągnąć sporą **rozmaitość** tematyki. Łącznie książka daje stosunkowo rozległą panoramę matematyki w zakresie dostępnym dla początkującego adepta tej dyscypliny. Chociaż ponad 90% tego tomu pochodzi z cyklu *Markowe Wykłady z Matematyki* ze względu na układ i dobór materiału, a także wiele nowych zadań, jest to **zasadniczo nowa** książka.

Struktura, przypadek i jeszcze więcej

Związek podtytułu z tematyką II tomu nie jest tak oczywisty, jak w przypadku I tomu. Wyraża on wiernie treść pierwszych 200 stron. Ciała liczbowe i grupy to klasyczne *struktury* algebraiczne: a teoria prawdopodobieństwa to matematyczna teoria *przypadku*. Na pograniczu obu motywów znajdują się twierdzenia ramseyowskie — pokazujące istnienie regularnych struktur w przypadkowych układach.

Także w wykładach poświęconych geometrii można widzieć pewne struktury: sfera i płaszczyzna hiperboliczna to struktury geometryczne. Ale teoria liczb, większość teorii grafów i teoria obliczeń na pewno wychodzą poza tematykę sugerowaną przez podtytuł.

Strategie lektury

Kolejność wykładów odpowiada w przybliżeniu **porządkowi historycznemu**: najpierw dyscypliny starsze, potem nowsze. Z jednym wyjątkiem.

Z historycznego punktu widzenia teoria liczb (pomijając dość nowoczesne elementy kryptografii) to matematyka *dawna*: wszystkie twierdzenia podane z dowodem pochodzą sprzed roku 1830. Powinna zatem poprzedzać teorię grup, która zaczęła odgrywać istotną rolę dopiero pod koniec XIX w. Ale dziś w wykształceniu matematyka teoria grup odgrywa rolę ważniejszą niż teoria liczb, dlatego w naszych wykładach poprzedza ona teorię liczb.

Kolejne części są **niemal niezależne**. Na pewno warto zacząć od części I, i uwzględnić fakt, że część III poprzedza IV. Pod względem trudności, najtrudniejsze są chyba części IV i VII.

Zadania

Zadania podstawowe — w większości niezbędne dla bezpiecznego posuwania się w głąb materiału — oddziela od zadań uzupełniających potrójny symbol karo. Te początkowe zadania ilustrują wprowadzane pojęcia, techniki czy twierdzenia. Większość jest stosunkowo prosta.

Dalsze zadania ilustrują związki wykładu z resztą materiału bądź pogłębiają rozumienie pojęć. Zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze (i ciekawsze).

Większości zadań towarzyszą odpowiedzi, wskazówki czy nawet pełne rozwiązania. Wyjątkiem są proste zadania rachunkowe; poprawność rozwiązania Czytelnik może sprawdzić za pomocą programu Wolfram Alpha® lub innego pokrewnego. Nie ma też odpowiedzi do zadań najtrudniejszych, z dwiema gwiazdkami. Przypominają one, że w prawdziwej matematyce nie zawsze mamy gotową odpowiedź w zasięgu ręki.

10 listopada 2020 Marek Zakrzewski

I

Kombinatoryka

— Więc pan chciałby przesadzać czternaście osób, co dzień w innej kolejności aż do wyczerpania wszystkich możliwych kombinacji, czy tak?
— Tak jest proszę pana.
— I co Pan sądzi, jak to długo będzie trwało, aż pan te wszystkie możliwe kombinacje wyczerpie?
— No, nie wiem ... może nawet parę tygodni ... ale musi być sprawiedliwość.
— Owszem, musi być (...) — ale będzie to, panie drogi, trwało — niech pan słucha: dwieście trzydzieści osiem milionów osiemset czterdzieści cztery tysiące sześćset trzydzieści trzy lata.
Osłupiałem, myśląc, że mam do czynienia z wariatem.

Julian Tuwim, *Cicer cum caule, czyli groch z kapustą*,
Czytelnik Warszawa 1958-59

Kombinatoryka jest fundamentem matematyki dyskretnej. Dwa podstawowe pytania kombinatoryki — o **liczbę permutacji** oraz o **liczbę kombinacji** — mają długą historię. Można przyjąć, że w tej lub innej postaci pojawiły się one w Chinach, Indiach czy krajach Islamu przynajmniej tysiąc lat temu. Do permutacji i kombinacji sprowadza się mnóstwo zadań kombinatorycznych. Niektóre z nich są ciekawe, ale przy typowym zadaniu kombinatorycznym trudno zrozumieć, *dlaczego* kogokolwiek to interesuje. Najistotniejsze zastosowania pojawią się dopiero w dalszych częściach książki.

Przez dłuższą część swej historii (czy raczej prehistorii) rozważania kombinatoryczne były częścią logiki (klasyfikacje), prozodii (badanie rytmiki wiersza) czy wręcz kwestii związanych z życiem codziennym.[1]

Wraz z rozwojem rachunku prawdopodobieństwa (Fermat i Pascal) kombinatoryka zaczęła nabierać bardziej naukowego charakteru. W roku 1666 Leibniz publikuje *Dissertatio de Arte Combinatoria*, dzieło o inspiracji filozoficznej, ale z wyraźnymi elementami matematycznymi, w którym po raz pierwszy pojawia się sam termin *kombinatoryka.* Niespełna 100 lat później wraz z Eulerem kombinatoryka wchodzi w okres dojrzałości, ale aż do połowy XX wieku pozostaje z dala od głównego nurtu matematyki.

[1]W roku 1629 Jeremias Drexel, Jezuita, profesor retoryki i wybitny kaznodzieja, opublikował dzieło, w którym wypisał wszystkie 720 permutacji sześciu liter. Wykazał w ten sposób, że można 6 osób przesadzać przez 360 dni w roku (pomija się tu 5 dni całkowitego postu) przy obiedzie i kolacji tak, aby za każdym razem osoby te siedziały inaczej.

Wykład 1

Permutacje i kombinacje, czyli sztuka mnożenia

Trzy płaszczyzny w położeniu ogólnym (żadne dwie z nich nie są równoległe, żadne trzy nie mają wspólnej krawędzi itd.) dzielą przestrzeń na 8 części, cztery — na 15 części, a siedem na 64 części. Z pozoru uzyskanie tych wyników wymaga sporej wyobraźni, ale metodami kombinatoryki można bez trudu znaleźć wzór ogólny.

1.1 Permutacje i kombinacje bez powtórzeń

Mnożyć czy dodawać? - Permutacje - Wzór Stirlinga i szacowanie rzędu - Zadania

Rozważać tu będziemy dwa rodzaje obiektów: permutacje — w których kolejność elementów jest istotna, oraz kombinacje — w których kolejność jest obojętna.

Mnożyć czy dodawać?

Rozważmy zbiór 26 liter alfabetu łacińskiego A, B, ..., X, Y, Z oraz 10 cyfr 0, 1, ..., 9. Gdy mamy wybrać literę **albo** cyfrę, możemy to zrobić na

$$26 + 10 = 36$$

sposobów. Jeżeli mamy wybrać literę **oraz** cyfrę (w tej właśnie kolejności), to otrzymamy

$$26 \cdot 10 = 260$$

uporządkowanych kombinacji A0, A1, ..., A9, B0, ..., Z9. Ogólnie, wybór typu **albo** prowadzi do dodawania, wybór typu **oraz** prowadzi do mnożenia. Korzystając w dalszych rachunkach z tej ostatniej zasady będziemy się powoływać na **regułę mnożenia**. Dodawać będziemy bez komentarza.

PRZYKŁAD 1.1 *Oblicz liczbę przekątnych n-kąta wypukłego.*

ROZWIĄZANIE: Z każdego wierzchołka wychodzi $n-3$ przekątnych, gdyż musimy pominąć ten wierzchołek i jego obu sąsiadów. Mnożąc przez liczbę wierzchołków otrzymujemy $n(n-3)$. Zauważmy jednak, że w ten sposób każdą przekątną liczymy dwa razy, więc ostateczny wynik to $n(n-3)/2$.

Permutacje

Mówiąc nieformalnie, **permutacja** skończonego zbioru, to ustawienie jego elementów w pewnej kolejności. Dwa elementy 1, 2 można ustawić na dwa sposoby: 12 albo 21. Dla zbioru złożonego z trzech elementów jest takich ustawień sześć:

$$123, \quad 132, \quad 213, \quad 231, \quad 312, \quad 321.$$

Wszystkich permutacji zbioru n-elementowego jest

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!.$$

Można to ustalić bez ich wypisywania: na pierwszym miejscu mamy n możliwości, na drugim $n-1$, na trzecim $n-2$ itd.

Wzór Stirlinga i szacowanie rzędu

Talię 52 kart można zatem ułożyć na 52! sposobów. Zawsze warto mieć wyobrażenie o rzędzie wielkości, jakimi operujemy. Pomoże nam w tym wzór Stirlinga

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Ze wzoru Stirlinga mamy

$$52! \approx \sqrt{2\pi\cdot 52}\left(\frac{52}{e}\right)^{52}.$$

Logarytmując (przy podstawie 10) obie strony otrzymujemy

$$\log 52! \approx \frac{1}{2}\log 104\pi + 52\log\frac{52}{e} \approx 67,9.$$

Oznacza to, że 52! jest liczbą mającą w zapisie dziesiętnym 68 cyfr.

Permutacje częściowe

W analogiczny sposób definiujemy **permutacje częściowe** (nazywane często **wariacjami bez powtórzeń**). Oto wszystkie dwuelementowe permutacje częściowe o elementach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$12,\ 13,\ 14,\ 21,\ 23,\ 24,\ 31,\ 32,\ 34,\ 41,\ 42,\ 43.$$

W ogólnym przypadku mamy:

Twierdzenie 1.1 *Wszystkich permutacji częściowych długości k o wyrazach ze zbioru m-elementowego jest*

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-(k-1)) = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

Dowód: Rzeczywiście, na pierwszym miejscu mamy m możliwości ustawienia (bo tyle jest elementów), na drugim już $m-1$, gdyż nie możemy powtórzyć pierwszego elementu, na trzecim $m-2$ możliwości, gdyż nie możemy wykorzystać dwu pierwszych, ..., wreszcie na k-tym miejscu mamy $m-(k-1)$ możliwości. Na mocy reguły mnożenia liczba możliwości wynosi

$$\underbrace{m(m-1)(m-2)\dots(m-(k-1))}_{k \text{ czynników}} =$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(k-1))(m-k)!}{(m-k)!} = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

Ten ostatni wzór często wykorzystywany jest w postaci początkowego iloczynu. Czasem jednak zapis za pomocą silni okazuje się bardziej przydatny.

Kombinacje

Kombinacją k-elementową z ustalonego zbioru skończonego nazywamy dowolny k-elementowy jego podzbiór. W gruncie rzeczy termin ten jest synonimem słowa *podzbiór*, ale gdy mówimy o kombinacjach zazwyczaj myślimy o podzbiorach ustalonej wielkości.

Twierdzenie 1.2 *Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wyraża się wzorem*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

DOWÓD: Niech $C(n,k)$ oznacza nieznaną na razie liczbę kombinacji. Wyobraźmy sobie konkurs, który przebiega w dwu etapach. Najpierw wyłaniamy k finalistów, a następnie ustalamy porządek tych k najlepszych uczestników. Ponieważ k finalistów można wybrać na $C(n,k)$ sposobów, a ustalić ich kolejność na $k!$ sposobów, więc możliwych wyników końcowych jest

$$C(n,k)k!.$$

Z drugiej strony to samo można uzyskać, wybierając najpierw najlepszego uczestnika konkursu, potem drugiego itd. Mamy tu

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{możliwości.}$$

Porównując obydwa wyniki otrzymujemy

$$C(n,k)k! = \frac{n!}{(n-k)!},$$

skąd zapowiedziany wzór

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Na przykład spośród 7 elementów można wybrać 3 na

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{3!4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} = 35 \;\; \text{sposobów.}$$

Symbol $\binom{n}{k}$ nazywamy **współczynnikiem dwumianowym**. Zauważmy, że jest on równy ilorazowi zstępującego iloczynu $n(n-1)\dots(n-(k-1))$ kolejnych k czynników przez $k!$. Ta uwaga okaże się istotna, gdy rozważać będziemy współczynniki dwumianowe z „licznikiem” ujemnym bądź ułamkowym.

Podstawowe własności współczynników dwumianowych wynikają bezpośrednio z definicji:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Wzór Newtona

Najważniejszym i najczęstszym zastosowaniem współczynników dwumianowych jest wzór dwumianowy Newtona. Wzór ten znany był w Indiach zapewne już w VI w., Newton uogólnił go na wykładniki wymierne.

Twierdzenie 1.3 (wzór dwumianowy Newtona)

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.$$

W Σ-notacji wzór dwumianowy przyjmuje postać:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

W I tomie daliśmy wskazówkę (p. str. 14, zad. 12), jak wyprowadzić wzór Newtona za pomocą indukcji. Dowody indukcyjne rzadko jednak dają prawdziwe zrozumienie *dlaczego* jest tak, a nie inaczej. Tutaj dajemy dowód kombinatoryczny.

Na podstawie wzorów na kwadrat, sześcian i ewentualnie dalsze potęgi sumy można *przypuszczać*, że ogólny wzór będzie miał postać:

$$(a+b)^n = a^n + ?a^{n-1}b + \ldots + ?a^k b^{n-k} + \ldots + ?ab^{n-1} + b^n.$$

Aby wyznaczyć współczynniki przy kolejnych składnikach, zbadajmy, skąd się one biorą:

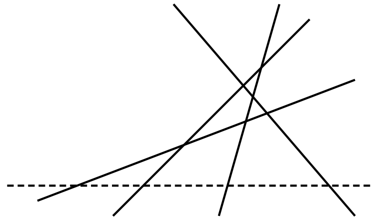
$$(a+b)(a+b)\ldots(a+b) = \ldots + ?a^{n-k}b^k + \ldots$$

Składnik postaci $a^{n-k}b^k$ powstaje, gdy z k nawiasów wybieramy b, z pozostałych a. Wiemy, że można to zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów. Takie więc współczynniki należy wstawić w miejsce znaków zapytania.

Zadanie o podziale przestrzeni

Formalne pytania o liczbę ustawień, wyborów czy itd. mogą wydawać się zupełnie nienaturalne. Mało kto stawia sobie w życiu takie pytania. Pokażemy teraz, jak te dość abstrakcyjne metody pozwalają rozwiązać problem bardziej konkretny, i zdecydowanie ciekawszy. Poniższe zadanie nie jest trywialne nawet dla $n = 4$.

Przykład 1.2 Na ile części dzieli przestrzeń n płaszczyzn w położeniu ogólnym (tzn. żadne dwie z nich nie są równoległe ani żadne trzy nie mają wspólnej prostej)?



ROZWIĄZANIE: Rozwiążmy najpierw analogiczne zadanie dla płaszczyzny: na ile obszarów dzieli ją n prostych w położeniu ogólnym?

Można założyć — ewentualnie obracając cały układ — iż żadna z rozważanych prostych nie jest pozioma. W takim przypadku każdy z obszarów ograniczonych z dołu ma dokładnie jeden punkt najniższy. Obszarów takich jest dokładnie tyle, ile punktów przecięcia prostych, czyli $\binom{n}{2}$.

Poprowadźmy prostą poziomą leżącą poniżej wszystkich punktów przecięcia (na rysunku linia przerywana). Pominięte obszary — nieograniczone z dołu — wyznaczają na dodanej prostej odcinki. Ponieważ n prostych wyznacza na tej prostej $n+1$ odcinków, więc tyle jest obszarów nieograniczonych z dołu. Łącznie wszystkich obszarów jest zatem

$$\binom{n}{2} + n + 1 = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}.$$

Metodę tę i elegancki wynik łatwo przenieść na wyższe wymiary. Dla przestrzeni otrzymujemy zatem

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}.$$

Zadania

1. Mały Arturek ma pięć par butów. Wkładając buty kieruje się dwiema zasadami: nigdy nie wkłada lewego buta na lewą nogę ani prawego na prawą; nigdy też nie wkłada dwu butów z tej samej pary. Na ile sposobów może obuć obie nogi?

2. Ile różnych par tanecznych można utworzyć z 10 dziewcząt i 10 chłopców?

3. Na ile sposobów można przyznać trzy medale (złoty, srebrny i brązowy) 10 zawodnikom?

4. Z ilu domin składa się komplet, zawierający po jednym dominie dla każdej kombinacji oczek od 0 do 6?

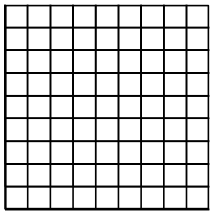
5. Ile trójkątów wyznacza:
a) 12 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe;
b) 12 punktów, spośród których 6 leży na prostej, a poza tym żadne trzy nie są współliniowe?

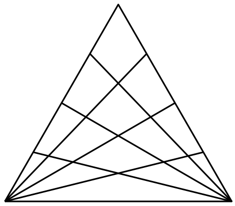
♢ ♢ ♢

6. Na ile sposobów można ułożyć k różnych książek na n półkach?

7. Na ile sposobów można rozmieścić na szachownicy 8 wież tak, aby żadna z nich nie znajdowała się w polu bicia drugiej przy założeniu, że wieże są: a) nieodróżnialne; b) odróżnialne.

8. Ile jest prostokątów na rysunku poniżej (z lewej strony)?





9. Ile jest trójkątów na rysunku powyżej (z prawej strony)? Jaka będzie odpowiedź, gdy z obu dolnych wierzchołków wychodzić będzie po n linii zamiast 5?

1.2 Ustawienia i kombinacje z powtórzeniami

Ciągi - Kombinacje z powtórzeniami albo rozmieszczenia - Zadania

W pierwszej części wykładu nie dopuszczaliśmy powtórzeń. Teraz rozważać będziemy analogiczne struktury, w których elementy mogą się powtarzać: ciągi i kombinacje z powtórzeniami.

Ciągi

Spójrzmy, ile jest ciągów długości k o wyrazach ze zbioru m-elementowego. Oto dla przykładu wszystkie 3-elementowe ciągi o wyrazach 0, 1:

$$000,\ 001,\ 010,\ 011,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111.$$

W ogólnym przypadku na pierwszym miejscu mamy m możliwości, na drugim też m i tak samo dalej. Zachodzi zatem następujące:

TWIERDZENIE 1.4 *Wszystkich ciągów długości k o wyrazach ze zbioru m-elementowego jest m^k.*

Szczególnie ważnym wnioskiem jest poniższe:

TWIERDZENIE 1.5 *Zbiór n-elementowy ma 2^n podzbiorów.*

DOWÓD: Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Wówczas każdy podzbiór $A \subset X$ można w pełni scharakteryzować ciągiem zerojedynkowym długości n. Na i-tym miejscu dajemy 1, gdy $x_i \in A$, a 0 w przeciwnym przypadku.

Na przykład dla $X = \{1, 2, 3\}$ odpowiednie ciągi wyglądają następująco:

$$\begin{array}{lcl} \emptyset & \longrightarrow & 000 \\ \{1\} & \longrightarrow & 100 \\ \{2\} & \longrightarrow & 010 \\ \{3\} & \longrightarrow & 001 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \{1,2\} & \longrightarrow & 110 \\ \{1,3\} & \longrightarrow & 101 \\ \{2,3\} & \longrightarrow & 011 \\ \{1,2,3\} & \longrightarrow & 111 \end{array}$$

Tak więc istnieje jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy podzbiorami zbioru n-elementowego, a ciągami zerojedynkowymi długości n. Pozostaje zauważyć, że ciągów takich jest 2^n, gdyż na każdym miejscu są tylko dwie możliwości: 0 albo 1.

Kombinacje z powtórzeniami albo rozmieszczenia

W zadaniach o kombinacjach zakładaliśmy, że każdy obiekt można wybrać tylko raz. Rozważmy teraz pokrewne zadanie o **kombinacjach z powtórzeniami**:

Na ile sposobów można wybrać k elementów spośród n (rodzajów) obiektów, przyjmując, że dopuszczamy powtórzenia?

Każdą taką kombinację możemy zakodować w postaci serii kółek i kresek, gdzie kółka odpowiadają wybieranym elementom, a kreski — przegródkom oddzielającym obiekty pierwszego rodzaju, drugiego rodzaju itd. Ustalmy dla przykładu $n = 3$, $k = 10$. Przedstawiony poniżej kod odpowiada wybraniu 3 obiektów pierwszego rodzaju, 5 — drugiego i 2 trzeciego.

$$\circ\ \circ\ \circ \mid \ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \ \circ \mid \ \circ\ \circ$$

Zauważmy, że każdy układ dwu kresek i 10 kółek jednoznacznie koduje pewną kombinację z powtórzeniami. Na przykład

$$\mid \mid \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ$$

odpowiada wyborowi 10 obiektów trzeciego rodzaju.

Układów złożonych z 10 kółek i 2 kresek jest $\binom{2+10}{10}$, gdyż ustalenie, na których 10 pozycjach spośród 12 umieszczone są kółka w pełni określa cały kod. Ogólnie:

TWIERDZENIE 1.6 *Liczba kombinacji z powtórzeniami k elementów spośród n rodzajów jest równa*

$$\binom{k+n-1}{k}.$$

Zauważmy jeszcze, że kombinacje z powtórzeniami można interpretować jako *rozmieszczenia*. Powyższy wzór mówi wówczas, na ile sposobów k jednakowych przedmiotów można rozłożyć do n szuflad. To $n-1$ we wzorze pokazuje wówczas liczbę ścianek pomiędzy nimi.

Jeśli we współczynniku dwumianowym dopuścimy ujemne „liczniki”, to wzór ten można zapisać w postaci niemal identycznej ze wzorem na liczbę kombinacji bez powtórzeń. Wystarczą dwa proste przekształcenia:

$$\binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)(k+n-2)\ldots(k+n-(k-1))(k+n-k))}{k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-(k-2))(-n-(k-1))}{k!} = (-1)^k \binom{-n}{k}.$$

Zadania

10. Przyjmijmy, że kod PIN może być dowolnym układem czterech cyfr.
a) Ile jest wszystkich PIN-ów?
b) Ile jest takich, w których jakaś cyfra się powtarza?

11. Ile jest wielomianów zmiennej x stopnia n o współczynnikach ze zbioru:

a) $\{0,1\}$; b) $\{0,1,2\}$?

12. Palindromem nazywamy słowo, które czyta się tak samo od początku i od końca, np. *kajak*. Ile jest palindromów 8-literowych, jeśli alfabet składa się z 26 liter? A ile 9-literowych?

13. Liczba $500 = 2^2 \cdot 5^3$ ma $(2+1)\cdot(3+1) = 12$ dzielników:

1	5	25	125
2	10	50	250
4	20	100	500.

Ile dzielników ma $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$?

14. Rozważmy wszystkie ciągi długości $n \geqslant 4$ o wyrazach A, T, G oraz C. Ile jest:
a)) takich ciągów, w których żadna litera nie występuje dwa razy pod rząd;
b) takich ciągów, że wśród każdych kolejnych czterech występuje każda z czterech liter?

15. **Uogólnionym współczynnikiem dwumianowym** nazywamy wyrażenie

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_i} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_i!},$$

gdzie $k_1 + k_2 + \ldots + k_i = n$. W szczególności,

$$\binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{k}.$$

Zapisz za pomocą takich współczynników liczbę wszystkich:
a) rozdań 52 kart pomiędzy czterech graczy;
b) słów, jakie można otrzymać przestawiając litery słowa TRATATATA.

16. Na ile sposobów można rozdać 52 karty pomiędzy czterech graczy tak, aby:
a) każdy miał jednego asa, jednego króla, ..., jedną dwójkę;
b) któryś z nich miał wszystkie cztery asy?

17. Ile rozwiązań ma równanie $t + x + y + z = 10$:
a) w liczbach całkowitych nieujemnych;
b) w liczbach całkowitych dodatnich?

18. Wykaż, że liczba podziałów n jednakowych przedmiotów pomiędzy k osób tak, aby każda coś dostała wynosi

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

19. Za pomocą uogólnionych współczynników dwumianowych można zapisać wzór Newtona dla większej liczby składników. Dla trzech składników otrzymamy

$$(a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i,j,k} a^i b^j c^k.$$

Podobnie dla większej liczby składników.
a) Podaj końcową postać wzoru na $(a + b + c)^3$.
b) Ile składników występuje w rozwinięciu $(a + b + c + d)^n$?
c) Znajdź sumę wszystkich współczynników w rozwinięciu z punktu b).

♢ ♢ ♢

20.* W grze w kółko i krzyżyk rozgrywanej na planszy 3×3, trzy pola leżące na jednej linii można wybrać na 8 sposobów — 3 linie poziome, 3 pionowe i 2 przekątne. A ile jest takich trójek w trójwymiarowej grze $3 \times 3 \times 3$?

21.* Komplet do gry SET[1] składa się z $3^4 = 81$ różnych kart. Niektóre układy trzech kart zwane są *setami*. Można wykazać, że każdy układ dwu kart da się uzupełnić do *seta* dokładnie na jeden sposób.
a) Znajdź liczbę wszystkich *setów*.
b) Ile średnio *setów* zawiera układ 12 kart?
c) Wykaż, że przy każdym podziale wszystkich 81 kart na dwie części przynajmniej jedna z nich zawiera *seta*.
d)* Pokaż, że każdy układ 37 kart zawiera *seta*.

[1]Zadanie zyska na motywacji, gdy spróbujesz rozwiązać jakąś zagadkę ze strony www.setgame.com. Tam też Czytelnik znajdzie kilka matematycznie ambitniejszych artykułów na temat tej gry.

Wykład 2

Współczynniki dwumianowe i liczby Fibonacciego

Współczynniki dwumianowe są obok silni najważniejszymi funkcjami kombinatorycznymi. Niemal wszystkie inne istotne funkcje kombinatoryczne wyrażają się za ich pomocą.

2.1 Współczynniki dwumianowe i trójkąt Pascala

Trójkąt Pascala - Tożsamość Pascala - Zadania

Przyglądając się kolejnym wierszom trójkąta Pascala bez trudu odkryjemy, że suma wyrazów w $(n+1)$-szym wierszu jest równa 2^n. A czy potrafisz znaleźć wzór na sumę ich kwadratów?

Trójkąt Pascala

Znany był już w XI w. lub niewiele później w Chinach, Indiach i krajach Islamu.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&1&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&4&&6&&4&&1&&\\
&1&&5&&10&&10&&5&&1&\\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1
\end{array}$$

....

Wiersze trójkąta pokazują kolejne współczynniki $\binom{n}{k}$ dla $n = 0, 1, 2$ itd.

W trójkącie Pascala wyrazy skrajne są równe 1, pozostałe powstają przez dodanie dwu wyrazów sąsiednich z poprzedniego wiersza. W każdym wierszu współczynniki dwumianowe rosną do połowy wiersza, a dalej maleją.

Tożsamość Pascala

Trójkąt Pascala opiera się na tożsamości

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1},$$

zwanej dalej **tożsamością Pascala**. Można ją łatwo wykazać za pomocą bezpośrednich rachunków. Poniższy dowód kombinatoryczny pozwala rachunków uniknąć. Sprowadza się on do porównania wyników, jakie otrzymujemy rozwiązując na dwa sposoby poniższe zadanie:

Na ile sposobów można wybrać $k+1$ *różnych liczb spośród liczb 0, 1, 2, ..., n?*

Wiemy, że takich sposobów jest $\binom{n+1}{k+1}$. Policzmy to inaczej: osobno kombinacje zawierające zero, a osobno te, które zera nie zawierają.

Kombinacji pierwszego typu jest $\binom{n}{k}$, kombinacji drugiego typu $\binom{n}{k+1}$. W sumie otrzymujemy

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Pozostaje zauważyć, że obie metody muszą dać ten sam wynik.

Zadania

1. Poniższe liczby ustaw w kolejności od największej do najmniejszej:

$$\binom{77}{37},\quad \binom{77}{47},\quad \binom{77}{57},\quad \binom{77}{67},\quad \binom{97}{37},\quad \binom{99}{47}.$$

2. Korzystając z tożsamości Pascala przedstaw poniższe sumy w postaci pojedynczego współczynnika dwumianowego.

a) $\binom{12}{4} + \binom{12}{7}$; b) $\binom{3}{0} + \binom{4}{1} + \binom{5}{2} + \binom{6}{3} + \binom{7}{4}$.

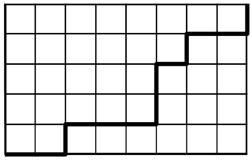
3. Korzystając ze wzoru Stirlinga wykaż, że zachodzi asymptotyczna równość

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

4. Udowodnij tożsamość Pascala metodą algebraiczną.

$\diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit$

5. Na ile sposobów można przejść od lewego dolnego wierzchołka kraty 8×5 do prawego górnego poruszając się po kracie zawsze w górę bądź w prawo? Rozważając podobne ogólniejsze zadanie wyprowadź tożsamość Pascala.



6. Wykaż, że iloczyn k kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez $k!$.

7.* Wykaż, że liczba

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

jest naturalna.

2.2 Tożsamości kombinatoryczne

Sumowanie współczynników dwumianowych - Dowodzenie tożsamości - Jeszcze jedna tożsamość - Tożsamości kombinatoryczne i liczby zespolone - Zadania

Tożsamości kombinatoryczne często pozwalają zastąpić dłuższą sumę krótkim wyrażeniem. Niektóre z tożsamości wykorzystamy już w tym wykładzie, niektóre okażą się przydatne dopiero w rachunku prawdopodobieństwa. Jednak wykład ten warto prześledzić do końca, gdyż same metody są czasem dość zaskakujące. W szczególności skorzystamy z pochodnych i liczb zespolonych.

Sumowanie współczynników dwumianowych

W analizie wzór Newtona pozwala zastąpić wyrażenie $(a+b)^n$ sumą prostszych składników. W kombinatoryce wzór Newtona często stosujemy w odwrotna stronę — sumę prostych składników zastępujemy potęgą $(a+b)^n$. Na przykład

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n.$$

W szczególności dla $x = 1$ otrzymujemy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

Zatem suma wyrazów każdego wiersza w trójkącie Pascala jest potęgą dwójki.

Podobnie dla $x = -1$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = (1-1)^n = 0.$$

Przenosząc ujemne składniki na prawą stronę otrzymujemy

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{2k}+\ldots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots+\binom{n}{2k+1}+\ldots$$

Wynika stąd, że podzbiorów liczebności parzystej jest tyle samo co nieparzystej. Dla zbiorów o nieparzystej liczbie elementów jest to oczywiste. Dlaczego?

Trzy metody

Porównamy teraz trzy metody dowodzenia tożsamości kombinatorycznych: algebraiczną, kombinatoryczną i analityczną.

Przykład 2.1 Wyprowadź tożsamość

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + k\binom{n}{k} + \ldots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$

Rozwiązanie:

I. Metoda algebraiczna:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k![n-(k+1)]!} = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k![(n-1)-k]!} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$

II. Metoda kombinatoryczna:

Rozwiążmy dwiema metodami zadanie: *Na ile sposobów można wybrać spośród n osób komisję wraz z przewodniczącym, jeśli dopuszczamy również komisje jednoosobowe?*

Można najpierw wybrać przewodniczącego na n sposobów, po czym dokooptować pewną liczbę członków komisji na 2^{n-1} sposobów, co daje prawą stronę tożsamości. Albo najpierw wybrać k-osobową ($k \geqslant 1$) komisję — możemy to uczynić na $\binom{n}{k}$ sposobów, po czym jednego z jej członków uczynić przewodniczącym, co daje lewą stronę.

III. Metoda analityczna:
Ze wzoru Newtona wynika, że

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Zróżniczkujmy tę równość stronami. Mamy

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Sumowanie zaczyna się teraz od $k = 1$, ponieważ pochodna stałej jest równa zeru. Podstawiając $x = 1$ otrzymujemy żądaną tożsamość.

Tożsamości kombinatoryczne i liczby zespolone

Na zakończenie wyprowadzimy jeszcze jedną, niezbyt użyteczną, ale dość tajemniczą tożsamość. Pokażemy, że

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \ldots = 2^{n-2} + \left(\sqrt{2}\right)^{n-2} \cos\frac{n\pi}{4}.$$

Lektura dowodu wymaga znajomości wzoru de Moivre'a (str. 107).

Sumowanie współczynników parzystych opierało się na wykorzystaniu wzoru Newtona dla $(1+1)^n$ oraz $(1-1)^n$. To drugie wyrażenie można zapisać w postaci $(1+(-1))^n$, a wówczas widać, że korzystaliśmy tu ze wzoru Newtona dla $(1+x)^n$ podstawiając w miejsce x dwa pierwiastki drugiego stopnia z 1. Nasuwa się zatem myśl, aby teraz wykorzystać ten sam wzór dla pierwiastków czwartego stopnia.

Rozważmy cztery równości:

$$\begin{aligned}
(1+1)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots \\
(1-1)^n &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \ldots \\
(1+i)^n &= \binom{n}{0} + i\binom{n}{1} - \binom{n}{2} - i\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots \\
(1-i)^n &= \binom{n}{0} - i\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + i\binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \ldots
\end{aligned}$$

Dodajmy te cztery równości stronami. Zauważmy, że znikną wszystkie kolumny, oprócz tych, które odpowiadają krotnościom czwórki. Zatem

$$4\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\ldots\right]=2^n+(1+i)^n+(1-i)^n.$$

Na mocy wzoru de Moivre'a

$$\mathrm{Re}\,(1+i)^n=\mathrm{Re}\left[\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right]=\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Łatwo sprawdzić, że $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}\,z$. Tak więc

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\ldots=\frac{2^n+(1+i)^n+(1-i)^n}{4}=$$

$$=2^{n-2}+\frac{2\mathrm{Re}\,(1+i)^n}{4}=2^{n-2}+\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Zadania

8. Oblicz:

a) $\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\binom{101}{2}+\ldots+\binom{101}{50}$; b) $\binom{101}{1}+\binom{101}{3}+\binom{101}{5}+\ldots+\binom{101}{101}$.

9. Uprość sumę:

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+4\binom{n}{2}+\ldots+2^n\binom{n}{n}.$$

10. Wykaż tożsamość

$$2\cdot 1\cdot\binom{n}{2}+3\cdot 2\cdot\binom{n}{3}+\ldots+(n-1)(n-2)\binom{n}{n-1}+n(n-1)\binom{n}{n}=n(n-1)2^{n-2}.$$

11. Udowodnij tożsamość

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}.$$

Wyprowadź z tej tożsamości wzór na sumę kwadratów $1^2+2^2+\ldots+n^2$.
Wsk.: Rozwiąż dwiema metodami zadanie: *Na ile sposobów można wybrać trzy rozdziały z książki mającej ich $n+1$?*

12. Rozwiąż dwiema metodami zadanie: *Na ile sposobów można wybrać k osobową komisję spośród m mężczyzn i n niewiast?*[1] Wywnioskuj stąd **tożsamość Vandermonde'a**

[1] Ten delikatny archaizm pozwala dopasować treść zadania do zmiennych występujących w tożsamości.

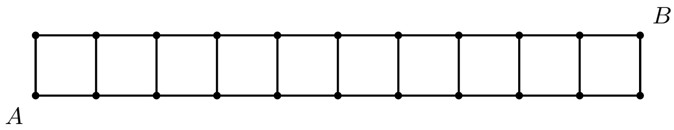
$$\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{k-2}+\ldots+\binom{m}{k}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{k}.$$

13. Z tożsamości Vandermonde'a wynika w oczywisty sposób poniższy wzór na sume kwadratów współczynników dwumianowych:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{k}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

Wyprowadź go jeszcze raz, rozwiązując na dwa sposoby zadanie: *Jacek i Placek mają po n znaczków. Na ile sposobów mogą wymienić się znaczkami, przy założeniu, że znaczki wymieniają jeden za jeden*?

14. Rysunek przedstawia sieć dróg łączących miasta A oraz B. Na ile sposobów możesz dotrzeć z miasta A do B nie odwiedzając żadnego miasta dwukrotnie?



♢ ♢ ♢

15. Wykaż tożsamość algebraicznie i kombinatorycznie

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k}+\binom{n}{1}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{k-2}+\ldots+\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}=2^k\binom{n}{k}.$$

16. Udowodnij, że dla $n \geqslant k \geqslant i$ zachodzi tzw. **tożsamość podkomisji**

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i}=\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$

17.* Wykaż, że każde dwa wyrazy (oprócz skrajnych) tego samego wiersza trójkąta Pascala mają wspólny dzielnik większy od 1.

18.* Znajdź wzór na sumę

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots$$

19.** Wykaż, że

$$\binom{n}{0}^2-\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2-\binom{n}{3}^2+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}^2=\begin{cases} 0, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste;} \\ (-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}, & \text{gdy } n \text{ parzyste.}\end{cases}$$

2.3 Liczby Fibonacciego

Liczby Fibonacciego i tożsamość Cassiniego - Wzór Bineta - Liczby Fibonacciego a współczynniki dwumianowe - Zadania

Liczby Fibonacciego są prawdopodobnie najstarszym przykładem ciągu zadanego rekurencyjnie. Pojawiły się one w dziele *Liber abaci* (1202) Leonarda z Pizy, zwanego Fibonaccim (ok. 1175-1250). Z pozoru nie mają żadnego związku ze współczynnikami dwumianowymi, ale pokażemy, że tak nie jest.

Liczby Fibonacciego i tożsamość Cassiniego

Liczby Fibonacciego 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... definiowane są rekurencyjnie:

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Często przyjmuje się dodatkowo $f_0 = 0$.

Ich znaczenie wynika nie tylko stąd, że jest to historycznie zapewne najstarszy ciąg rekurencyjny, ale przede wszystkim stąd, że pojawiają się w rozwiązaniach bardzo różnych zadań. Występują też w przyrodzie, w związku ze zjawiskiem filotaksji.

Nawet nie dysponując wzorem jawnym możemy odkryć wiele interesujących własności tych liczb.

Twierdzenie 2.1 *Dla dodatniej liczby naturalnej n zachodzi równość*

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n.$$

Prosty dowód indukcyjny pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. Łatwo z niego wyprowadzić nieoczywistą, a czasem użyteczną tożsamość. Jej odkrywca, astronom Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) do historii przeszedł jako odkrywca satelitów Saturna.

Wniosek 2.1 (tożsamość Cassiniego)
Dla $n \geqslant 1$ zachodzi równość

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Rzeczywiście,

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = \det \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = (-1)^n.$$

Wzór Bineta

Wyprowadzimy teraz jawny wzór na n-tą liczbę Fibonacciego. Są dwie podstawowe metody wyprowadzenia tego wzoru. Metodę równań charakterystycznych przedstawiliśmy w pierwszym tomie. Tu pokażemy metodę funkcji tworzących. Choć metoda funkcji tworzących jest bardziej uniwersalna, to w przypadku liczb Fibonacciego i innych równie prostych rekurencji jest rachunkowo trudniejsza. Z funkcjami tworzącymi zetkniemy się jeszcze w teorii prawdopodobieństwa.

Rozważmy funkcję

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_4x^3 + \dots,$$

zwaną **funkcja tworzącą** ciągu Fibonacciego. Wówczas

$$f(x) = f_0 + f_1x + \sum_{n=2}^{\infty} f_nx^n = f_0 + f_1x + \sum_{n=0} f_{n+2}x^{n+2} =$$

$$= x + \sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+1} + f_n)x^{n+2} = x + x\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}x^{n+1} + x^2\sum_{n=0}^{\infty} f_nx^n =$$

$$= x + x\sum_{n=1}^{\infty} f_nx^n + x^2f(x) = x + x(f(x) - f_0) + x^2f(x) =$$

$$= x + xf(x) + x^2f(x).$$

Zatem $f(x)(1 - x - x^2) = x$, skąd

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Przedstawmy prawą stronę równości w postaci sumy ułamków prostych. W tym celu rozłóżmy mianownik na czynniki. Rozkład ten warto wyrazić za pomocą **liczby złotej** φ i jej „sprzężenia”:

$$\varphi = (1 + \sqrt{5})/2, \qquad \widehat{\varphi} = (1 - \sqrt{5})/2.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$x^2 + x - 1 = (\phi - x)(\widehat{\phi} - x).$$

Po rutynowych przekształceniach otrzymamy

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\widehat{\varphi}}{\widehat{\varphi} + x} - \frac{\varphi}{\phi + x}\right).$$

Ponieważ $\varphi\widehat{\varphi} = -1$, więc

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1+x/\widehat{\varphi}} - \frac{1}{1+x/\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\widehat{\varphi}x}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\varphi^n - \widehat{\varphi}^n\right)x^n.$$

Współczynnik przy wyrazie x^n daje poniższy wzór:

Twierdzenie 2.2 (wzór Bineta)

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Nazwa wzoru, upamiętniająca Jacquesa Bineta (1786-1856), jest ogólnie przyjęta, choć wzór ten odkrył niemal 100 lat wcześniej Abraham de Moivre. Było to jedno z najwcześniejszych zastosowań funkcji tworzących.

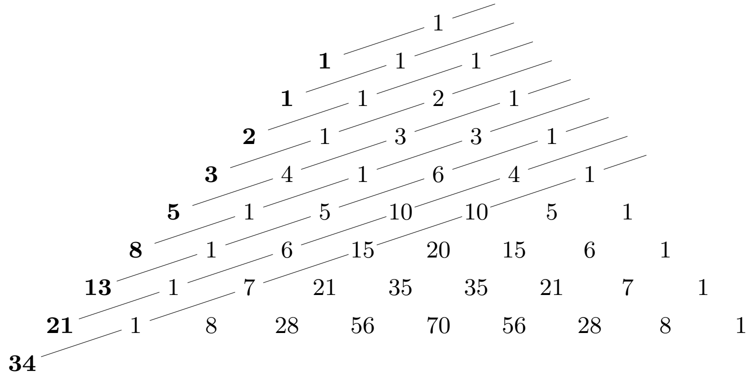
Zauważmy, że wartość bezwzględna drugiego składnika we wzorze Bineta jest mniejsza od $1/2$, więc f_n jest równa zaokrągleniu do liczby całkowitej pierwszego składnika. Stąd

$$f_n = \mathrm{round}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

gdzie round oznacza zaokrąglenie do najbliższej liczby całkowitej.

Liczby Fibonacciego a współczynniki dwumianowe

Niemal wszystkie podstawowe funkcje kombinatoryczne wyrażają się za pomocą silni i bądź współczynników dwumianowych. Dotyczy to także liczb Fibonacciego, choć wzór ten jest bardzo niepraktyczny. Spójrzmy jeszcze raz na trójkąt Pascala:



Sumując wyrazy po „przekątnych” dostajemy kolejno 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Można zatem przypuszczać, że zachodzi poniższa zależność.

Twierdzenie 2.3 *Dla dodatniej liczby naturalnej n zachodzi tożsamość*

$$f_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots$$

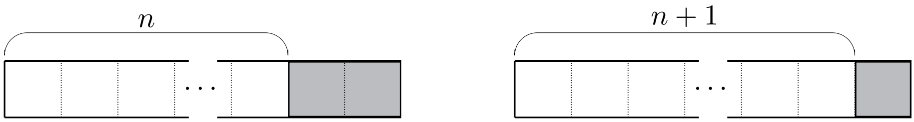
Zauważmy, że w tym zapisie składniki od pewnego miejsca są zerami. Pozostawienie tych ukrytych zer daje prostszy wzór.

Dowód: Rozwiążemy na dwa sposoby następujące zadanie:

Na ile sposobów można prostokąt $n \times 1$ pokryć
kwadratami 1×1 i prostokątami 2×1?

Rozwiążemy je na dwa sposoby:

I. Niech a_n będzie liczbą tych sposobów. Oczywiście $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Obliczmy liczbę takich pokryć dla prostokąta długości $n+2$. Jest a_n takich pokryć kończących się kwadratem i a_{n+1} — kończących się prostokątem. Łącznie $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Zauważmy, że jest to przesunięty ciąg Fibonacciego: $a_n = f_{n+1}$.



II. Zastanówmy się, ile pokryć prostokąta $n \times 1$ wykorzystuje k prostokątów. Takie pokrycie składa się z $n-k$ elementów. Położenie k prostokątów można wyznaczyć na $\binom{n-k}{k}$ sposobów. Łącznie takich pokryć jest zatem

$$a_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots$$

Porównując obydwa wyniki otrzymujemy żądaną tożsamość.

Zadania

20. Na ile sposobów prostokąt $n \times 2$ można rozbić na monomina 1×1 i tetramina 2×2?

21. Korzystając z funkcji tworzących znajdź wyraz ogólny ciągu zadanego podana rekurencją:

a) $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $a_0 = 1$; b) $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$, $b_0 = b_1 = 3$; c) $c_{n+1} = 3c_n - 2^n$, $c_0 = 4$.

$\diamondsuit$ $\diamondsuit$ $\diamondsuit$

22. Wykaż, że prawdziwe są tożsamości:

a) $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$; b) $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$; c) $f_{2n} = f_{n+1} f_n + f_n f_{n-1}$.

23. Wykaż twierdzenie Zeckendorfa: każda liczba naturalna da się przedstawić w postaci sumy różnych liczb Fibonacciego, z których żadne dwie nie są kolejne, np. $17 = 13 + 3 + 1$. Wykaż, że przedstawienie takie jest jednoznaczne.

24. Wykaż, że zachodzą równości:

$$\begin{aligned} f_{2n} &= f_{2n-1} + f_{2n-3} + \ldots + f_3 + f_1, \\ f_{2n+1} &= f_{2n} + f_{2n-2} + \ldots + f_2 + 1. \end{aligned}$$

25. Rozkładem liczby naturalnej nazywamy jej przedstawienie w postaci sumy dodatnich liczb naturalnych; np. liczba 3 ma cztery takie przedstawienia: 1+1+1, 1+2, 2+1 oraz 3.
a) Znajdź liczbę wszystkich rozkładów n.
b)* Wykaż, że wszystkich rozkładów n na składniki nieparzyste jest f_n.

26.* Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wszystkie wyrazy macierzy A^n są liczbami Fibonacciego.

2.4 Pascal

Blaise Pascal (1623-1662) francuski matematyk, fizyk i myśliciel religijny. Podstawowe wykształcenie matematyczne zapewnił mu ojciec Étienne Pascal (krzywa znana jako *ślimak Pascala* jest odkryciem ojca). Mając lat 17 dokonał pierwszego ważnego odkrycia w geometrii rzutowej. Niedługo potem, aby pomóc ojcu w żmudnych obliczeniach rachunkowych zbudował w latach 1642-44 pierwszą maszynę liczącą, która dodawała i odejmowała (maszynę zdolną wykonywać cztery działania zbudował dopiero Leibniz). W roku 1654 ukończył *Traktat o trójkącie arytmetycznym*, w którym wyłożone są teoretyczne podstawy trójkąta związanego z jego nazwiskiem. Pojawia się tam także — zdaniem niektórych historyków po raz pierwszy w sposób jawny — zasada indukcji matematycznej. Jego korespondencja z Fermatem uważana jest za moment narodzin rachunku prawdopodobieństwa. Wymieniany jest też jako jeden z ważnych prekursorów rachunku różniczkowego.

Pascal zajmował się także intensywnie eksperymentami związanymi z ciśnieniem atmosferycznym i kwestią istnienia próżni. A jako myśliciel religijny i autor *Myśli* i *Prowincjałek* uchodzi za jedną z czołowych postaci w dziejach francuskiej prozy.

Wykład 3

Wzór włączeń i wyłączeń, czyli sztuka dodawania

Wzór włączeń i wyłączeń pozwala wyznaczyć liczebność sumy zbiorów nierozłącznych. Za jego pomocą rozwiążemy kilka klasycznych zagadnień kombinatorycznych, w tym sławne zadanie o roztargnionej sekretarce.

3.1 Wzór włączeń i wyłączeń i jego zastosowania

Najprostsze przypadki i wzór ogólny - Zadanie o liczbie surjekcji - Zadania

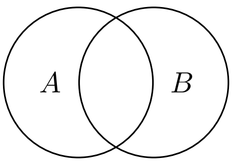
O ile reguła mnożenia pozwalała nam rozwiązywać zadania wymagające niemal wyłącznie mnożenia i dzielenia, to wzór włączeń i wyłączeń pokazuje, jak dodawać w nietrywialnych sytuacjach.

Najprostsze przypadki i wzór ogólny

Dalej symbol $\#A$ oznaczać będzie liczebność skończonego zbioru A.

Zacznijmy od wzoru

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

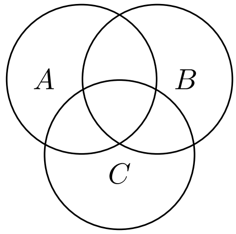


Rzeczywiście, aby znaleźć $\#(A \cup B)$ należy od sumy $\#A + \#B$ odjąć liczbę elementów liczonych dwukrotnie.

Rozważmy teraz przypadek trzech zbiorów. Z rysunku można odczytać, że

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$

Rzeczywiście, sumując $\#A$, $\#B$ oraz $\#C$ elementy iloczynów $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ liczymy dwukrotnie, a elementy zbioru $A \cap B \cap C$ nawet trzykrotnie. Aby ten błąd naprawić odejmujemy składniki $\#(A \cap B)$, $\#(A \cap C)$ oraz $\#(B \cap C)$.



Teraz jednak powstał pewien niedomiar: elementy zbioru $A \cap B \cap C$ były co prawda trzykrotnie dodawane, ale zostały też trzykrotnie odjęte. Dodając składnik $\#(A \cap B \cap C)$ otrzymujemy ostatecznie poprawny wynik. Można dostrzec analogię między tym wzorem a wzorem dla dwu zbiorów, i na tej podstawie odgadnąć ogólny wzór:

Twierdzenie 3.1 (wzór włączeń i wyłączeń)
Dla dowolnych zbiorów A_1, A_2, $\ldots$, A_n *liczebność sumy* $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ *wynosi*

$$\sum_i \#A_i - \sum_{i<j} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} \#(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Po prawej stronie wzoru pojawiają się na przemian znaki plus (składniki do sumy *włączamy*) i minus (składniki *wyłączamy*). Stąd nazwa wzoru.

Dowód: Należy pokazać, że każdy element sumy $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ jest przy tym sumowaniu liczony dokładnie raz. Dla ustalonego elementu a tej sumy niech m oznacza liczbę zbiorów A_i, zawierających a. Zauważmy, że wówczas a jest liczony dokładnie $\binom{m}{1}$ razy przy dodawaniu składników $|A_i|$, $\binom{m}{2}$ razy przy odejmowaniu składników $|A_i \cap A_j|$ itd. Łącznie liczony jest zatem

$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \ldots + (-1)^{m+1} \binom{m}{m}$$

razy. Pozostaje zauważyć, że ta suma jest równa 1. Ale skoro $\binom{m}{0} = 1$, to równość ta wynika bezpośrednio z tożsamości

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} = 0.$$

Przypomnijmy, że cytowana tożsamość (str. 16) wynika bezpośrednio ze wzoru Newtona. Oznacza to, że wzór włączeń i wyłączeń jest stosunkowo prostym wnioskiem ze wzoru Newtona.

Zadanie o liczbie surjekcji

Wyprowadzimy teraz wzór na liczbę surjekcji $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Dla uproszczenia zapisu dalsze rozważania prowadzić będziemy dla $k = 4$.

Niech A_i oznacza zbiór wszystkich funkcji $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, 4\}$. nieprzyjmujących wartości i dla $i = 1, 2, 3, 4$. Wówczas $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ będzie zbiorem wszystkich funkcji nie będących surjekcjami.

Obliczmy liczebność składników występujących we wzorze włączeń i wyłączeń:

$$\#A_i = 3^n \qquad \#(A_i \cap A_j) = 2^n, \qquad \#(A_i \cap A_j \cap A_k) = 1^n.$$

Oczywiście $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ jest zbiorem pustym.

Składników pojedynczych mamy $\binom{n}{1}$, podwójnych $\binom{n}{2}$, potrójnych $\binom{n}{3}$. Zatem ze wzoru włączeń i wyłączeń mamy

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum_i \#A_i - \sum_{i<j} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) =$$

$$= \binom{n}{1}\#A_i - \binom{n}{2}\#(A_i \cap A_j) + \binom{n}{3}\#(A_i \cap A_j \cap A_k) = \binom{n}{1}3^n - \binom{n}{2}\cdot 2^n + \binom{n}{3}1^n.$$

Tyle jest funkcji nie będących surjekcjami. Zatem surjekcji jest

$$\binom{4}{4}4^n - \binom{4}{1}3^n + \binom{4}{2}\cdot 2^n - \binom{4}{3}1^n.$$

W podobny sposób otrzymujemy wynik ogólny. W poniższym wzorze dodaliśmy ostatni (zerowy) wyraz, co czyni wzór bardziej eleganckim.

TWIERDZENIE 3.2 *Liczba surjekcji* $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ *wyraża się wzorem*

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Zadania

1. Ile liczb naturalnych z przedziału $[1, 1000]$ dzieli się przez 2 lub 3 lub 5?

2. Na ile sposobów można podzielić n różnych przedmiotów pomiędzy 4 osoby tak, aby każda coś dostała?

3. Ile układów 5 kart z talii 52 kart zawiera karty w każdym z czterech kolorów?

4. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowy układ 13 kart (jak w brydżu) zawiera wszystkie 4 kolory?

$\diamondsuit \ \diamondsuit \ \diamondsuit$

5. Dla naturalnych n funkcja Eulera $\phi(n)$ jest równa liczbie liczb naturalnych z przedziału $[1, n]$ względnie pierwszych z n. Pokaż, że jeśli $n = pqr$ jest iloczynem trzech różnych liczb pierwszych, to

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right).$$

3.2 Liczby Stirlinga i liczby Bella

Liczby Stirliga II rodzaju - Liczby Bella - Zadania

Rozważymy teraz dwa naturalne zagadnienia związane z podziałami zbioru na części. Wykorzystamy przy tym twierdzenie o liczbie surjekcji.

Liczby Stirlinga II rodzaju

Zajmiemy się teraz zagadnieniem bardziej szczegółowym: na ile sposobów można podzielić zbiór n-elementowy na k niepustych części? Liczbę takich podziałów oznaczamy symbolem $S(n, k)$ i nazywamy **liczbą Stirlinga II rodzaju**. Oczywiście

$$S(n, 1) = 1, \qquad S(n, n) = 1.$$

Zachodzi zależność rekurencyjna

$$S(n + 1, k) = S(n, k - 1) + kS(n, k).$$

Istotnie każdy podział zbioru $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ na k części powstaje na jeden z dwu sposobów:
— nowy, $n+1$ element tworzy osobną część, takich podziałów jest $S(n, k-1)$);
— nowy, $n+1$ element dodajemy do którejś z k części wcześniejszego podziału, takich podziałów jest $kS(n, k)$.

Łatwo wyprowadzić jawny wzór na liczby $S(n, k)$

Twierdzenie 3.3

$$S(n, k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k - i)^n.$$

DOWÓD: Każdemu podziałowi zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na k niepustych części odpowiada $k!$ surjekcji

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

przyporządkowujących różnym częściom różne liczby spośród 1, 2, ..., k. Liczba wszystkich takich surjekcji jest zatem równa $k!S(n, k)$.

Wcześniej pokazaliśmy, że jest ona równa

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k - i)^n.$$

Porównując obydwa wyniki otrzymujemy żądany wzór.

Liczby Bella

Liczbę podziałów zbioru n-elementowego na niepuste części oznaczamy symbolem B_n i nazywamy n-tą **liczbą Bella**. Na przykład $B_3 = 5$, odpowiednimi podziałami zbioru trójelementowego są

$$123, \quad 12|3, \quad 13|2, \quad 1|23, \quad 1|2|3.$$

Oczywiście $B_1 = 1$, $B_2 = 2$. Ponadto przyjmujemy konwencję $B_0 = 1$.

Zachodzi oczywista zależność

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k),$$

ale jest ona niezbyt użyteczna. Widzieliśmy przed chwilą, że obliczanie nawet pojedynczych liczb $S(n, k)$ jest rachunkowo kłopotliwe. Na szczęście liczby Bella można wyznaczyć korzystając z dość prostej rekurencji.

Każdy podział zbioru $\{1, 2, \ldots, n, n + 1\}$ powstaje z pewnego podziału zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ przez dodanie elementu $n + 1$ do jednej z części podziału albo utworzenie nowej części $\{n + 1\}$ (czyli dodanie tego elementu do zbioru pustego). Spójrzmy na tę część, która zawiera dodany element.

Niech k będzie liczbą pozostałych elementów tej części, możliwe, że $k = 0$. Te k elementów można wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów, a pozostałe $n - k$ elementów podzielić na części na B_{n-k} sposobów. Łącznie mamy zatem

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_{n-k} = \sum_{k=n}^{0} \binom{n}{k} B_k.$$

Odwracając porządek składników otrzymujemy zależność

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

W szczególności

$$B_4 = \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 + \binom{3}{3} B_3 = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 = 15.$$

Zadania

6. Wypisz wszystkie podziały zbioru pięcioelementowego na trzy niepuste części.

7. Znajdź jawne wzory dla: a) $S(n,1)$; b) $S(n,2)$; c) $S(n,n-1)$; d) $S(n,n)$.

$\diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit$

8. Przy założeniu, że kolejność czynników jest nieistotna, liczbę 30 można rozłożyć na czynniki na 4 sposoby: $2 \cdot 3 \cdot 5$, $2 \cdot 15$, $3 \cdot 10$, $5 \cdot 6$. Na ile sposobów można rozłożyć 111 111?

3.3 Nieporządki i punkty stałe permutacji

Roztargniona sekretarka i nieporządki - Średnia liczba punktów stałych - Zadania*

Wyobraźmy sobie absolutnie roztargnioną sekretarkę, która wkłada całkowicie przypadkowo n listów do n zaadresowanych kopert, po jednym liście do każdej. Kiedy prawdopodobieństwo, że wszystkie listy włoży źle jest większe: przy 100 listach, czy przy 1000?

Roztargniona sekretarka i nieporządki

Obliczmy najpierw liczbę takich rozmieszczeń listów, przy których choć jeden list jest umieszczony właściwie. Niech A_i oznacza wszystkie rozmieszczenia, w których i-ty list trafił do i-tej koperty. Wówczas $\#A_i = (n-1)!$. Podobnie

$$\#(A_i \cap A_j) = (n-2)!, \quad \#(A_i \cap A_j \cap A_k) = (n-3)!, \text{ itd.}$$

Zatem $\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ jest równe sumie

$$n \cdot (n-1)! - \binom{n}{2} \cdot (n-2)! + \binom{n}{3} \cdot (n-3)! - \ldots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} =$$

$$= n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} n!}{n!}.$$

Rozmieszczeń, przy których wszystkie listy zostały źle włożone jest

$$n! - \left(n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots - (-1)^n \frac{n!}{n!}\right) = \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}.$$

Ponieważ wszystkich rozmieszczeń listów jest $n!$, więc prawdopodobieństwo, że sekretarka źle włoży wszystkie wynosi

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \approx e^{-1} \approx 0,37.$$

Zatem dla dużych n prawdopodobieństwo to niemal w ogóle nie zależy od n. W szczególności, dla 1000 kopert i 100 kopert jest praktycznie taka sama.

Przenieśmy teraz powyższe obliczenia na grunt formalny. Permutacja **3**2**4**1**5** elementy 2 oraz 5 pozostawia na miejscu: 2 pozostaje na pozycji drugiej, 5 — na pozycji piątej. Takie elementy nazywamy **punktami stałymi** permutacji. Permutację bez punktów stałych nazywamy **nieporządkiem**.

Liczbę nieporządków na zbiorze 1, 2, ..., n oznaczamy symbolem d_n (od ang. *derangement* - nieporządek). Przyjmujemy umowę, że $d_0 = 1$. W świetle powyższych rozważań otrzymujemy następujące:

TWIERDZENIE 3.4 *Liczba nieporządków na zbiorze n-elementowym jest równa*

$$d_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Wielkość ta jest równa w przybliżeniu $n!/e$.

Średnia liczba punktów stałych*

Spójrzmy na punkty stałe permutacji zbioru $\{1, 2, 3\}$:

123 1**3**2 **21**3 231 312 3**2**1.

Pierwsza permutacja ma 3 punkty stałe, druga, trzecia i szósta po jednym. W sumie 6 punktów stałych, więc średnio na jedną permutację wypada jeden punkt stały. Pokażemy, że tak jest również dla permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Obliczmy najpierw liczbę punktów stałych we wszystkich n-elementowych permutacjach łącznie. Załóżmy, że punktami stałymi permutacji jest zadane k spośród n liczb i tylko te liczby. Oznacza to, że na pozostałych $n-k$ miejscach permutacja jest nieporządkiem. Takich nieporządków jest d_{n-k}. Ponieważ te k liczb można wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów, więc łącznie jest $\binom{n}{k} d_{n-k}$ permutacji mających dokładnie k punktów stałych. Łączna liczba punktów stałych to

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} d_{n-k}.$$

Pierwszy składnik, odpowiadający $k = 0$ można pominąć, ale przypomina on, że niektóre permutacje (konkretnie nieporządki) nic do tej sumy nie wnoszą.

Dla dowodu, że średnia liczba punktów stałych przypadająca na jedną z $n!$ permutacji jest równa 1, wystarczy zatem wykazać, że zachodzi tożsamość

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} d_{n-k} = n!.$$

Skorzystamy z zasady indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ tożsamość jest oczywista. Przy przejściu indukcyjnym skorzystamy z prostej do sprawdzenia równości

$$(*)\quad k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1}.$$

Załóżmy, że tożsamość zachodzi dla n, pokażemy, że zachodzi dla $n+1$. Mamy

$$\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} d_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{n} d_{n+1-k} \stackrel{*}{=} \sum_{k=1}^{n+1}(n+1)\binom{n}{k-1} d_{n+1-k} =$$

$$= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d_{n-k} = (n+1)n! = (n+1)!.$$

Przedostatnia równość wynika z sumowania liczby permutacji mających kolejno 0, 1, 2, 3, ... punktów stałych.

W wykładzie 7. pokażemy, jak znaleźć średnią liczbę punktów stałych permutacji bez żadnych rachunków, za pomocą metod teorii prawdopodobieństwa.

Zadania

9. Wyobraźmy sobie maszynę do tasowania kart, która tasuje karty w ten sposób, że każdy układ kart jest równie prawdopodobny. Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że przy tasowaniu talii 52 kart któraś z kart znajdzie się na swojej wcześniejszej pozycji?

◊ ◊ ◊

10. Na ile sposobów można ustawić na szachownicy 8 jednakowych wież tak, aby żadne dwie się nie biły, a ponadto żadna z nich nie znajdowała się na przekątnej A1 - B2 - ... - H8?

11. Wykaż, że liczba nieporządków na zbiorze n-elementowym jest równa zaokrągleniu $n!/e$ do najbliższej liczby całkowitej, tzn.

$$d_n = \text{round}\,\frac{n!}{e}.$$

12.* Wykaż, że dla nieporządków zachodzą równości:

a) $d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$; b) $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

Wykład 4

Równoważności i porządki

Te dwa rodzaje relacji dwuargumentowych odgrywają w matematyce (zwłaszcza dyskretnej istotna rolę, choć w naszych wykładach rola porządków będzie mało widoczna.

4.1 Relacje równoważności, typy i rozbicia na klasy

Równoważności, podziały i klasy abstrakcji - Zadanie o rozdawaniu kart - Zadania

Relacje równoważności są narzędziem klasyfikacji. O ich istotnym znaczeniu przekonamy się w teorii grup i teorii pierścieni (grupy i pierścienie ilorazowe), a także w teorii liczb. Występują też często w sposób niejawny, o czym przekonamy się rozwiązując zadanie o rozdawaniu kart.

Relacje równoważności, podziały i klasy abstrakcji

Relację $\equiv$ na zbiorze X nazywamy **relacją równoważności**, lub krócej **równoważnością**, jeżeli spełnia trzy poniższe warunki:

$$\begin{array}{cl} a \equiv a & \text{zwrotność;} \\ (a \equiv b, \quad b \equiv c) \Longrightarrow (a \equiv c) & \text{przechodniość;} \\ a \equiv b \Longrightarrow b \equiv a & \text{symetria.} \end{array}$$

Przykładami są równość liczb, przystawanie figur i ich podobieństwo. O elementach równoważnych mówimy, że są *tego samego typu* bądź *tej samej klasy*. Łatwo pokazać, że każda relacja równoważności wyznacza **podział** zbioru na rozłączne klasy złożone z elementów parami równoważnych. Nazywamy je **klasami abstrakcji**. Oto dwa przykłady.

Rozważmy relację

$$a \equiv b \Longleftrightarrow b - a \text{ jest liczbą podzielną parzystą.}$$

Wyznacza ona podział zbioru liczb całkowitych na dwie klasy abstrakcji: liczby parzyste i liczby nieparzyste.

Przyjmijmy, że dwa wielokąty są równoważne, gdy mają tę samą liczbę boków. Tak określona relacja wyznacza podział wszystkich wielokątów na nieskończoną liczbę klas abstrakcji: trójkąty, czworokąty, pięciokąty itd.

Odnotujmy jeszcze, że każdy podział zbioru X na zbiory niepuste i rozłączne wyznacza na nim relację równoważności: za równoważne przyjmiemy elementy należące do tej samej klasy.

Tak więc pomiędzy relacjami równoważności a podziałami zbioru istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość: każda równoważność wyznacza podział, a każdy podział — relację równoważności.

Zadanie o rozdawaniu kart

Często z relacji równoważności korzystamy nieświadomie. Ilustruje to II metoda rozwiązania poniższego przykładu.

Przykład 4.1 Na ile sposobów można rozdać 52 karty pomiędzy czterech graczy, dając każdemu po 13 kart?

Rozwiązanie:

Metoda I. Mamy obliczyć, na ile sposobów można 52 karty podzielić po równo pomiędzy czterech graczy. Zauważmy, że sam *sposób* rozdawania nie ma wpływu na liczbę możliwych rozdań. Wyobraźmy sobie, że karty rozdajemy w ten sposób, że najpierw dajemy 13 kart spośród wszystkich 52 pierwszemu graczowi, następnie 13 spośród pozostałych 39 kart drugiemu graczowi itd.

Takich rozdań jest

$$\binom{52}{13}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot\binom{13}{13} = \frac{52!}{13!39!}\cdot\frac{39!}{13!26!}\cdot\frac{26!}{13!13!}\cdot\frac{13!}{13!0!} = \frac{52!}{13!13!13!13!}.$$

Metoda II. Zastanówmy się, ile jest permutacji odpowiadających konkretnemu rozdaniu. Jasne jest, że permutacja, która przestawia pierwsze 13 kart, drugie 13 kart itd. zmienia tylko kolejność, w jakiej gracze otrzymają karty, ale z punktu widzenia graczy są to permutacje *równoważne*. Permutacji takich jest $13! \cdot 13! \cdot 13! \cdot 13!$, zatem takiej wielkości są klasy abstrakcji tej relacji. Skoro wszystkich permutacji 52 kart jest $52!$, a każde rozdanie może być otrzymane na $13! \cdot 13! \cdot 13! \cdot 13!$ sposobów, to różnych rozdań jest

$$\frac{52!}{13!13!13!13!}.$$

Zadania

1. Czy jest relacją równoważności na zbiorze $\mathbb{Z}$ relacja $x \sim y$ określona warunkiem:

a) 3 dzieli $x - y$; b) 3 dzieli $x + 2y$; c) 3 dzieli $x + y$?

2. Całkę nieoznaczoną funkcji f można zdefiniować jako klasę abstrakcji tej funkcji względem pewnej relacji równoważności. Jaka to relacja?

3. Przyjmijmy, że dwa PIN-y są równoważne (na pewno nie dla bankomatu!), gdy różnią się tylko porządkiem cyfr. Jakiej liczebności klasy wyznacza ta relacja?

4. Różnicą symetryczną zbiorów A, B nazywamy zbiór $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dowodzi się, że $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$.
a) Wykaż, że że relacja „$A \sim B \iff (A \div B)$ ma parzystą liczbę elementów” jest relacją równoważności na rodzinie skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$.
b) Ile klas abstrakcji wyznacza ta relacja?

5. Na ile sposobów można rozmieścić $2n$ chłopców w n dwuosobowych pokoi, jeżeli dwa rozmieszczenia uznajemy za równoważne, gdy:
a) każdy dostaje to samo łóżko;
b) każdy jest zakwaterowany w tym samym pokoju:
c) każdy jest zakwaterowany z tą samą osobą?

$\diamondsuit \diamondsuit \diamondsuit$

6. Ile jest relacji równoważności na zbiorze sześcioelementowym?

W zadaniach 7 i 8 możesz skorzystać z hipotezy continuum (p. I tom), choć nie jest to konieczne.

7.* Wykaż, że relacja „$A \sim B \iff (A \div B)$ jest zbiorem skończonym” jest relacją równoważności na rodzinie $P(\mathbb{N})$ podzbiorów $\mathbb{N}$. Ile klas abstrakcji na $P(\mathbb{N})$ wyznacza ta relacja?

8.* Określmy na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ relację

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

a) Sprawdź, że jest to relacja równoważności.
b) Wykaż, że każda z klas przecina dowolny niepusty przedział otwarty.
c) Ile klas abstrakcji wyznacza?
d) Wykaż, że istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że na dowolnym niepustym przedziale otwartym przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste.

4.2 Porządki i twierdzenie Spernera

Porządki liniowe i porządki częściowe - Elementy skrajne - Łańcuchy, antyłańcuchy i twierdzenie Spernera - Zadania

Większość zbiorów rozważanych w matematyce ma pewną strukturę, porządkującą ich elementy. Na przykład, gdy myślimy o zbiorze liczb naturalnych przedstawia się on nam w naturalnym porządku 0, 1, 2, ..., a nie w postaci chaotycznie rozrzuconych liczb. W matematyce dyskretnej rzadko stykamy się z porządkami aż tak oczywistymi.

Porządki liniowe i porządki częściowe

Relację $\leqslant$ na zbiorze X nazywamy **relacją porządku**, lub krócej **porządkiem**, jeżeli spełnia trzy poniższe warunki:

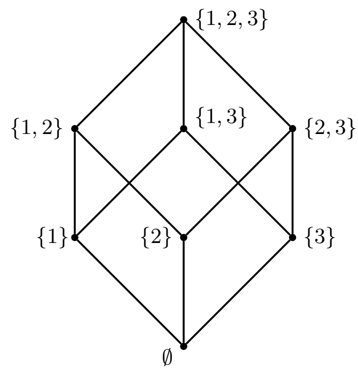
$$\begin{array}{rl} a \leqslant a & \text{zwrotność;} \\ (a \leqslant b, \quad b \leqslant c) \Longrightarrow (a \leqslant c) & \text{przechodniość;} \\ (a \leqslant b, \quad b \leqslant a) \Longrightarrow a = b & \text{słaba antysymetria.} \end{array}$$

Najważniejszymi przykładami porządku są relacja $\leqslant$ na liczbach i relacja zawierania $\subset$ na zbiorach. Gdy $a \leqslant b$, to mówimy, że a jest poprzednikiem b (albo b jest następnikiem a).

Te dwa porządki różnią się zasadniczo. Dla dowolnych dwu liczb mamy $a \leqslant b$ lub $b \leqslant a$. Porządek spełniający taki warunek nazywamy **porządkiem liniowym**. Porządek nie spełniający tego warunku nazywamy **porządkiem częściowym**. Najważniejszym przykładem porządku częściowego jest relacja zawierania $\subset$.

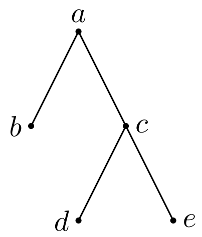
Na kursie analizy dominuje porządek liniowy, na kursach matematyki dyskretnej w praktyce występują tylko porządki częściowe.

Porządki częściowe graficznie przedstawia się za pomocą **diagramów Hassego**. Diagram obok przedstawia rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3\}$ uporządkowaną przez relację zawierania. Pokazuje on tylko linie łączące dany element z jego *bezpośrednimi* następnikami i poprzednikami. Pozostałe zależności wnioskujemy z przechodniości porządku.



Elementy skrajne

W porządkach częściowych trzeba odróżniać element *maksymalny* od *największego*. Niech $\leqslant$ będzie częściowym porządkiem na X. Element będący następnikiem każdego elementu nazywamy **największym**; element, który nie ma innych następników niż on sam nazywamy **maksymalnym**. Analogicznie określamy element **najmniejszy** oraz **minimalny**. Porządek na rysunku ma jeden element największy (zarazem maksymalny) a i trzy minimalne: b, d, e. Najmniejszych nie ma.



Oczywiście element największy jest maksymalnym, ale nie każdy maksymalny jest największym. Element największy jest co najwyżej jeden, maksymalnych może być wiele. Podobnie jest z elementami najmniejszymi i minimalnymi.

Łańcuchy, antyłańcuchy i twierdzenie Spernera

Jak już wspomnieliśmy na wstępie, w naszych wykładach pojęcie porządku odgrywa rolę skromną. Tu chcemy pokazać, że nawet na bardzo elementarnym poziomie pojawiają się w tej tematyce nietrywialne twierdzenia.

Niepusty podzbiór porządku częściowego złożony z elementów parami porównywalnych nazywamy **łańcuchem**, złożony z elementów parami nieporównywalnych — **antyłańcuchem**. Na powyższym diagramie łańcuchami są zbiory $\{a, b\}$, $\{a, c, d\}$ i $\{a, c, e\}$ i każdy ich niepusty podzbiór. Antyłańcuchami są zbiory $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$ oraz $\{b, d, e\}$. Zbiory jednoelementowe są zarazem łańcuchami i antyłańcuchami, ale zazwyczaj je pomijamy.

TWIERDZENIE 4.1 (Spernera, 1928)
Antyłańcuch w rodzinie podzbiorów zbioru n-elementowego ma co najwyżej

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

elementów.

Dowód: Wykażemy, że rodzinę $P(\{1, 2, \ldots, n\})$ wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ można rozbić na $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ łańcuchów. Ponieważ każdy antyłańcuch może mieć z łańcuchem co najwyżej jeden element wspólny, wynika stąd żądana nierówność.

Każdy łańcuch maksymalny ma postać

$$\emptyset \subset \{a_1\} \subset \{a_1, a_2\} \subset \{a_1, a_2, a_3\} \subset \ldots \subset \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}.$$

Takich łańcuchów jest $n!$.

Weźmy $k = \lfloor n/2 \rfloor$ i rozważmy wszystkie łańcuchy zawierające ustalony zbiór k-elementowy. Każdy taki łańcuch powstaje przez kolejne odrzucanie k elementów i kolejne dodawanie $n-k$-elementów. Jest ich zatem $k!(n-k)!$. Pozostaje zauważyć, że każdy element $P(\{1, 2, \ldots, n\})$ jest elementem któregoś z tych $k!(n-k)!$ łańcuchów.

Zadania

9. Wskaż elementy najmniejsze, największe, minimalne i maksymalne w rodzinie niepustych podzbiorów $\{1, 2, \ldots, n\}$ uporządkowanej przez relację zawierania.

10. Uzasadnij, że element największy (najmniejszy) jest co najwyżej jeden i jest elementem maksymalnym (odpowiednio: minimalnym). Pokaż też, że jeśli w zbiorze skończonym jest tylko jeden element maksymalny (minimalny), to jest on elementem największym (odpowiednio: najmniejszym).

11. Na zbiorze $\{2, 3, 4, \ldots, 40\}$ określamy porządek częściowy $x \leqslant y$, jeżeli x dzieli y. Ile elementów minimalnych, a ile maksymalnych ma ta relacja?

$\diamondsuit \quad \diamondsuit \quad \diamondsuit$

12. Na zbiorze ciągów zerojedynkowych długości n określmy naturalny porządek po współrzędnych. Jak długie łańcuchy i antyłańcuchy występują w tym porządku.

13.* Wykaż, że rodzina $P(\mathbb{N})$ podzbiorów $\mathbb{N}$ uporządkowana przez relację zawierania zawiera: a) łańcuch mocy continuum; b) antyłańcuch mocy continuum.