LICZBY, FIGURY i INNE A(BS)TRAKCJE

LICZBY,
FIGURY i INNE
A(BS)TRAKCJE

Marek Zakrzewski

GiS

Projekt okładki
DWA:WIATRY Pracownia graficzna

Skład komputerowy książki w systemie LaTeX wykonał autor.
Rysunki wykonał Marian Gewert.

ISBN 978–83–67234–01–6

Wydanie I, Wrocław 2022
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BIS Bierońscy, Sp. kom.

Jeżeli ludzie nie wierzą, że matematyka jest prosta, to tylko dlatego, że nie zdają sobie sprawy, jak skomplikowane jest życie.

John von Neumann, cyt. wg
https:mathshistory.st-andrews.ac.uk

Matematyka jest istotnym składnikiem naszej kultury. Ona może — i powinna — stanowić ważny element wykształcenia.

Abe Shenitzer, *Teaching mathematics*, z tomu
Mathematics Tomorrow, Springer Verlag 1981

Spis treści

Czym zajmują się matematycy?

W miarę wykształcony człowiek słyszał coś o teorii względności i Einsteinie, o DNA, o ewolucji i Darwinie, czy o tablicy Mendelejewa. Ale jego wiedza matematyczna kończy się na logarytmach, geometrii analitycznej bądź początkach analizy, czyli na matematyce XVII w. Najgłębsze znane ze szkoły twierdzenia — twierdzenie Pitagorasa i wzór na objętość kuli — mają ponad 2200 lat, a nazwiska Eulera, Galois czy Riemanna z niczym się nie kojarzą.

Absolwent szkoły średniej może sobie wyobrazić, czym zajmuje się fizyk, biolog czy historyk. Ale nawet absolwent wyższej uczelni nie bardzo wie, **co właściwie robi matematyk**. Niniejsza książka powinna dać pewne wyobrażenie o tym, czym zajmowali się matematycy przez ostatnie 400 lat, miejscami dochodzi do tematyki uprawianej współcześnie.

Książka przeznaczona jest dla osób, które **nie zajmują się matematyką zawodowo**, ale chciałyby zorientować się, czym zajmują się matematycy. Przyjąłem założenie, że taki Czytelnik nie ma powodu by przedzierać się przez skomplikowane rachunki czy też śledzić dłuższe subtelne rozważania. Czytelnik, który uzna, że zadania i materiał książki są za łatwe może sięgnąć do mojego *Dyskretnego uroku matematyki* — książki obszerniejszej i głębszej.

Wśród Czytelników znajdą się prawdopodobnie inżynierowie, ekonomiści, filozofowie czy uczniowie starszych klas szkół średnich. Pisałem tę książkę z nadzieją, że zainteresuje ona też niektórych architektów, biologów, historyków i innych odbiorców mniej typowych dla tej tematyki.

Każdy z wykładów opowiada o jakimś **ważnym problemie czy ważnej tematyce**. Pozwolą one zorientować się, jak w matematyce pojawiają się nowe problemy badawcze, jak matematyka rozwija się przez wnikliwe studiowanie wąskiej tematyki czy też dostrzeganie nowych aspektów starych dyscyplin.

Pokazujemy też przykłady nowych ciekawych problemów, które pojawiły się w drugiej połowie XX wieku.

Kolejne części są niezależne od pozostałych, a poziom trudności zazwyczaj nieco rośnie w obrębie każdej z nich. Czytelnik, który zgubi się czytając jakiś wykład może bezpiecznie przejść do lektury kolejnej części. Wyjątek stanowi część VI, której lektura wymaga znajomości wykładów 10, 12 i 14. Podrozdziały oznaczone gwiazdką można opuścić bez szkody dla dalszej lektury.

Powszechnie wiadomo, że matematyka ma rozległe zastosowanie w fizyce oraz innych naukach przyrodniczych i technicznych, a ostatnio coraz częściej także w naukach społecznych. Ale zastosowania te wymagają zazwyczaj znacznie bardziej zaawansowanej matematyki i pewnego wykształcenia w dyscyplinie, do której matematykę się stosuje. Dlatego o zastosowaniach wspominamy sporadycznie, tylko tam, gdzie można było to zrobić bez wyraźnego wydłużania tekstu.

Zadania są zazwyczaj bardzo proste, umożliwiają Czytelnikowi sprawdzenie, na ile zrozumiał zasadniczy tekst wykładu. Zadania po potrójnym symbolu karo mogą wymagać pomysłu, ale rozwiązanie jest prawie zawsze krótkie.

Uczciwie zaznaczmy, że wybór tematyki jest tendencyjny. Co prawda chwilami mówimy o matematyce niemal współczesnej, ale ograniczamy się do problemów zrozumiałych dla niespecjalisty. Przeważająca część matematyki ma charakter hermetyczny: nawet próba wyjaśnienia tematyki matematykowi o innej specjalności często kończy się niepowodzeniem.

Indeks nie obejmuje nazwisk, które pojawiły się wyłącznie w końcowej notce o polskiej szkole matematycznej ze względu na luźny związek notki z resztą książki.

$\diamondsuit \quad \diamondsuit \quad \diamondsuit$

Wydawanie książek matematycznych adresowanych do niematematyków jest zajęciem — delikatnie rzecz ujmując — ryzykownym. Dziękuję moim Kolegom-Wydawcom Marianowi Gewertowi i Zbigniewowi Skoczylasowi, że gotowi byli to ryzyko podjąć. Dziękuję im również za trud włożony w redakcję językową i merytoryczną oraz przygotowanie rysunków. Z praktyki wiadomo, że nawet przy najstaranniejszej redakcji jakieś błędy pozostają. Oczywiście odpowiada za nie wyłącznie autor.

Wrocław, 7 czerwca 2022 Marek Zakrzewski

I

Liczby

…postanowiłem ponumerować swoje rozdziały liczbami pierwszymi 2, 3, 5, 7, 11, 13 i tak dalej, ponieważ je lubię.

Mark Haddon, *Dziwny przypadek psa nocną porą*,
Świat Książki, 2003, przekł. Małgorzata Grabowska

Osobie dalekiej od matematyki może wydawać się, że matematyka to nauka o liczbach i figurach. Taki obraz odpowiada temu, czym była matematyka niemal dwa i pół tysiąca lat temu. W istocie, najważniejszy traktat matematyczny wszech czasów — *Elementy* Euklidesa, powstałe ok. roku 300 p.n.e. — poświęcony jest w całości geometrii i arytmetyce.

Arytmetyka w takim ujęciu, jak u Euklidesa nazywa się dziś arytmetyką teoretyczną albo teorią liczb. Najsławniejszym arytmetycznym twierdzeniem *Elementów* jest twierdzenie Euklidesa: *Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.* Jednak *Elementy* to przede wszystkim geometria. Najważniejszym traktatem starożytności poświęconym głównie arytmetyce była zapewne *Arytmetyka* Diofantosa (ok. 250 n.e.).

Chociaż współczesna matematyka bardzo odeszła od liczb i figur, wciąż żywe są problemy, które mógłby postawić wnikliwy Czytelnik przy lekturze *Elementów* czy *Arytmetyki* Diofantosa. Nasze wykłady nawiązują w pewnym stopniu do tematyki obu traktatów, z drugiej zaś strony zahaczają o współczesność.

♢ ♢ ♢

Pomiędzy czasami Diofantosa a wiekiem XVII teoria liczb rzadko była przedmiotem poważnego zainteresowania. Żywą dyscyplinę uczynił z niej dopiero Fermat (1601-65). Fermat wskazał najciekawsze tematy i sformułował wiele hipotez. Najsławniejsza z nich, odnotowana na marginesie *Arytmetyki* Diofantosa głosi, że dla $n \geqslant 3$ równanie

$$x^n + y^n = z^n$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach naturalnych.

Chociaż prawdziwy renesans teorii liczb zaczął się dopiero 70-80 lat później wraz z Eulerem, to większość prac Eulera, Lagrange'a, Legendre'a, Gaussa i wielu matematyków późniejszych nawiązywała do zainteresowań Fermata. A w roku 1993 Andrew Wiles wykazał prawdziwość hipotezy Fermata (uzupełnienie luki w dowodzie wspólnie z Richardem Taylorem, rok później).

Wykład 1

Liczby pierwsze

Teoria liczb zajmuje się własnościami liczb naturalnych, tzn. liczb 1, 2, 3, ..., często zalicza się do nich również zero. Szczególną rolę w teorii liczb odgrywają liczby pierwsze. Są czymś w rodzaju cegiełek, z których zbudowane są dodatnie liczby naturalne. Przypomnijmy, że liczba **pierwsza** to liczba, która ma *dokładnie* dwa dzielniki: 1 i samą siebie. Liczba **złożona** to liczba, która ma więcej niż dwa dzielniki. Liczba 1 nie jest ani liczbą pierwszą, ani złożoną.

Liczby pierwsze są przedmiotem bezinteresownej fascynacji matematyków, jak też podstawą wszelkich zastosowań teorii liczb.

1.1 Twierdzenie Euklidesa i sito Eratostenesa

Twierdzenie Euklidesa - Sito Eratostenesa - Zadania

Około 2300 lat temu Euklides wykazał, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, a niedługo potem Eratostenes pokazał, jak „wyłowić" wszystkie liczby pierwsze za pomocą algorytmu znanego dziś jako sito Eratostenesa.

Twierdzenie Euklidesa

To proste twierdzenie jest podstawowym twierdzeniem całej teorii liczb.

TWIERDZENIE 1.1 (Euklidesa)
Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

DOWÓD: Przypuśćmy, że jest ich skończenie wiele: p_1, p_2, ..., p_n. Rozważmy liczbę

$$N = p_1 p_2 \dots p_n + 1.$$

Liczba ta jest liczbą pierwszą albo ma pewien inny dzielnik pierwszy. Dzielnikiem tym nie może być żadna z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_n$, gdyż N przy dzieleniu przez którąkolwiek z nich daje resztę 1. Zatem istnieje jeszcze jakaś inna liczba pierwsza. Sprzeczność z założeniem, że $p_1, p_2, \ldots, p_n$ są wszystkimi liczbami pierwszymi. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Sito Eratostenesa

Aby znaleźć wszystkie liczby pierwsze mniejsze od ustalonej liczby należy po prostu *odsiać* wszystkie złożone i oczywiście jedynkę. Służy do tego **sito Eratostenesa**. Eratostenes był aleksandryjskim uczonym z III w. p.n.e. Dziś pamiętamy go przede wszystkim jako tego, który obliczył długość południka. A dla matematyków jest on głównie odkrywcą *sita*.

Zasadę działania sita Eratostenesa opiszemy na przykładzie. Wypiszmy wszystkie liczby naturalne od 2 do 45.

◇	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45

Pozostawmy 2 (jest liczbą pierwszą) i skreślmy wszystkie pozostałe parzyste, posuwając się krokiem co 2. Otrzymamy wówczas:

◇	**2**	3	◇	5	◇	7	◇	9	◇	11	◇	13	◇	15
◇	17	◇	19	◇	21	◇	23	◇	25	◇	27	◇	29	◇
31	◇	33	◇	35	◇	37	◇	39	◇	41	◇	43	◇	45

Najwcześniejszą liczbą nieskreśloną (oprócz oczywiście 2) jest 3. Pozostawmy ją — to kolejna liczba pierwsza — i skreślmy wszystkie krotności trójki, posuwając się krokiem, co 3.

Otrzymamy:

◇	**2**	**3**	◇	5	◇	7	◇	◇	◇	11	◇	13	◇	◇
◇	17	◇	19	◇	◇	◇	23	◇	25	◇	◇	◇	29	◇
31	◇	◇	◇	35	◇	37	◇	◇	◇	41	◇	43	◇	◇

Na tym etapie pozostawiamy 5 — kolejna liczba pierwsza, po czym, posuwając się krokiem co 5 skreślamy krotności 5:

◇	**2**	**3**	◇	**5**	◇	7	◇	◇	◇	11	◇	13	◇	◇
◇	17	◇	19	◇	◇	◇	23	◇	◇	◇	◇	◇	29	◇
31	◇	◇	◇	◇	◇	37	◇	◇	◇	41	◇	43	◇	◇

Zauważmy, że liczba złożona n musi mieć dzielnik mniejszy bądź równy $\sqrt{n}$. Jeśli bowiem $n = pq$, a czynnik $p > \sqrt{n}$, to $q < \sqrt{n}$. Dlatego przesiewanie kończymy, gdy osiągniemy $\sqrt{n}$. W tym przypadku opisany krok był już ostatnim, gdyż $7 > \sqrt{45}$. Efektem takiego przesiewania jest zatem poniższa lista liczb pierwszych poniżej 45:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43.$$

Algorytm ten nie jest praktyczny, ale pewne zaawansowane rozumowania współczesnej teorii liczb wciąż do tej prostej techniki nawiązują.

Zadania

1. Po ilu iteracjach sita Eratostenesa otrzymamy wszystkie liczby pierwsze poniżej 100?

◊ ◊ ◊

2. Dokończ poniższy dowód (Th. Stjeltjes, 1890) twierdzenia Euklidesa: *Załóżmy, że jest tylko skończenie wiele liczb pierwszych:* $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$. *Rozpatrzmy liczbę* $N = p_1 + p_2 p_3 \ldots p_k$.

1.2 Kilka pytań o liczby pierwsze

Hipoteza Goldbacha - Liczby bliźniacze - Ciągi arytmetyczne liczb pierwszych - Zadania

Najtrudniejsze otwarte problemy teorii liczb dotyczą liczb pierwszych. Wiele z nich łatwo wyjaśnić już uczniowi szkoły podstawowej, ale nawet uzyskanie wyników częściowych wymaga stosowania zaawansowanego aparatu matematycznego.

Hipoteza Goldbacha

Liczby pierwsze definiowane są za pomocą mnożenia. Dlatego niemal każdy problem wiążący liczby pierwsze z dodawaniem jest trudny. Najsłynniejszym przykładem takiego problemu jest **hipoteza Goldbacha**. Głosi ona, że każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwu liczb pierwszych. Na przykład

$$4 = 2 + 2, \quad 6 = 3 + 3, \quad 8 = 3 + 5, \quad 10 = 3 + 7, \quad 12 = 5 + 7.$$

Hipotezę tę postawił w liście do Eulera (1742) Christian Goldbach.

Hipoteza Goldbacha wciąż pozostaje hipotezą, ale przez ostatnie blisko 100 lat osiągane były wyniki częściowe. Już w roku 1930 rosyjski matematyk Lew Sznirelman wykazał, że każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci sumy co najwyżej N składników pierwszych, gdzie N jest pewną stałą mniejszą niż 800 000.

Bezpośrednią konsekwencją hipotezy Goldbacha jest tzw. **słaba hipoteza Goldbacha**: Każda liczba nieparzysta większa od 5 jest sumą trzech liczb pierwszych. Rzeczywiście, każda taką liczbę można przedstawić w postaci $3 + 2k$, gdzie $k \geqslant 2$, a na mocy hipotezy Goldbacha $2k$ jest sumą dwu liczb pierwszych.

Słaba hipoteza Goldbacha okazała się problemem łatwiejszym. Już w roku 1937, inny Rosjanin, Iwan Winogradow wykazał, że jest ona prawdziwa dla wszystkich liczb większych od pewnej stałej C. Teoretycznie, wystarczyło zatem sprawdzić jeszcze wszystkie przypadki poniżej C, aby uzyskać pełny dowód tej słabszej hipotezy Goldbacha. Ale wartość stałej C (wyliczona kilka lat później) wynosi około

$$e^{e^{16{,}038}} \approx 8 \cdot 10^{4\,008\,659},$$

więc jasne jest, że takie podejście nie byłoby realistyczne.

Pełny dowód słabej hipotezy Goldbacha przedstawił w roku 2013 peruwiański matematyk Harald Helfgott. Wynika stąd w szczególności, że każda liczba naturalna większa od 3 da się przedstawić w postaci sumy czterech lub mniej liczb pierwszych (p. zad. 6).

Liczby bliźniacze

Parę liczb pierwszych postaci p, $p + 2$ nazywamy **liczbami bliźniaczymi**. Przykładem są pary 3-5, 5-7 czy 11-13. Od czasów starożytności przypuszcza się, że par takich jest nieskończenie wiele, ale do niedawna nawet na horyzoncie nie było widać cienia dowodu.

Jednak w kwietniu 2013 chiński matematyk Yitang Zhang uzyskał *wyraźnie* słabszy rezultat: pokazał, że istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych różniących się o mniej niż 70 milionów. Mogłoby się wydawać, że tak słaby wynik jest nieistotny, ale wskazał on drogę do dalszych badań.

Już w lipcu tegoż roku tę odległość zmniejszono do 5000 (Terence Tao, Australijczyk chińskiego pochodzenia, i uczestnicy *Polymath Project*), w listopadzie poniżej 600, w kwietniu 2014 do 246.

Z perspektywy życia akademickiego Yitang Zhang jest postacią niezwykłą. Od czasu doktoratu przez wiele lat nie miał kontaktów zawodowych ze środowiskiem akademickim. Pracował w instytucjach dla naukowca skrajnie nietypowych, jak np. restauracje czy motele.

Ciągi arytmetyczne liczb pierwszych

Trójka liczb 3, 5, 7 jest przykładem „trojaczków” liczb pierwszych. Nietrudno wykazać, że innej takiej trójki nie ma.

Rzeczywiście, każda z liczb p, $p+2$, $p+4$ daje przy dzieleniu przez 3 inną resztę. Resztami są 0, 1, 2, więc jedną z tych reszt jest zero. Tak więc któraś z trzech liczb musi być równa 3, a skoro wszystkie muszą być pierwsze, to $p = 3$.

Oznacza to, że nie ma innego trójwyrazowego ciągu arytmetycznego o różnicy 2 złożonego z liczb pierwszych. Podobne i dłuższe ciągi o większej różnicy istnieją. Na przykład

$$5, 11, 17, 23, 29$$

jest ciągiem o różnicy 6. Konstruowanie odpowiednio długich ciągów arytmetycznych liczb pierwszych to rzecz niełatwa. Obecnie (maj 2022) najdłuższy taki ciąg ma 27 wyrazów, skonstruowany został przez Roba Gahana (2019). Przez wiele lat kolejne rekordy należały do wrocławskiego matematyka Jarosława Wróblewskiego.

W roku 2004 Ben Green i Terence Tao wykazali, że istnieją dowolnie długie skończone ciągi arytmetyczne złożone z liczb pierwszych. Z drugiej strony łatwo pokazać, że nie ma nieskończonego ciągu o tej własności.

Zadania

3. Na ile sposobów liczbę 44 można przedstawić w postaci sumy dwu liczb pierwszych?

4. Wskaż wszystkie pary liczb bliźniaczych poniżej 30.

$\diamondsuit \ \diamondsuit \ \diamondsuit$

5. Uzasadnij, że dla $n \geqslant 2$ każda z liczb $n!+2$, $n!+3$, $\ldots$, $n!+n$ jest złożona. Wywnioskuj stąd, że nie ma nieskończonego ciągu arytmetycznego złożonego z liczb pierwszych.

6. Wykaż, że ze słabej hipotezy Goldbacha wynika, iż każda liczba naturalna większa od 3 jest sumą czterech lub mniej liczb pierwszych.

7. Pokaż, jak z hipotezy Goldbacha wywnioskować twierdzenie Czebyszewa: *Dla $n \geqslant 2$ pistnieje liczba pierwsza większa od n, a mniejsza od $2n$.*

Wykład 2

Granica, logarytm naturalny i rozmieszczenie liczb pierwszych

Do XVII w. teoria liczb kojarzyła się głównie z algebrą, czasem z geometrią — przykładem trójki pitagorejskie czy liczby wielokątne (p. str. 18). Ale od połowy XVIII w. teoria liczb wykorzystuje też coraz częściej metody analizy. Najstarszym wynikiem łączącym obie dyscypliny jest twierdzenie Eulera (p. str. 75). Tu omówimy kilka klasycznych wyników uzyskanych metodami analizy pochodzących z wieku XIX.

2.1 Pojęcie granicy i logarytm naturalny

Stała e i pojęcie granicy - Logarytm naturalny - Zadania

Często uważa się, że granicą oddzielającą matematykę elementarną od wyższej jest pojęcie granicy. W istocie już teraz okaże się ono potrzebne do zdefiniowania logarytmu naturalnego, a w różnych formach pojawi się też przy wprowadzaniu takich pojęć jak pochodna i całka.

Stała e i pojęcie granicy

Rozważmy ciąg

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Łatwo obliczyć jego początkowe wyrazy:

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25, \qquad a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2,370, \ldots$$

Można wykazać, że jest to ciąg rosnący. Aby lepiej zrozumieć jego zachowanie spójrzmy na dalsze wyrazy:

n	$1+\frac{1}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10	1,1	2,59374246...
100	1,01	2,70481383...
1 000	1,001	2,71692393...
1 000 000	1,000001	2,71828047...
1 000 000 000	1,000000001	2,71828183...

Im dalsze wyrazy ciągu rozważamy, tym bardziej przekonujemy się, że wyrazy ciągu zbliżają się do granicznej liczby $2,71828183\ldots$. Tę graniczną liczbę oznaczamy symbolem e.

Formalnie zapisujemy to wzorem

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Symbol lim jest skrótem łacińskiego słowa *limes* — granica. Mówi nam ona do jakiej wartości zbliżają się wyrazy ciągu przy n dążącym do nieskończoności.

Nie każdy ciąg ma granicę, np. wyrazy ciągu $(-1)^n$ przyjmują na przemian dwie wartości 1 i -1 do żadnej nie dążąc.

Rozważany wyżej ciąg zbiega do e bardzo powoli. Przybliżoną wartość e łatwiej obliczać korzystając z innej zależności:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right).$$

Już szósty wyraz

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\approx 2,718056$$

daje poprawne trzy cyfry po przecinku. Wyraz 11-ty daje dokładność taką jak miliardowy wyraz ciągu definiującego e.

Logarytm naturalny

Logarytmem naturalnym nazywamy logarytm o podstawie e, czyli dla $a > 0$

$$\ln a = \log_e a.$$

Na tym etapie nie widać, dlaczego jest on naturalny. Zrozumiemy to po wprowadzeniu pochodnych i całek.

Przypomnijmy, że logarytm (przy dowolnej podstawie) iloczynu jest sumą logarytmów. W szczególności

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b,$$

a w konsekwencji

$$\ln a^n = n \ln a.$$

Zadania

1. Dokończ obliczenia:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \ldots$$

Znajdź granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

2. Uzasadnij, że ciąg $\ln 10^n$ jest ciągiem arytmetycznym i znajdź jego różnicę.

2.2 Rozmieszczenie liczb pierwszych

Twierdzenie o rozmieszczeniu liczb pierwszych - Oszacowanie Gaussa i logarytm całkowy - Szacowanie p_n - Zadania

Analizując rozmieszczenie liczb pierwszych pośród liczb naturalnych niełatwo dostrzec jakąkolwiek prawidłowość. Odkrycie w XIX w. pewnego ładu w tym chaosie — twierdzenie o rozmieszczeniu liczb pierwszych — należy do najgłębszych wyników matematyki.

Proste prawa rządzące rozmieszczeniem liczb pierwszych *sformułowali* pod koniec XVIII w. niezależnie Gauss (jako 15-latek, ale wiemy o tym tylko z jego późniejszej korespondencji) i Adrien-Marie Legendre. Obydwaj uczeni starali się oszacować liczbę liczb pierwszych leżących w przedziale $[1, n]$, dziś oznaczamy ją symbolem $\pi(n)$. Chociaż ich szacowania różniły się w szczegółach, każde z nich jest równoważne twierdzeniu, o jakim mowa niżej.

Twierdzenie o rozmieszczeniu liczb pierwszych (TRLP)

Spójrzmy na poniższą tabelę:

n	$\pi(n)$	$n/\pi(n)$
10	4	2,5
100	25	4,0
1000	168	6,0
10 000	1 229	8,1
100 000	9 592	10,4
1 000 000	78 498	12,7
10 000 000	664 579	15,0

Zauważmy, że liczby w prawej kolumnie tworzą (pomijając początkowe wyrazy) w przybliżeniu ciąg arytmetyczny o różnicy 2,3. Gauss wiedział, że $2,3 \approx \ln 10$, wysnuł więc przypuszczenie, iż

$$\frac{n}{\pi(n)} \approx \ln n, \qquad \text{czyli} \qquad \pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}.$$

TWIERDZENIE 2.1 (Hadamarda - Vallée-Poussina o rozmieszczeniu liczb pierwszych) *Niech $\pi(n)$ oznacza ilość liczb pierwszych mniejszych bądź równych n. Wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln n}{n} = 1.$$

Oznacza to, że dla dużych n zachodzi asymptotyczna równość

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}.$$

Pierwsze kroki na drodze do dowodu poczynili Bernhard Riemann i Pafnutij Czebyszew w połowie XIX w. Pełny dowód twierdzenia przedstawili niezależnie w roku 1896 francuski matematyk Jacques Hadamard i belgijski Charles de la Vallée-Poussin, stosując zaawansowane metody funkcji zespolonych. Chociaż późniejsze dowody były prostsze, to wciąż wychodzą poza ramy elementarnego kursu teorii liczb.

Twierdzenie to fascynowało nie tylko matematyków. Jeden z najbardziej elementarnych — co nie oznacza najprostszych — dowodów podał wybitny polski ekonomista (!) Michał Kalecki. Heurystyczne rozumowanie wyjaśniające, dlaczego twierdzenie to *powinno* zachodzić dał fizyk Gustav Hertz (Nobel 1925).

Oszacowanie Gaussa i logarytm całkowy

Twierdzenie o rozmieszczeniu liczb pierwszych (TRLP) nie mówi, jaki jest błąd oszacowania, ani nie wyklucza istnienia oszacowań dokładniejszych. Gauss rozmieszczeniem liczb pierwszych interesował się przez całe życie. Aby zdobyć dokładniejszą wiedzę empiryczną sporządził nawet listę liczb pierwszych poniżej 3 000 000. Łącząc obserwację z teorią zauważył, że większą dokładność daje aproksymacja $\pi(x) \approx \mathrm{Li}\,(x)$, gdzie

$$\mathrm{Li}\,(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t},$$

zwanej **logarytmem całkowym**.

Porównując wartości obu funkcji można przypuszczać, że dla dowolnego x

$$\pi(x) < \mathrm{Li}\,(x), \qquad \text{czyli} \qquad \pi(x) - \mathrm{Li}\,(x) < 0.$$

Ale w roku 1914 John Edensor Littlewood wykazał, że różnica ta zmienia znak nieskończenie wiele razy. Tak więc funkcja $\mathrm{Li}\,(x)$ czasem przeszacowuje wartość $\pi(x)$, a czasem niedoszacowuje.

Uczeń Littlewooda Stanley Skewes wykazał, że pierwsza zmiana znaku nastąpi przed

$$10^{10^{10^{34}}}.$$

W roku 2000 pokazano, że pierwsza zmiana znaku nastąpi już przed $1,4 \cdot 10^{316}$.

Przez lata liczba Skewesa była największą liczbą, jaka w matematyce pojawiła się w sposób naturalny. Obecnie większe liczby pojawiają się w teorii Ramseya (p. str. 119).

Błąd aproksymacji $\pi(x) \approx \mathrm{Li}\,(x)$ jest ściśle związany z **hipotezą Riemanna**, najsławniejszym nie rozwiązanym problemem matematyki.

Szacowanie p_n

Pokażemy teraz, że n-ta liczba pierwsza p_n jest rzędu $n \ln n$. W rachunkach skorzystamy ze spostrzeżenia, że logarytm rośnie dużo wolniej niż jego argument. Formalnie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

a w konsekwencji także

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \ln n}{\ln n} = 0.$$

Zastosujmy TRLP do przedziału $[1, n\ln n]$:

$$\pi(n\ln n) \approx \frac{n\ln}{\ln(n\ln n)} = \frac{n\ln n}{\ln n + \ln\ln n} = \frac{n}{1+\frac{\ln\ln n}{\ln n}} \approx n.$$

Zatem

$$\pi(n\ln n) \approx n.$$

Oznacza to, że poniżej $n\ln n$ jest w przybliżeniu n liczb pierwszych, więc p_n jest w przybliżeniu równa $n\ln n$. Chociaż to przybliżenie jest mało dokładne, to można wykazać, że wraz z n dążącym do nieskończoności jego błąd względny dąży do zera.

Zadania

3. Jaki procent wszystkich liczb naturalnych z przedziału $[1, n]$ stanowią liczby pierwsze, gdy: a) $n = 1000$; b) $n = 1\,000\,000$. Jaki błąd procentowy otrzymujemy rozwiązując to zadanie za pomocą aproksymacji $\pi(n) \approx n/\ln n$?

♢ ♢ ♢

4. Czebyszew wykazał, że dla dostatecznie dużych n zachodzi podwójna nierówność

$$0,89\frac{n}{\ln n} < \pi(n) < 1,11\frac{n}{\ln n}.$$

Wywnioskuj z niej, że dla takich n pomiędzy n a n^2 istnieje liczba pierwsza.

2.3 Dwa „łatwe” twierdzenia

Twierdzenie Czebyszewa - Twierdzenie Dirichleta - Zadania

Spójrzmy na jeszcze dwa interesujące twierdzenia związane z rozmieszczeniem liczb pierwszych. Wspomniana w tytule łatwość obu twierdzeń jest tylko częściowa. Można je łatwo sformułować, ale same dowody — zwłaszcza twierdzenia Dirichleta — są trudne.

Twierdzenie Czebyszewa

Znaczny postęp na drodze do znalezienia dowodu twierdzenia o rozmieszczeniu liczb pierwszych uzyskał w połowie XIX w. rosyjski matematyk Pafnutij Czebyszew. Wykazał on w szczególności, że jeśli w ogóle granica wyrażenia $\pi(n)\ln n/n$ *istnieje*, to musi być równa 1. Jak widać, to kwestia samego istnienia tej granicy stanowiła największą przeszkodę do pokonania.

Zanim Czebyszew uzyskał ten wynik udowodnił bardzo proste twierdzenie. Sama hipoteza występuje już w rękopisach Eulera, ale droga od hipotezy do twierdzenia rzadko jest łatwa.

Twierdzenie 2.2 (Czebyszewa)
Dla dowolnego naturalnego n pomiędzy n a $2n$ istnieje liczba pierwsza.

Dowód jest elementarny, ale technicznie dość skomplikowany. Idea dowodu polega na tym, aby wykazać, że w liczniku współczynnika dwumianowego

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

pojawia się jakaś liczba pierwsza nie występująca w mianowniku. Dowód ten uchodzi za jedną z pereł matematyki (prawie) elementarnej, czego świadectwem jest umieszczenie go w *Dowodach z Księgi*[1].

Twierdzenie Dirichleta

Żaden wyraz ciągu $6n+15$ nie jest liczbą pierwszą, gdyż wszystkie są krotnością trójki. Twierdzenie Dirichleta głosi, że jeżeli nie ma tak oczywistej przeszkody, tzn. pierwszy wyraz ciągu i różnica nieskończonego ciągu arytmetycznego są względnie pierwsze, to zawiera on nieskończenie wiele liczb pierwszych.

W szczególności, istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $4n + 1$ i nieskończenie wiele postaci $4n + 3$:

$$5, 13, 17, 29, 37, \ldots \qquad\qquad 3, 7, 11, 19, 23, \ldots$$

Zadania

5. Udowodnij, że istnieje 100-cyfrowa liczba pierwsza.

6. Czy ciąg $a_n = 1805 + 1859n$ zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych?

♢ ♢ ♢

7. Wacław Sierpiński sformułował hipotezę, że dla dowolnego $n > 1$ każdy wiersz poniższej tabeli zawiera liczbę pierwszą:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots & n \\
n+1 & n+2 & n+3 & \ldots & 2n \\
2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \ldots & 3n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \ldots & n^2.
\end{array}$$

Wykaż, że z hipotezy Sierpińskiego wynika:
a) twierdzenie Czebyszewa;
b) hipoteza Legendre'a głosząca iż pomiędzy kolejnymi kwadratami występuje liczba pierwsza.

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, *Dowody z Księgi*, Wyd. Naukowe PWN, 2004. Książka zawiera około stu dowodów uchodzących za szczególnie piękne.