DYSKRETNY
UROK MATEMATYKI

MA TEMATYKA NIE TYLKO DLA MATEMATYKÓW

DYSKRETNY UROK MATEMATYKI

MA TEMATYKA NIE TYLKO DLA MATEMATYKÓW

Marek Zakrzewski

GiS

Projekt okładki
DWA:WIATRY Pracownia graficzna

Zdjęcie na okładce
Andrzej Krupa

Skład komputerowy książki w systemie LaTeX wykonał autor.
Rysunki wykonał Marian Gewert.

ISBN 978–83–62780–91–4

Wydanie I, Wrocław 2021
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BIS Bierońscy, Sp. kom.

Sercem matematyki są konkretne przykłady i konkretne problemy. Wielkie ogólne teorie są zazwyczaj wynikiem przemyśleń opartych na drobnych, ale głębokich spostrzeżeniach; same te spostrzeżenia biorą się z analizy szczególnych przypadków.

Paul Halmos, *Selecta: Expository writing*,
Springer Verlag 1983

Matematyka jest istotnym składnikiem naszej kultury. Ona może — i powinna — stanowić ważny element wykształcenia.

Abe Shenitzer, *Teaching mathematics*, z tomu
Mathematics Tomorrow, Springer Verlag 1981

Spis treści

Co to jest matematyka? Czym zajmują się matematycy?

Odkrywanie związków pomiędzy różnorodnymi obiektami matematycznymi można porównać do odkrycia związku pomiędzy elektrycznością a magnetyzmem w fizyce, czy też — w geologii — odkryciem podobieństwa pomiędzy wschodnią linią brzegową Ameryki Południowej a zachodnią Afryki. Emocjonalne znaczenie takich odkryć w nauczaniu trudno przecenić. To one uczą nas szukać i odkrywać cudowną harmonię Wszechświata.

Władimir I. Arnold (1937-2010),
O nauczaniu matematyki, wykład wygłoszony
w Palais de Découverte w Paryżu w 1997 r.

W miarę wykształcony człowiek słyszał coś o teorii względności i Einsteinie, o DNA, o ewolucji i Darwinie, czy o tablicy Mendelejewa. Ale jego wiedza matematyczna kończy się na logarytmach, geometrii analitycznej bądź początkach analizy, czyli na XVII w. A najgłębsze znane ze szkoły twierdzenia — twierdzenie Pitagorasa i wzór na objętość kuli — mają ponad 2200 lat.

Absolwent szkoły średniej może sobie wyobrazić, czym zajmuje się fizyk, biolog czy historyk. Ale nawet absolwent wyższej uczelni nie bardzo wie, co właściwie robi matematyk.

Książka powinna dać pewne wyobrażenie o matematyce tworzonej przez ostatnie 300 lat, miejscami dochodzi do tematyki uprawianej współcześnie. Elementarny poziom wykładu czyni ją dostępną dla ambitniejszego ucznia starszych klas szkoły średniej. Powinna ona zainteresować także nauczycieli, miłośników matematyki i początkujących studentów.

Tematyka

Podobno Leibniz na serio zainteresował się matematyką, gdy odkrył zadziwiającą zależność

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Znaczna część książki poświęcona jest materiałowi o podobnej urodzie.

Trzy początkowe części książki (części I-III) dają dość rzetelny obraz rachunku różniczkowego i całkowego, czyli analizy. Ukoronowaniem będzie kilka równie pięknych wzorów i seria bardzo zróżnicowanych jej zastosowań (część IV). Czytelnik zrozumie też, dlaczego w wielu wzorach tak często spotykamy stałe e oraz π. Te początkowe części zbliżają nas do matematyki I połowy XIX w.

Na poziomie szkolnym matematyka jest w znacznym stopniu nauką o liczbach i figurach. Kolejne dwie części poświęcone są tej tematyce. Teoria liczb (część IV) to krótki kurs elementarnej teorii liczb. Inaczej jest z geometrią (część V): znaczna część klasycznej geometrii znana jest ze szkoły, więc nasze wykłady to tylko uzupełnienie o wybrane wyniki z ostatnich stuleci. Materiał przedstawiony w tych dwu częściach to w większości matematyka XVIII-XIX w.

Część VI omawia tematykę leżącą na pograniczu kombinatoryki, geometrii, teorii liczb i teorii gier. Większość materiału pochodzi z okresu ostatnich 100 lat, jest tu też wiele problemów otwartych. Także część ostatnia — poświęcona teorii mnogości i logice matematycznej — jest w miarę współczesna.

Czy po lekturze książki będzie już wiadomo, co to jest matematyka i czym zajmują się matematycy? Niezupełnie! Świat matematyki jest bardzo rozległy i bardzo zróżnicowany. Nawet wybitny zawodowy matematyk zna tylko skromną jej część. Krótka książka może więc dać pojęcie o tym przebogatym świecie, tylko w takim stopniu, w jakim wejście na Śnieżkę daje pewien pogląd o wyprawie w Himalaje.

Strategie lektury

Części I-IV są ściśle powiązane, trzeba je czytać z zachowaniem kolejności. Przy lekturze dalszych części trzeba zachować porządek wykładów, ale kolejne części mogą być czytane w dowolnym porządku. Ich lektura nie wymaga też znajomości wcześniejszych części, poza jednym wyjątkiem (wykł. 29).

Jednak lektura książki z pełnym zachowaniem kolejności wykładów może dać pewne dodatkowe korzyści. Co prawda kolejność ta nie w pełni odpowiada historycznej kolejności odkryć, ale może dać jakieś wyobrażenie o tym, jak matematyka się rozwija.

Książki z matematyki należy czytać powoli, zdanie po zdaniu, akapit po akapicie. Czasem jednak niecierpliwy Czytelnik przyspiesza. Jest to dość ryzykowne, ale czasem ma uzasadnienie. Wszelkie rozumowania łatwiej śledzić, gdy temat naprawdę nas interesuje. Często przy pierwszej lekturze warto pominąć trudniejsze miejsca; staną się jaśniejsze, gdy lepiej zrozumiemy problematykę. W szczególności, można pominąć podrozdziały oznaczone gwaiazdką.

Zadania

Zadania podstawowe — w większości niezbędne dla bezpiecznego posuwania się w głąb materiału — oddziela od zadań uzupełniających potrójny symbol karo. Te początkowe zadania ilustrują wprowadzane pojęcia, techniki czy twierdzenia. Większość jest stosunkowo prosta.

Dalsze zadania ilustrują związki wyłożonego materiału z tematyką wykładów wcześniejszych i pogłębiają rozumienie pojęć. Zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze (i ciekawsze).

Niemal wszystkim zadaniom towarzyszą szkice rozwiązań bądź pełne rozwiązania. Wyjątkiem są proste zadania rachunkowe; poprawność rozwiązania Czytelnik może sprawdzić za pomocą programu Wolfram Alpha® lub innego pokrewnego.

Dowody, a raczej wyjaśnienia

Jednym z najczęstszych pytań dziecka jest *dlaczego?* Dzięki odpowiedziom zaczyna ono stopniowo rozumieć świat. W matematyce odpowiedzią na pytanie *dlaczego?* jest dowód albo kontrprzykład. Niektóre dowody w mojej książce mają wyraźne luki, zawsze zaznaczone. Ważniejsze dla mnie było *wyjaśnienie dlaczego* zachodzi jakaś zależność niż przedstawienie *pełnego dowodu* najeżonego technicznymi trudnościami.

Mimo to pewne dowody mogą sprawić istotną trudność, ale już sama próba ich zrozumienia bywa kształcąca. Matematyka bez dowodów jest jak opera bez muzyki: można co prawda ograniczyć się do śledzenia samej akcji, ale nikt w ten sposób opery nie polubił.

Biogramy

W książce przedstawiamy sylwetki najważniejszych matematyków związanych z wykładaną tematyką. Mam nadzieję, że Czytelnik po przejrzeniu biogramów uzyska dość pełny przegląd najważniejszych matematyków do końca XIX w. Najważniejszymi pominiętymi postaciami są zapewne Niels Abel i Évariste Galois.

Nazwiska współczesnych matematyków pojawiają się z rzadka, gdyż ich dorobek na ogół nie jest zrozumiały dla niespecjalisty. Książkę kończy krótki rzut oka na osiągnięcia polskiej szkoły matematycznej. Występujące tam nazwiska w indeksie są pominięte ze względu na znikomy związek tego rozdzialiku z resztą tekstu.

◊ ◊ ◊

Książka powstała na bazie *Markowych Wykładów z Matematyki* i dwutomowej syntezy *Matematyka dawna i nowa*. Pracę nad tymi książkami zacząłem w roku 2008, tak więc niniejsza książka jest ukoronowaniem 13 lat pracy. Przy tej okazji dziękuję raz jeszcze wszystkim, którzy pomagali mi w pracy nad tym cyklem, a także Czytelnikom, którzy zauważyli błędy czy potknięcia redakcyjne w moich książkach i przekazali je Wydawcy lub mnie osobiście. Książka zawdzięcza też wiele — często anonimowym — Internautom aktywnie działających na forum *Mathematics Stack Exchange*. Dzięki nim odkryłem wiele interesujących zadań i pomysłowych rozwiązań.

Jak pisałem we wstępie do *Analizy*, wiele zawdzięczam dwóm wspaniałym książkom: *Approximately calculus* Shahriaria Shahriariego i *Excursions in calculus* Roberta M. Younga. Te dwie książki w znacznym stopniu kształtowały mój własny styl.

Przede wszystkim jednak chciałbym podziękować moim Kolegom-Wydawcom: Marianowi Gewertowi i Zbigniewowi Skoczylasowi. Dzięki ich wysiłkowi włożonemu w redakcję merytoryczną, graficzną i językową, w wychwytywanie subtelnych błędów, niezamierzonych nieścisłości, niekonsekwencji czy potknięć językowych książka lepiej wygląda i przyjemniej ją się czyta. Marian Gewert jest też autorem rysunków.

Doświadczenie i teoria prawdopodobieństwa podpowiadają, że wiele innych błędów — mam nadzieję, że niegroźnych — pozostało. Oczywiście odpowiada za nie wyłącznie autor.

Wrocław, sierpień 2021 Marek Zakrzewski

Rzeczy wstępne:
zasada indukcji i granice

Wykład 1

Zasada indukcji, sumowanie potęg i średnie

Twierdzenie matematyczne to końcowy produkt złożonego procesu. Najpierw trzeba jakąś prawidłowość czy zależność odkryć, potem doprecyzować, wreszcie udowodnić. Do najważniejszych technik dowodzenia należy zasada indukcji matematycznej.

1.1 Odkrywanie wzorów i zasada indukcji

Odkrywanie wzorów - Zasada indukcji matematycznej - Zadania

Gdy siedmioletni Gauss miał obliczyć sumę liczb naturalnych od 1 do 100, szybko odkrył, jak uniknąć rachunków. Powtórzmy jego rozumowanie. Wyobraźmy sobie te liczby wypisane raz w porządku rosnącym, a raz w porządku malejącym:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & 98 & 99 & 100 \\ 100 & 99 & 98 & \ldots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Suma liczb w każdej z kolumn jest równa 101. Kolumn jest 100, a więc dwukrotność szukanej sumy to $100 \cdot 101$. Zatem suma to $(100 \cdot 101)/2 = 5050$. W podobny sposób można pokazać, że

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pomysł ten znany był już w VIII w. uczonym z otoczenia Karola Wielkiego.

Odkrywanie wzorów

Załóżmy, że nie mamy żadnego pomysłu, jak wygląda wzór na sumę początkowych liczb naturalnych $S_n = 1+2+3+\ldots+n$. Spójrzmy na kilka konkretnych przypadków.

Mamy kolejno 1, 1+2=3, 1+2+3=6 itd. Spójrzmy na tę zależność:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \ldots & ? \end{array}$$

Prawdopodobnie nie uda nam się odgadnąć tu żadnego ogólnego wzoru. W takiej sytuacji możemy nasz problem zmodyfikować. Zbadajmy podwojenie szukanej sumy:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 2 & 6 & 12 & 20 & 30 & 42 & \ldots & ? \end{array}$$

Teraz mamy już spore szanse na odkrycie wzoru:

$$2 = 1 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 12 = 3 \cdot 4, \quad 20 = 4 \cdot 5, \quad 30 = 5 \cdot 6, \quad 42 = 6 \cdot 7, \ \ldots$$

Możemy *przypuszczać*, że podwojona suma S_n jest równa $n(n+1)$, a więc $S_n = [n(n+1)]/2$. Niestety, takie eksperymentalne podejście nie daje żadnej pewności, że hipoteza jest prawdziwa.

Wraz z rozwojem metod informatycznych coraz więcej ważnych odkryć uzyskiwanych jest eksperymentalnie za pomocą komputera. Ale dowód znajdujemy niemal zawsze metodami tradycyjnymi.

A oto kilka dalszych podobnych pytań:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1, \\ 1+3 & = & 4, \\ 1+3+5 & = & 9, \\ & \vdots & \\ 1+3+5+\ldots+(2n-1) & = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 1^3 & = & 1 \\ 1^3+2^3 & = & 9 \\ 1^3+2^3+3^3 & = & 36 \\ & \vdots & \\ 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 & = & ? \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 1\cdot 1! & = & 1, \\ 1\cdot 1! + 2\cdot 2! & = & 5, \\ 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! & = & 23, \\ & \vdots & \\ 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! & = & ? \end{array}$$

Zasada indukcji matematycznej

Rozważmy własność $T(n)$ dotyczącą liczb naturalnych $0, 1, 2, 3, \ldots$ Aby przekonać się o jej prawdziwości, możemy zacząć od sprawdzenia, czy zachodzi ona dla początkowych liczb naturalnych:

$$T(0), \quad T(1), \quad T(2), \quad T(3), \quad \ldots$$

W naukach przyrodniczych rozumowanie oparte na analizie części przypadków nazywa się *indukcją*. Czasem dla podkreślenia faktu, że nie obejmuje ona wszystkich przypadków nazywamy ją *indukcją niezupełną*. Sprawdzanie przypadków może wzmacniać naszą wiarę w prawdziwość twierdzenia, ale nie zastąpi dowodu.

Wyobraźmy sobie, że o tożsamości $T(n)$ umiemy pokazać coś więcej. Potrafimy wykazać, że prawdziwa jest tożsamość $T(0)$, a także wszystkie poniższe wynikania:

$$\begin{array}{ccc} T(0) & \Longrightarrow & T(1), \\ T(1) & \Longrightarrow & T(2), \\ T(2) & \Longrightarrow & T(3), \\ T(3) & \Longrightarrow & T(4), \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Skoro zachodzi $T(0)$ oraz wynikanie $T(0) \Longrightarrow T(1)$, to zachodzi też $T(1)$. Na mocy kolejnego wiersza zachodzi wówczas także $T(2)$ itd. W takim przypadku wykazalibyśmy oczywiście prawdziwość $T(n)$ dla wszystkich liczb naturalnych, ale dowód taki trwałby nieskończenie długo.

Na szczęście w wielu przypadkach wszystkie dalsze wynikania można uzasadnić, postępując według tego samego schematu. Zamiast nieskończenie wielu wynikań, wystarczy sprawdzić, że zachodzi $T(0)$ oraz że dla każdej liczby naturalnej k zachodzi wynikanie $T(k) \Longrightarrow T(k+1)$. Rozumowanie takie stanowi już kompletny dowód, a dotyczyć może nie tylko tożsamości, ale też innych własności liczb naturalnych. Punktem wyjściowym nie musi być liczba 0.

Twierdzenie 1.1 (zasada indukcji matematycznej)
Niech $T(n)$ będzie pewną własnością liczb naturalnych. Załóżmy, że:
1. dla pewnej liczby naturalnej n_0 zachodzi $T(n_0)$;
2. dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant n_0$ zachodzi wynikanie

$$T(k) \Longrightarrow T(k+1).$$

Wówczas własność $T(n)$ zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$.

Zasada indukcji matematycznej nazywana była niegdyś zasadą *indukcji zupełnej*, gdyż w istocie sprawdza wszystkie przypadki.

Przykład 1.1 Za pomocą metody indukcji matematycznej wykaż tożsamość

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Rozwiązanie: Dowód składa się z dwu kroków.

1. Krok początkowy: Dla $n=1$ tożsamość zachodzi, gdyż

$$1=\frac{1\cdot 2}{2}.$$

2. Przejście indukcyjne: Załóżmy, że tożsamość zachodzi dla **dowolnej ustalonej** liczby naturalnej k, tzn.

$$1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Wykażemy, że zachodzi też dla $k+1$, tzn.

$$1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Rzeczywiście,

$$\begin{aligned}1+2+\ldots+k+(k+1) &= [1+2+\ldots+k]+(k+1) \stackrel{\text{ind}}{=\!=}\\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\\ &= \frac{k\,(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Równość oznaczona znakiem *ind* pokazuje przejście, w którym skorzystaliśmy z założenia indukcyjnego.

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że tożsamość prawdziwa jest dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych.

Dowody indukcyjne mogą wyglądać rozmaicie, ale ich zasadniczy schemat jest niemal zawsze taki sam. Zwróćmy jeszcze uwagę na wyróżnione słowa *dowolnej ustalonej*. Kto zastąpi te słowa słowami *dla wszystkich* zdradza, że nie rozumie metody. Zastanów się, dlaczego.

Zauważmy jeszcze, że indukcja matematyczna jest metodą *dowodzenia*. Jednak w żadnym stopniu nie podpowiada, jak odkryć dowodzone twierdzenie.

Zadania

1. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż tożsamości:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

b) $1 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

2. Odgadnij wzór na sumę i wykaż jego prawdziwość

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

♢ ♢ ♢

3. Wykaż, że dla naturalnego $n > 1$ zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

4. Wykaż, że dla $n \geqslant 5$ zachodzi nierówność $2^n > n^2$.

5. Rozważmy funkcję f określoną dla dodatnich liczb naturalnych warunkami $f(1) = 1$ oraz

$$f(n) = \begin{cases} f\left(\dfrac{n}{2}\right), & \text{jeśli } n \text{ parzysta;} \\ f\left(\dfrac{3n+1}{2}\right), & \text{jeśli } n \text{ nieparzysta.} \end{cases}$$

Hipoteza (postawiona przez Lothara Collatza w roku 1937, ale wciąż otwarta) głosi, że dla dodatnich liczb naturalnych n zachodzi równość $f(n) = 1$. Pokaż, że hipoteza Collatza jest prawdziwa: a) dla $n = 1, 2, \ldots, 12$; b) dla nieskończenie wielu liczb nieparzystych.

6.* Na stole znajduje się pewna skończona liczba kartek, a na każdej zapisana jest jakaś liczba naturalna. Kolejno wyrzucamy te kartki, przy czym jeżeli wyrzucamy kartkę z liczbą n, to możemy dołożyć dowolną skończoną liczbę kartek z liczbami $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Czy takie postępowanie może trwać nieskończenie długo, czy też musi się kiedyś skończyć?

1.2 Sumowanie potęg

Sumowanie kwadratów - Sumowanie innych potęg - Zadania

Znamy już wzór na sumę $1 + 2 + \ldots + n$. Teraz odkryjemy wzór na sumę kwadratów liczb naturalnych i rozważymy podobne zadanie dla wyższych potęg. Do tematu tego wracać będziemy w wielu dalszych wykładach.

Sumowanie kwadratów

Spróbujmy teraz wyprowadzić wzór na sumę kwadratów liczb naturalnych od 1 do n:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = ?$$

Naturalnym podejściem jest analiza konkretnych przypadków. Spójrzmy na początkowe sumy:

$$1^2 + 2^2 = 5, \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14, \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30, \ldots$$

Chyba trudno odgadnąć tu jakąś prawidłowość.

Ponieważ znamy już wzór na sumę początkowych liczb naturalnych, więc spróbujmy porównać sumę kwadratów $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ z sumą $1 + 2 + \ldots + n$. Oto odpowiednie ilorazy:

$$\frac{1^2 + 2^2}{1 + 2} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{1 + 2 + 3} = \frac{7}{3}, \qquad \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{9}{3}, \ldots$$

Ostatni iloraz jest oczywiście równy 3, ale zapis w postaci ułamka pozwala łatwiej dostrzec ogólną prawidłowość:

$$\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{1 + 2 + \ldots + n} = \frac{2n + 1}{3}.$$

A stąd

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = (1 + 2 + \ldots + n) \cdot \frac{2n + 1}{3} = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Osobną sprawą jest dowód tego wzoru. Standardowy dowód otrzymujemy za pomocą indukcji matematycznej. Inny podpowiadamy w zadaniu 7.

Sumowanie innych potęg

Wzór na sumę sześcianów odgadnąć jest bardzo łatwo:

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2, \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2, \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2, \ \ldots$$

Gdy zauważymy, że $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, to bez trudu sformułujemy hipotezę

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}.$$

Równość tę łatwo udowodnić za pomocą indukcji matematycznej. Ogólny problem znalezienia wzoru na sumę

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

dla naturalnych wykładników k rozwiązał Jacob Bernoulli. Wzór ten (bez dowodu) przytaczamy w zadaniu 19.5.

Spójrzmy jeszcze na przypadek wykładników całkowitych ujemnych. Problem ma tu zupełnie inny charakter. Dla wykładnika $k = -1$ otrzymujemy

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Sumę tę nazywamy **n-tą sumą harmoniczną** (bądź **liczbą harmoniczną**) i oznaczamy symbolem H_n. Dokładnego wzoru dla liczby H_n nie znamy. Ale szacowaniem sum takich jak powyższa, czy analogiczna dla odwrotności kwadratów, zajmiemy się w dalszych częściach książki.

Zadania

7. Wyprowadź wzór na sumę kwadratów liczb naturalnych od 1 do n korzystając z tożsamości

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

8. Sprawdź, że zachodzi tożsamość

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2 = k^3.$$

Wyprowadź stąd wzór na sumę sześcianów liczb naturalnych od 1 do n.

$\diamondsuit\ \diamondsuit\ \diamondsuit$

9. Liczbę postaci $T_n = n(n+1)/2$ nazywamy n-tą **liczbą trójkątną**. Wykaż, że:
a) suma dwu kolejnych liczb trójkątnych jest kwadratem liczby naturalnej;
b) zachodzi tożsamość

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

10. Znajdź wzór na sumę

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$$

i uzasadnij jego poprawność.

1.3 Średnie i nierówności

Trzy średnie - Jeszcze jedna średnia - Dowód nierówności między średnimi - Zadania

Nierówność łącząca trzy średnie: arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną ma wiele zastosowań, w szczególności w geometrii. A jej dowód jest interesującym przykładem nietypowej indukcji.

Trzy średnie

Powszechnie znana jest **średnia arytmetyczna** liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ określana wzorem

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Dla liczb dodatnich określamy **średnią geometryczną**

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\,,$$

a także **średnią harmoniczną**

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

Wszystkie te średnie znane były już starożytnym Grekom.

Twierdzenie 1.2 (nierówność między średnimi)
Pomiędzy średnią arytmetyczną A dowolnych liczb dodatnich, ich średnią geometryczną G oraz ich średnią harmoniczną H zachodzi podwójna nierówność

$$A \geqslant G \geqslant H.$$

Obie nierówności stają się równościami tylko, gdy wszystkie liczby są równe.

Spójrzmy na te średnie dla liczb $1, 2, \ldots, n$:

$$A = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2};$$

$$G = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = \sqrt[n]{n!};$$

$$H = \frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}.$$

W mianowniku średniej harmonicznej pojawia się wspomniana już wcześniej n-ta liczba harmoniczna H_n. Gdy poznamy oszacowanie tej sumy, otrzymamy też pośrednio oszacowanie powyższej średniej harmonicznej. Średnią geometryczną oszacujemy w zadaniach po wykładzie 13.

Jeszcze jedna średnia

W teorii prawdopodobieństwa istotną rolę odgrywa średnia kwadratowa. **Średnią kwadratową** liczb x_1, x_2, ..., x_n nazywamy liczbę

$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

Jest ona większa bądź równa średniej arytmetycznej. Dowód podpowiadamy w zad. 17.

Dowód nierówności między średnimi*

Niech $T(n)$ oznacza, że średnia arytmetyczna n liczb nieujemnych jest większa bądź równa ich średniej geometrycznej. Najpierw udowodnimy, że $T(n)$ zachodzi dla $n = 2, 4, 8, \ldots$, potem zaś wykażemy, iż $T(n)$ implikuje $T(n-1)$. Wynikać stąd będzie, że $T(n)$ zachodzi dla dowolnej liczby naturalnej. Na przykład prawdziwość dla $n = 13$ wynikać będzie z ciągu implikacji:

$$T(2) \Longrightarrow T(4) \Longrightarrow T(8) \Longrightarrow T(16) \Longrightarrow T(15) \Longrightarrow T(14) \Longrightarrow T(13).$$

Dla $n = 2$ nierówność jest oczywista. Skoro $(x-y)^2 \geqslant 0$, to

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geqslant xy.$$

Podstawiając $a = x^2$, $b = y^2$ otrzymujemy

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Pokażemy teraz wynikanie $T(n) \Longrightarrow T(2n)$. Aby uniknąć nadmiaru symboli zrobimy to na przykładzie wynikania $T(2) \Longrightarrow T(4)$. Skorzystamy dwukrotnie z nierówności między średnimi dla $n = 2$. Mamy

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geqslant \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt{\sqrt{abcd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Pozostaje wykazać, że dla $n \geqslant 2$ zachodzi wynikanie $T(n) \Longrightarrow T(n-1)$. Znów, aby uprościć zapis, zrobimy to dla $n = 4$. Mamy

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geqslant \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}},$$

więc

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geqslant abc \cdot \frac{a+b+c}{3},$$

a stąd

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant abc.$$

Podnosząc obie strony do potęgi 1/3 otrzymujemy żądaną nierówność.

Dowód ten pochodzi od Augustina Cauchy'ego. W zad. 14. podpowiadamy, jak wykazać nierówność pomiędzy średnia geometryczną i harmoniczną.

Zadania

11. Sprawdź, że średnia geometryczna dwu liczb dodatnich jest średnią geometryczną ich średniej arytmetycznej i harmonicznej. Czy jest tak dla trzech i więcej liczb?

12. Pitagorejczykom zawdzięczamy spostrzeżenie, że w sześcianie liczba wierzchołków jest średnią liczby ścian i liczby krawędzi. O jakiej średniej tu mowa?

13. Sprawdź, że w ciągu $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ każdy wyraz jest średnią harmoniczną dwu sąsiednich.

♢ ♢ ♢

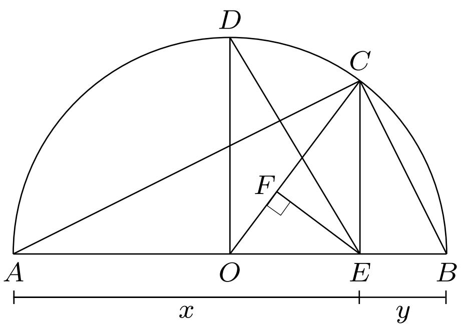
14. Pokaż, jak z nierówności $G \leqslant A$ wywnioskować nierówność $H \leqslant G$.

15. Wykaż na dwa sposoby, że dla dodatnich x_1, x_2, …, x_n zachodzi nierówność

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

a) korzystając z nierówności między średnimi;
b) nie korzystając z niej.

16. Uzasadnij, że odcinki DO, CE, CF i DE równe są odpowiednim średnim odcinków o długościach x, y.



17*. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_n zachodzi nierówność

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

zwana **nierównością Cauchy'ego - Buniakowskiego - Schwarza** albo krócej nierównością Cauchy'ego - Schwarza. Wywnioskuj stąd, że średnia kwadratowa dowolnych n liczb jest większa bądź równa ich średniej arytmetycznej.
Wsk.: Rozważ wyróżnik trójmianu $(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \ldots + (a_nx + b_n)^2$.

Wykład 2

Granica ciągu

Spójrzmy na trzy wzory na sumy potęg:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Wzory dla dalszych potęg stają się coraz bardziej skomplikowane. Często bardziej przydatny okazuje się prostszy wzór przybliżony:

$$1 + 2 + \ldots + n \approx \frac{n^2}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \approx \frac{n^3}{3},$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \approx \frac{n^4}{4}.$$

Nietrudno odgadnąć, że w ogólnym przypadku otrzymamy

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k \approx \frac{n^{k+1}}{k+1}.$$

Zauważmy, że przybliżony wzór jest tu bardziej czytelny, a także łatwiejszy do odkrycia.
Przybliżone wzory dla funkcji, sum itp. nazywamy **aproksymacjami**. Spróbujmy teraz nadać ścisły sens symbolowi $\approx$ w powyższych wzorach.

2.1 Intuicje i rachunki

Pojęcie granicy i najprostsze przypadki - Granica ciągu geometrycznego i ciągi rozbieżne - Rzędy wielkości i asymptotyczna równość - Zadania

Formalna definicja granicy ciągu pojawiła się przynajmniej 2000 lat później niż samo pojęcie. Nie słyszeli o niej ani Archimedes, ani Newton czy Euler. Można więc założyć, że podstawowy kurs analizy też sobie poradzi operując wyłącznie określeniem intuicyjnym.

Pojęcie granicy i najprostsze przykłady

Spójrzmy na kolejne wyrazy ciągu $a_n = 2n/(n+1)$:

$$1, \quad \frac{4}{3} \approx 1,33, \quad \frac{6}{4} = 1,5, \quad \frac{8}{5} = 1,6, \quad \frac{10}{6} \approx 1,66, \quad \ldots$$

Jeżeli wraz ze wzrostem n (gdy n dąży do nieskończoności) wyrazy ciągu a_n stają się dowolnie bliskie pewnej skończonej liczbie g, to mówimy, że ciąg a_n **ma granicę** g albo że **jest zbieżny do** g. Symbolicznie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \text{albo krócej} \quad a_n \to g.$$

Tu mamy

$$a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{2}{n+1} \to 2 - 0 = 2.$$

Gdy mówimy o zbieżności ciągów, to zawsze zakładamy, że n *dąży do nieskończoności*, nawet gdy nie jest to zaznaczone.

W obliczeniach korzystać będziemy z podstawowych intuicji. Jest dość oczywiste, że przy n dążącym do nieskończoności, granicą takich ciągów jak

$$a_n = \frac{2}{n}, \quad b_n = \frac{5}{n+2}, \quad c_n = \frac{1}{n^2},$$

jest zero. Ponadto granicą sumy dwu ciągów jest suma ich granic. Analogiczne własności zachodzą też dla granic różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów.

TWIERDZENIE 2.1 (arytmetyka granic skończonych)
Załóżmy, że ciągi a_n oraz b_n mają granice odpowiednio a oraz b. Wówczas:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab.$$

Jeżeli ponadto $b \neq 0$, to także

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Spójrzmy na przykładowe zastosowania tego twierdzenia.

Przykład 2.1 Oblicz granice ciągów:

$$\text{a)}\quad a_n = \frac{3n+1}{2n+5}; \qquad \text{b)}\quad b_n = \frac{2n^2-6n}{n^2+1}.$$

Rozwiązanie: W obu przykładach przekształcimy wyraz ciągu w ten sposób, że jego wartość nie zmieni się, ale z przekształconej postaci łatwiej będzie wyznaczyć granicę.

a) Podzielmy licznik i mianownik ułamka przez n i przejdźmy do granicy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}.$$

b) Podobnie, ale tym razem licznik i mianownik ułamka dzielimy przez n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-6n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{6}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2-0}{1+0} = 2.$$

Granica ciągu geometrycznego i ciągi rozbieżne

Przyjrzyjmy się ciągom geometrycznym $a_n = (1/2)^n$ oraz $b_n = (-2/3)^n$:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots \qquad\qquad -\frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ -\frac{8}{27},\ \frac{16}{64},\ -\frac{32}{243},\ \ldots$$

Intuicyjnie jest jasne, że obydwa dążą do zera. Te intuicje są trafne. Odnotujmy zatem to spostrzeżenie jako osobne twierdzenie.

Twierdzenie 2.2 *Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg geometryczny q^n jest zbieżny do zera.*

Nie każdy ciąg ma granicę. Na przykład ciąg $a_n = (-1)^n$ ma wyrazy na przemian -1 oraz 1, więc nie ma żadnej liczby, do której te wyrazy by się zbliżały. Podobnie jest z ciągiem $a_n = (-2)^n$, który oscyluje pomiędzy coraz większymi liczbami dodatnimi i coraz większymi (co do wartości bezwzględnej) liczbami ujemnymi. Ciągi, które nie mają skończonej granicy nazywamy **rozbieżnymi**.

Pośród ciągów rozbieżnych na osobną uwagę zasługują dwa szczególne typy. Ciągi takie, jak np. $a_n = n^2$ czy $b_n = 2^n$ dążą do plus nieskończoności. Symbolicznie zapisujemy to

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

Z kolei ciągi takie, jak $a_n = -n$ czy $b_n = -2^n$ dążą do minus nieskończoności. Symbolicznie:

$$\lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}(-2^n) = -\infty.$$

Takie nieskończone granice nazywamy **niewłaściwymi**, a o samych ciągach mówimy, że są **rozbieżne** do plus albo minus nieskończoności.

W wielu obliczeniach wykorzystujemy ważną własność ciągów rozbieżnych do plus bądź minus nieskończoności.

TWIERDZENIE 2.3 *Jeżeli ciąg $|a_n|$ jest rozbieżny do nieskończoności, to*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0.$$

Rzeczywiście, jeżeli wartości $|a_n|$ wraz ze wzrostem n przyjmują dowolnie duże wartości dodatnie, to ich odwrotności $1/|a_n|$ stają się dowolnie bliskie zera. A wówczas także ciąg $1/a_n$ dąży do zera.

PRZYKŁAD 2.2 Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

ROZWIĄZANIE: Zastosowanie twierdzenia o granicy różnicy ciągów nie jest tu możliwe, gdyż ani ciąg $\sqrt{n^2+n}$, ani ciąg n nie mają granicy skończonej. Aby wyznaczyć granicę tego ciągu, przekształćmy go korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów:

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}.$$

W mianowniku możemy wyciągnąć n przed nawias:

$$\sqrt{n^2+n}+n = \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}+n = n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right).$$

Zatem

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Zauważmy, że z pozoru oczywiste podejście

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \infty - \infty,$$

dałoby **błędny** wynik zero. Na ogół nie można stosować twierdzeń o arytmetyce granic dla granic nieskończonych. Są jednak wyjątki. Dwa najważniejsze to:

$$\infty + \infty = \infty, \qquad \infty \cdot \infty = \infty.$$

Formalnie: suma oraz iloczyn ciągów rozbieżnych do ∞ też jest ciągiem rozbieżnym do ∞.

Twierdzenie o trzech ciągach i zbieżność pierwiastków

Następujące twierdzenie jest dość oczywiste, ale bardzo użyteczne:

TWIERDZENIE 2.4 (o trzech ciągach)
Jeżeli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *oraz*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

to ta wspólna granica jest też granicą ciągu b_n.

Za pomocą kalkulatora łatwo znaleźć granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{2}$. Obliczając wartości pierwiastka np. dla $n = 100$, $n = 1\,000$ bez trudu odgadniemy, że granicą tą będzie 1. Pokażemy teraz, jak to przypuszczenie udowodnić.

Niech $\sqrt[n]{2} = 1 + r_n$. Wówczas $r_n > 0$. Wykażemy, że $r_n \to 0$. Przypomnijmy początek wzoru Newtona dla $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \ldots$$

Podstawiając $x = r_n$ otrzymujemy

$$2 = \left(\sqrt[n]{2}\right)^n = (1+r_n)^n = 1 + nr_n + \binom{n}{2}r_n^2 + \ldots > 1 + nr_n,$$

gdyż dla dodatniego r_n wszystkie dalsze wyrazy też są dodatnie. Tak więc $1 > nr_n$, skąd

$$0 < r_n < \frac{1}{n}.$$

Ponieważ skrajne ciągi dążą do zera, więc także r_n dąży do zera, a stąd

$$\sqrt[n]{2} = 1 + r_n \to 1 + 0 = 1.$$

W podobny sposób można udowodnić, że zachodzi poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE 2.5 *Dla dowolnego dodatniego* a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Rzędy wielkości i asymptotyczna równość

Niech $f(n)$ oraz $g(n)$ będą wielkościami dodatnimi. Mówimy, że $f(n)$ **jest rzędu** $g(n)$, jeśli granica $f(n)/g(n)$ jest liczbą skończoną różną od zera. Np. $n(n+1)/2$ jest rzędu n^2, gdyż

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Jeśli granica $f(n)/g(n)$ przy n dążącym do ∞ jest równa 1, to mówimy, że $f(n)$ i $g(n)$ **są asymptotycznie równe** i piszemy $f(n) \approx g(n)$.

Zadania

1. Oblicz granice ciągów

a) $a_n = \dfrac{1+2+...+n}{1+2+...+2n}$; b) $b_n = \dfrac{123^n + 231^n}{312^n}$; c) $c_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$.

2. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granice ciągów:

a) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n+1}$; b) $b_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$; c) $c_n = \sqrt[n]{2^n+n^2}$; d) $d_n = \sqrt[n]{1+2+\ldots+n}$.

♢ ♢ ♢

3. Korzystając ze wzoru na obwód okręgu lub pole koła znajdź granicę ciągu $a_n = n\sin(\pi/n)$.

4. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

5. Wykaż, że n^3 jest **rzędu niższego** niż 2^n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0.$$

Podobnie jest dla n^k dla dowolnego $k > 0$.
Wsk.: Ze wzoru dwumianowego Newtona wynika, że zachodzi tożsamość

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Zatem dla $n \geqslant 4$ mamy $\binom{n}{4} < 2^n$.

2.2 Trochę teorii i algorytm Herona

Zbieżność i ograniczoność - Heron, rekursja i pierwiastki - Zadania

Pokażemy tu, dlaczego w niektórych rachunkach istotną rolę odgrywają *twierdzenia o istnieniu.* A ponadto poznamy zdumiewająco prosty algorytm obliczania pierwiastków, znany Heronowi (I w. n.e.), a możliwe, że nawet Babilończykom — 4000 lat temu.

Zbieżność a ograniczoność

Zauważmy, że ciąg nieskończony a_n to funkcja na $\mathbb{N}$ określona wzorem $f(n) = a_n$. Możemy zatem mówić o wykresie ciągu: złożony on jest z wszystkich punktów postaci (n, a_n). Takie geometryczne spojrzenie na ciag bywa użyteczne.

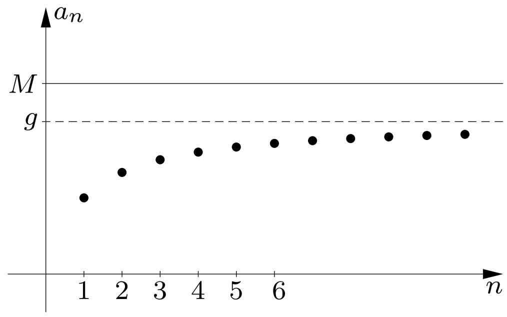
Mówimy, że ciąg a_n jest **ograniczony**, jeżeli wszystkie jego wyrazy leżą w pasie ograniczonym prostymi $y = m$ (ograniczenie dolne ciągu) oraz $y = M$ (ograniczenie górne ciągu).

Zauważ, iż zbieżność ciągu geometrycznie oznacza, że dalekie wyrazy ciągu leżą *w pobliżu* pewnej prostej. Ograniczoność oznacza tylko, że wyrazy ciągu mieszczą się w pewnym *pasie* ograniczonym prostymi. Tak więc zbieżność jest warunkiem mocniejszym niż ograniczoność. Wyraża to poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE 2.6 *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Twierdzenie odwrotne nie zachodzi, o czym świadczy ciąg $a_n = (-1)^n$ — jest ograniczony, ale nie jest zbieżny. Zachodzi jednak twierdzenie następujące:

TWIERDZENIE 2.7 *Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*



Rysunek powinien przekonać o intuicyjnej oczywistości tego twierdzenia. Ścisły dowód nie jest trudny, ale odwołuje się do formalnej definicji granicy.

Heron, rekursja i pierwiastki

Jak już wspominaliśmy, bardzo pomysłowy algorytm obliczania pierwiastków kwadratowych znany był Heronowi, prawie dwa tysiące lat temu. W literaturze znany jest jako *algorytm Herona* bądź *algorytm babiloński*, gdyż istnieją poszlaki (dość słabe), że mogli go znać już Babilończycy.

Obliczymy tą metodą $\sqrt{2}$. Algorytm Herona polega na wyznaczaniu kolejnych wyrazów ciągu zadanego warunkami

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}.$$

Sama idea tego algorytmu jest prosta: gdy wyraz a_n przybliża $\sqrt{2}$ od dołu, to $2/a_n$ przybliża go od góry. Okazuje się, że wyraz a_{n+1} będący średnią arytmetyczną tych dwu liczb jest przybliżeniem (dużo!) lepszym niż poprzednie.

Skąd wiemy, że w granicy musimy dostać rzeczywiście $\sqrt{2}$. Na razie załóżmy, że granica istnieje i jest równa g. Wówczas

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} \to \frac{g + \frac{2}{g}}{2}.$$

Ale $a_{n+1} \to g$, gdyż a_{n+1} jest to ciąg a_n przesunięty o jeden wyraz. Zatem

$$g = \frac{g + \frac{2}{g}}{2}.$$

Stąd $g^2 = 2$. Ponieważ ciąg o wyrazach dodatnich nie może mieć granicy ujemnej, więc $g = \sqrt{2}$.

Że ciąg ten rzeczywiście ma granicę jest oczywiste dla każdego kto próbuje wykonać te rachunki — ten ciąg zbiega bardzo szybko: już piąty wyraz daje przybliżenie z błędem $!0^{-11}$. Ale dowód istnienia granicy nie jest trudny. Wykażemy, że ciąg ten jest monotoniczny i ograniczony. Obydwa warunki wykazujemy korzystając z indukcji matematycznej.

1. Ciąg a_n jest ograniczony z dołu przez $\sqrt{2}$.

Mamy $a_1 = 2 > \sqrt{2}$. Załóżmy, że $a_n > \sqrt{2}$. Wówczas

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} - \sqrt{2} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} - \sqrt{2} = \frac{a_n^2 - 2\sqrt{2}a_n + 2}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} > 0,$$

więc $a_{n+1} > \sqrt{2}$. Na mocy zasady indukcji wszystkie wyrazy ciągu są większe od $\sqrt{2}$.

2. Ciąg a_n jest malejący.

Rzeczywiście, skoro $a_n > \sqrt{2}$, to

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} - a_n = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} - a_n = \frac{2 - a_n^2}{2a_n} < 0.$$

Zadania

6. Zmodyfikuj algorytm Herona tak, aby za jego pomocą znaleźć przybliżoną wartość $\sqrt[3]{2}$.

7. Dla ustalonego $x > 0$ rozważmy ciąg

$$a_n = \frac{x^n}{n!}.$$

a) Pokaż, że począwszy od pewnego miejsca jest on malejący.
b) Wywnioskuj stąd, że ma granicę i pokaż, że jest ona równa zeru.
Oznacza to, że x^n jest rzędu niższego niż $n!$.

◇ ◇ ◇

8. Rozważmy ciąg określony warunkami $a_1 = \sqrt{2}$ oraz $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Wykaż, że jest zbieżny i pokaż, że jego granica jest równa 2. Uzyskany wynik zapisuje się niekiedy w postaci

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}} = 2.$$

9.* Wykaż, że ciąg

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest ograniczony z góry i rosnący, a więc zbieżny. Stałą e definiuje się zazwyczaj jako liczbę będącą granicą tego ciągu. U nas e pojawi się naturalnie w kontekście równań różniczkowych. Wsk.: Dla dowodu monotoniczności rozważ liczbę 1 oraz n innych liczb i skorzystaj z nierówności między średnimi.

2.3 Koło, kula i liczba π

Dwa klasyczne wzory - Objętość kuli - Pole powierzchni kuli - Zadania

Związek pomiędzy polem koła a jego obwodem zrozumiany został bardzo wcześnie. Technicznym problemem było jedynie wyznaczenie wartości π z odpowiednią dokładnością. Kwestią tą zajmiemy się w dalszej części wykładu.

Obliczenie objętości kuli to zagadnienie znacznie trudniejsze. Wzór ten — w postaci geometrycznej — odkrył dopiero Archimedes.

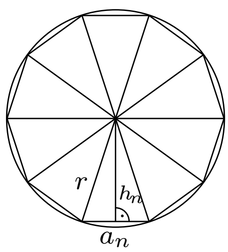
Dwa klasyczne wzory

Liczbę π określa się jako stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. Z samej definicji π wynika, że pomiędzy obwodem L okręgu, a jego średnicą $2r$ zachodzi zależność $L/2r = \pi$, skąd znany wzór na obwód okręgu

$$L = 2\pi r.$$

Wzór na pole koła wyprowadzić nietrudno.

Koło można przybliżać za pomocą wpisanych w niego wielokątów foremnych. Każdy taki wielokąt dzieli się na n trójkątów równoramiennych, o podstawie a_n oraz wysokości h_n. Wraz z n dążącym do nieskończoności, iloczyn na_n dąży do obwodu okręgu, a wysokość h_n do jego promienia.



Zatem pole P koła o promieniu r jest równe połowie iloczynu promienia r przez obwód koła $2\pi r$, czyli πr^2.

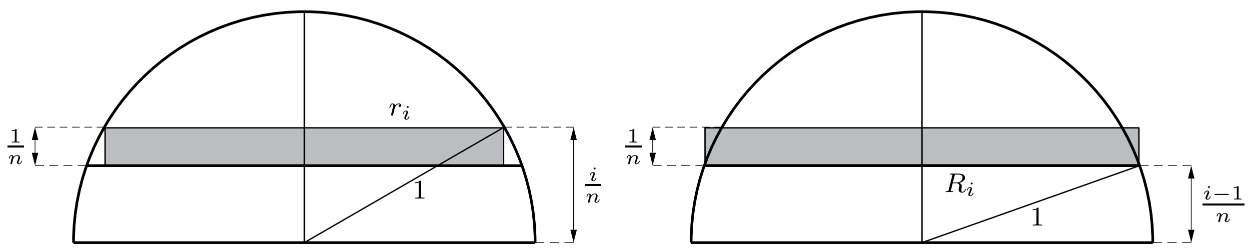
W powyższym rozumowaniu znów stykamy się z przejściem do granicy: rozważamy, jak zmienia się obwód wielokąta foremnego wpisanego w okrąg, gdy liczba boków dąży do nieskończoności. Korzystając z symbolu granicy możemy to rozumowanie zapisać krócej:

$$P = \lim_{n\to\infty} n\frac{a_n h_n}{2} = \lim_{n\to\infty} n a_n \frac{h_n}{2} = L\frac{r}{2} = 2\pi r\frac{r}{2} = \pi r^2.$$

Oczywiście, aby korzystać z tych wzorów musimy wyznaczyć przybliżoną wartość π. Zajmiemy się tym w zadaniach, a poważniej w wykładzie 16.

Objętość kuli

Pokażemy teraz, jak wykorzystać wzór na sumę kwadratów do wyprowadzenia wzoru na objętość kuli. Zacznijmy od wyprowadzenia wzoru na objętość półkuli o promieniu 1.



Podzielmy półkulę na n plastrów o jednakowej wysokości. Objętość każdego z plastrów można oszacować porównując ją z objętością walca wpisanego w plaster i objętością walca na nim opisanego.

Każdy z walców ma wysokość $1/n$. Promienie walca wpisanego w i-ty plaster oraz walca na nim opisanego to odpowiednio

$$r_i = \sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2} \quad \text{oraz} \quad R_i = \sqrt{1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2}.$$

Ze wzoru na objętość walca wynika zatem, że objętość i-tego plastra opisanego jest równa

$$V_i = \pi\left[1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}.$$

Stąd otrzymujemy górne oszacowanie na objętość półkuli V:

$$V < \pi \left\{ \left[1 - \left(\frac{0}{n} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right] + \ldots + \left[1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \right] \right\} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \pi \left[1 - \frac{0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \right] = \pi \left[1 - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \right].$$

Podobnie możemy otrzymać oszacowanie dolne na V, porównując objętości plastrów z objętościami walców wpisanych.

Po prostych przekształceniach otrzymamy podwójną nierówność

$$\pi - \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{2n} \right) < V < \pi - \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{1}{2n} \right).$$

Pozostaje zauważyć, że gdy podział na plastry jest odpowiednio drobny (tzn. n dostatecznie duże) ułamki $1/n$ oraz $1/2n$ przyjmują wartości dowolnie bliskie zeru. Zatem obydwa wyrażenia ograniczające V zbliżają się dowolnie blisko do $2\pi/3$. Taka jest zatem objętość rozważanej półkuli. Stąd objętość kuli jednostkowej to $4\pi/3$.

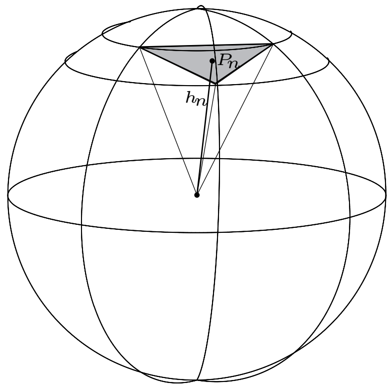
Każde dwie kule są podobne. Skalą podobieństwa kuli o promieniu R do kuli jednostkowej jest stosunek ich promieni, czyli R. Stosunek ich objętości to R^3, skąd znany wzór na objętość kuli $V = 4\pi R^3/3$.

Wzór na objętość kuli to zapewne jedyne twierdzenie geometrii, którego nie znał Euklides, a dziś zna przeciętny uczeń szkoły średniej. Odkrył go dopiero Archimedes, żyjący jedno-dwa pokolenia później. Grecy nie znali algebry, więc formułował on ten wzór w języku geometrii (p. zad. 11).

Pole powierzchni kuli

Obliczając pole koła aproksymowaliśmy je za pomocą wielokątów foremnych, z których każdy jest sumą trójkątów. W podobny sposób można wyprowadzić znany wzór na pole powierzchni kuli. Jednak ścisłe uzasadnienie poprawności tego wyprowadzenia nie jest łatwe. Ograniczymy się więc do naszkicowania zasadniczej idei.

Kulę można aproksymować za pomocą brył złożonych z ostrosłupów, jak pokazuje rysunek.



Łączna objętość tych ostrosłupów wynosi

$$\frac{1}{3}h_1P_1 + \frac{1}{3}h_2P_2 + \ldots + \frac{1}{3}h_nP_n.$$

Gdy podstawy ostrosłupów są coraz drobniejsze, łączna suma ich podstaw dąży do pola S powierzchni kuli, wysokość każdego z ostrosłupów dąży do promienia R kuli, a łączna objętość ostrosłupów do objętości kuli. Zatem w granicy otrzymujemy

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}RS, \qquad \text{skąd} \qquad S = 4\pi R^2.$$

Zadania

10. Znajdź stosunek objętości kuli do objętości walca na niej opisanego. Analogiczne zadanie dla pola powierzchni.

11. Archimedes wykazał, że suma objętości stożka o wysokości d i promieniu podstawy d oraz kuli o średnicy d jest równa połowie objętości walca o wysokości d i promieniu podstawy d. Wywnioskuj stąd wzór na objętość kuli.

12. Pośród poniższych liczb znajdź najlepsze przybliżenie π:

$$\frac{22}{7}, \quad \sqrt{10}, \quad \sqrt{2}+\sqrt{3}, \quad \frac{9}{5}+\sqrt{\frac{9}{5}}.$$

13. Obwód okręgu jest większy od obwodu sześciokąta foremnego weń wpisanego i mniejszy od obwodu sześciokąta foremnego na nim opisanego. Jakie oszacowanie π możemy stąd wywnioskować?

14. Egipcjanie przyjmowali, że pole koła jest równe kwadratowi 8.9 jego średnicy. Przy jakiej wartości π wzór ten byłby dokładny? Czy daje on pole z nadmiarem czy z niedomiarem?

15. Niewymierność π wykazał Johann Lambert, a niewymierność π^2 Adrien-Marie Legendre. Który z tych wyników jest wcześniejszy? Wbrew pozorom to nie jest pytanie z historii.

◊ ◊ ◊

16.* Niech a_n dla $n \geqslant 2$ oznacza długość boku 2^n-kąta foremnego wpisanego w okrąg jednostkowy.
a) Wykaż, że

$$a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}, \qquad a_2 = \sqrt{2}.$$

b) Znajdź granicę

$$\lim_{n \to \infty} 2^n a_n.$$

2.4 Archimedes

Archimedes (ok. 287 p.n.e. - 212 p.n.e.), powszechnie uchodzi za największego matematyka starożytności. Niemal całe życie spędził w Syrakuzach na Sycylii (w owym czasie była to grecka kolonia), choć przez jakiś czas przebywał prawdopodobnie w Aleksandrii — najważniejszym centrum naukowym epoki. Tam mógł spotkać Eratostenesa i innych następców Euklidesa. Zginął z ręki rzymskiego żołnierza podczas oblężenia Syrakuz. Archimedes przeszedł też do historii jako wielki wynalazca (m.in. śruba Archimedesa) i oczywiście fizyk (*Eureka!*).

Jego dorobek matematyczny obejmuje m.in. wspomnianą w tekście metodę przybliżania π, obliczenie pola odcinka paraboli, a przede wszystkim odkrycie metody obliczania objętości kuli. Archimedes odkrył tę metodę za pomocą bardzo finezyjnego rozumowania, wykorzystując prawo dźwigni. Później, w rozprawie *O kuli i walcu* dał ścisłe, geometryczne wyprowadzenie swojej metody pokazując, że objętość kuli to 2/3 objętości opisanego na niej walca. Wynik ten był dla Archimedesa źródłem szczególnej dumy. Archimedes życzył sobie, aby motyw kuli wpisanej w walec umieścić na jego grobie. Grób taki widział w Syrakuzach jeszcze Cyceron około roku 75 p.n.e.