ANALIZA
MATEMATYCZNA 2

Marian Gewert   Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Przykłady i zadania

Wydanie dwudzieste zmienione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2019

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–62780–63–1

Wydanie XX zmienione, Wrocław 2019
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS, sp. z o.o., A.Bieroński, P.Bieroński, sp. jawna

Spis treści

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań jest drugą częścią zestawu podręczników do Analizy matematycznej 2. Podręczniki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik, ale mogą z nich korzystać także studenci uczelni ekonomicznych, pedagogicznych i rolniczych oraz niektórych wydziałów uniwersytetów.

Przykłady i zadania z tego zbioru obejmują całki niewłaściwe, szeregi liczbowe, potęgowe i Fouriera oraz rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych wraz z zastosowaniami. Ilustrują one materiał teoretyczny przedstawiony w pierwszej części zestawu pt. „*Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*". Zbiór zawiera przykładowe zadania z pełnymi rozwiązaniami oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Przykłady poprzedzono wiadomościami i wzorami potrzebnymi do ich rozwiązania. Do wszystkich zadań podane są odpowiedzi lub wskazówki.

Przykłady i zadania w zbiorze są podobnych typów oraz mają zbliżony stopień trudności do zadań, które studenci rozwiązują zwykle na kolokwiach i egzaminach. Oryginalne zestawy zadań ze sprawdzianów z poprzednich lat można znaleźć w trzeciej części zestawu pt. „*Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*". Studentów zainteresowanych rozwiązywaniem trudnych i nietypowych zadań zachęcamy do zapoznania się z książką „*Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami*".

Do obecnego wydania dodano przykłady i zadania dotyczące szeregów Fouriera oraz metody najmniejszych kwadratów. Ponadto zmieniono układ typograficzny książki, dołączono wiele nowych rysunków i poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za uwagi o poprzednich wydaniach. Dziękujemy również naszym Studentom za wskazanie błędów w odpowiedziach do zadań. Czytelników prosimy o przesyłanie uwag o podręczniku oraz informacji o zauważonych błędach i usterkach.

Marian Gewert *Zbigniew Skoczylas*

1 Całki niewłaściwe

Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

► **Przykład 1.1.** Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x^4}$; (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^2+4}$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}}$; (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+9}$;

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-2x}\,dx$; (f) $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^\infty x\cos x^2\,dx$; (g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$; (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x\ln\left(x^2+1\right)\,dx$.

Rozwiązanie. Całkę niewłaściwą funkcji f na przedziale nieograniczonym $[a,\infty)$ lub $(-\infty,b]$ określamy odpowiednio wzorami:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_a^T f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{S\to-\infty}\int_S^b f(x)\,dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna. Całkę niewłaściwą funkcji f na prostej $(-\infty,\infty)$ definujemy jako sumę całek niewłaściwych na przedziałach $(-\infty,a]$, $[a,\infty)$, gdzie a oznacza dowolną liczbę. Zbieżność tej całki ustalamy w zależności od zbieżności całek na półprostych. Jeżeli obie całki są zbieżne, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli jedna z tych całek jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞, a druga jest zbieżna albo rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub ∞, to mówimy, że całka jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna.

► (a) Mamy

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x^4} = \lim_{T\to\infty}\int_3^T \frac{dx}{x^4} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{-1}{3x^3}\right]_3^T = \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{3T^3}+\frac{1}{81}\right) = \frac{1}{81},$$

zatem rozważana całka jest zbieżna.

► (b) Mamy

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^2+4} = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{x\,dx}{x^2+4}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t=x^2+4;\ \ dt=2x\,dx\\ x=0,\ t=4;\ \ x=T,\ t=T^2+4\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\int_4^{T^2+4}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\big[\ln|t|\big]_4^{T^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left[\ln\left(T^2+4\right)-\ln 4\right] = \frac{1}{2}(\infty-\ln 4)=\infty.$$

Otrzymaliśmy granicę niewłaściwą ∞, więc rozważana całka jest rozbieżna do ∞.

► (c) Mamy

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}} = \lim_{S\to-\infty}\int_S^{-1}\frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t=3x-5;\ \ dt=3\,dx\\ x=S,\ t=3S-5;\ \ x=-1,\ t=-8\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{S\to-\infty}\int_{3S-5}^{-8}\frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{3}\lim_{S\to-\infty}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}\right]_{3S-5}^{-8}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{S\to-\infty}\left[\sqrt[3]{(-8)^2}-\sqrt[3]{(3S-5)^2}\right] = \frac{1}{2}(4-\infty) = -\infty.$$

Otrzymaliśmy granicę niewłaściwą $-\infty$, więc rozważana całka jest rozbieżna do $-\infty$.

► (d) Przyjmując $a=0$ w definicji całki niewłaściwej na $(-\infty,\infty)$, otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+9} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+9}+\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+9}.$$

Ponieważ

$$\int\frac{dx}{x^2+9}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez}\\ \text{podstawienie}\\ x=3t;\ \ dx=3\,dt\end{array}\right] = \int\frac{3\,dt}{9t^2+9}$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}+C,$$

więc

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+9}+\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+9} = \lim_{S\to-\infty}\int_S^0\frac{dx}{x^2+9}+\lim_{T\to\infty}\int_0^T\frac{dx}{x^2+9}$$

$$= \lim_{S\to-\infty}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}\right]_S^0+\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}\right]_0^T =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{S\to-\infty}\left(-\operatorname{arc\,tg}\frac{S}{3}\right) + \frac{1}{3}\lim_{T\to\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{T}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Zatem rozważana całka jest zbieżna.

▶ (e) Przyjmując jak powyżej $a = 0$, otrzymamy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-2x}\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{S\to-\infty}\int\limits_{S}^{0} e^{-2x}\,dx + \lim_{T\to\infty}\int\limits_{0}^{T} e^{-2x}\,dx$$

$$= \lim_{S\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_S^0 + \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^T$$

$$= \lim_{S\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-2S}-\frac{1}{2}\right) + \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2T}\right) = \left(\infty-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right) = \infty.$$

Ponieważ pierwsza z granic jest równa ∞, a druga jest skończona, więc rozważana całka jest rozbieżna do ∞.

▶ (f) Mamy

$$\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty} x\cos x^2\,dx = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{T} x\cos x^2\,dx \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t = x^2;\ \ dt = 2x\,dx\\ x=\sqrt{\pi},\ t=\pi;\ \ x=T,\ t=T^2\end{array}\right] = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{\pi}^{T^2}\frac{1}{2}\cos t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\Big[\sin t\,\Big]_{\pi}^{T^2} = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left(\sin T^2 - \sin\pi\right) = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\sin T^2.$$

Granica $\lim\limits_{T\to\infty}\sin T^2$ nie istnieje, gdyż np. dla ciągów $T_n^{'} = \sqrt{n\pi}$, $T_n^{''} = \sqrt{(\pi/2)+2n\pi}$, rozbieżnych do ∞, mamy odpowiednio

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(T_n^{'}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\sin n\pi = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\sin\left(T_n^{''}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1.$$

Zatem badana całka jest rozbieżna.

▶ (g) Mamy

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{0}^{T}\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t=e^x;\ \ dt=e^x\,dx\\ x=0,\ t=1;\ \ x=T,\ t=e^T\end{array}\right] = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{1}^{e^T}\frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\Big[\operatorname{arc\,tg} t\,\Big]_1^{e^T} = \lim_{T\to\infty}\left[\operatorname{arc\,tg} e^T - \operatorname{arc\,tg} 1\right] = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Zatem badana całka jest zbieżna.

▶ (h) Przyjmując $a = 0$ w definicji całki niewłaściwej na $(-\infty,\infty)$, otrzymamy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\ln\left(x^2+1\right)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x\ln\left(x^2+1\right)\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} x\ln\left(x^2+1\right)\,dx.$$

Pokażemy, że druga z całek jest rozbieżna do ∞. Mamy

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty x\ln\left(x^2+1\right)\,dx &= \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T x\ln\left(x^2+1\right)\,dx\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t=x^2+1;\ dt=2x\,dx\\ x=0,\,t=1;\ x=T,\,t=T^2+1\end{array}\right]\\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_1^{T^2+1}\ln t\,dt\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez części}\\ u(t)=\ln t,\ v'(t)=1\\ u'(t)=1/t,\ v(t)=t\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left(\Big[t\ln t\Big]_1^{T^2+1}-\int\limits_1^{T^2+1}dt\right)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left[\left(T^2+1\right)\ln\left(T^2+1\right)-T^2\right]\\
&= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left\{\left(T^2+1\right)\left[\ln\left(T^2+1\right)-1\right]+1\right\}=\infty.
\end{aligned}$$

Z nieparzystości funkcji podcałkowej wynika, że

$$\int\limits_{-\infty}^0 x\ln\left(x^2+1\right)\,dx=-\infty.$$

Otrzymaliśmy wyrażenie nieoznaczone $-\infty+\infty$, zatem badana całka niewłaściwa jest rozbieżna.

▷ **Zadanie 1.1.** Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int\limits_1^\infty\frac{dx}{(x+2)^2}$; (b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty 2^{-x}\,dx$; (c) $\displaystyle\int\limits_\pi^\infty x\sin x\,dx$;

(d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^0\frac{dx}{x^2+4}$; (e) $\displaystyle\int\limits_1^\infty\frac{dx}{\sqrt[3]{3x+5}}$; (f) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{dx}{x^2-4x+13}$;

(g) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^3}\,dx$; (h) $\displaystyle\int\limits_0^\infty\frac{x^2\,dx}{x^6+1}$; (i*) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-1}(\pi-\operatorname{arc\,ctg}x)\,dx$.

Odpowiedzi. (a) $1/3$; (b) $1/\ln 2$; (c) rozbieżna; (d) $\pi/4$; (e) ∞; (f) $\pi/3$; (g) ∞; (h*) $\pi/6$; (i*) ∞.

Kryteria zbieżności całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

► **Przykład 1.2.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin^2 x\,dx$; (b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x\,dx}{x^2-\operatorname{arc\,tg} x}$; (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(2^x+1)\,dx}{4^x+1}$; (d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+2x+3}{x^4+x^3+1}\,dx$.

Rozwiązanie. *Kryterium porównawcze.* Niech funkcje całkowalne f i g spełniają dla każdego $x \geqslant a$ nierówności $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Wówczas:

(1) jeżeli całka $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ jest zbieżna, to całka $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ także jest zbieżna;

(2) jeżeli całka $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest rozbieżna do ∞, to całka $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ także jest rozbieżna do ∞.

Ponadto w rozwiązaniach wykorzystamy fakt, że całka niewłaściwa postaci $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ $(a > 0)$ jest zbieżna dla $p > 1$ i rozbieżna do ∞ dla $p \leqslant 1$.

► (a) Dla każdego $x \geqslant 0$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant e^{-x}\sin^2 x \leqslant e^{-x}.$$

Ponadto całka $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ jest zbieżna, gdyż

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty}\left[1-e^{-T}\right] = 1.$$

Zatem z kryterium porównawczego zbieżności (1) wynika zbieżność badanej całki.

► (b) Dla każdego $x \geqslant 2$ prawdziwe są nierówności

$$\frac{x}{x^2-\operatorname{arc\,tg} x} \geqslant \frac{x}{x^2-0} = \frac{1}{x} \geqslant 0.$$

Ponadto z podanego na wstępie faktu wynika, że całka $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ jest rozbieżna do ∞. Zatem z kryterium porównawczego rozbieżności (2) wynika rozbieżność badanej całki do ∞.

► (c) Dla każdego $x \geqslant 0$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{2^x+1}{4^x+1} \leqslant \frac{2^x+1}{4^x} = 2^{-x}+4^{-x}.$$

Całki niewłaściwe $\int\limits_0^\infty 2^{-x}\,dx$, $\int\limits_0^\infty 4^{-x}\,dx$ są zbieżne, gdyż

$$\int\limits_0^\infty 2^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T 2^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\ln 2}\left[1-2^{-T}\right] = \frac{1}{\ln 2}$$

oraz

$$\int\limits_0^\infty 4^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T 4^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{4^{-x}}{\ln 4}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\ln 4}\left[1-4^{-T}\right] = \frac{1}{\ln 4}.$$

Zatem z kryterium porównawczego zbieżności (1) wynika zbieżność badanej całki.

► (d) Dla każdego $x \geqslant 1$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{x^2+2x+3}{x^4+x^3+1} \leqslant \frac{x^2+2x^2+3x^2}{x^4+0+0} = \frac{6}{x^2}.$$

Z podanego na wstępie faktu wynika, że całka $\int\limits_1^\infty \frac{6\,dx}{x^2}$ jest zbieżna. Zatem na mocy kryterium porównawczego zbieżności (1) rozważana całka także jest zbieżna.

▷ **Zadanie 1.2.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\int\limits_{10}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$; (b) $\int\limits_2^\infty \frac{(x-1)\,dx}{x^4+x+1}$; (c) $\int\limits_\pi^\infty \frac{(1+\sin x)\,dx}{x^3}$;

(d) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{2^x\,dx}{x-1}$; (e) $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^7+1}}$; (f) $\int\limits_2^\infty \frac{\left(\sqrt{2}+\cos x\right)\,dx}{\sqrt{x}-1}$.

Odpowiedzi. (a); (f) rozbieżna; (b); (c); (d); (e); zbieżna;

► **Przykład 1.3.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\int\limits_1^\infty \frac{e^{3x}\,dx}{3e^{4x}-5}$; (b) $\int\limits_\pi^\infty \frac{x\,dx}{x^2+\cos x}$; (c) $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{x+1}$; (d) $\int\limits_2^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+4}$.

Rozwiązanie. *Kryterium ilorazowe.* Niech funkcje f i g będą dodatnie (ujemne) na półprostej $[a,\infty)$ oraz niech spełniają warunek

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k, \text{ gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas całki niewłaściwe funkcji f, g są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do $\infty\,(-\infty)$.

► (a) Zauważmy, że dla dużych x mamy

$$\frac{e^{3x}}{3e^{4x}-5} \approx \frac{e^{3x}}{3e^{4x}} = \frac{1}{3e^x}.$$

Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{3e^{4x}-5} \qquad \text{oraz} \qquad g(x) = \frac{1}{3e^x},$$

otrzymamy

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{e^{3x}}{3e^{4x}-5}}{\dfrac{1}{3e^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{4x}}{3e^{4x}-5} \overset{:e^{4x}}{\underset{:e^{4x}}{=\!=}} \lim_{x\to\infty} \frac{3}{3-5e^{-4x}} = \frac{3}{3-0} = 1.$$

Ponieważ całka $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{e^x}$ jest zbieżna (Przykład 1.2 (a)) oraz $0 < k < \infty$, więc na mocy kryterium ilorazowego badana całka także jest zbieżna.

► (b) Zauważmy, że dla dużych x mamy

$$\frac{x}{x^2+\cos x} \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Zatem w kryterium ilorazowym przyjmujemy

$$f(x) = \frac{x}{x^2+\cos x} \qquad \text{oraz} \qquad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Wtedy

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x}{x^2+\cos x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+\cos x} \overset{:x^2}{\underset{:x^2}{=\!=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{\cos x}{x^2}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Ponieważ całka $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{dx}{x}$ jest rozbieżna do ∞ (Przykład 1.2 (b)) oraz $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wynika, że badana całka także jest rozbieżna do ∞.

► (c) Ponieważ $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \pi/2$, więc dla dużych x mamy

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x+1} \approx \frac{\dfrac{\pi}{2}}{x+1} = \frac{\pi}{2(x+1)}.$$

Zatem przyjmujemy

$$f(x) = \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x+1} \qquad \text{oraz} \qquad g(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}.$$

Wtedy

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x+1}}{\frac{\pi}{2(x+1)}} = 2 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\pi} = 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = 1.$$

Całka $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x+1}$ jest rozbieżna do ∞, gdyż

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x+1} = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \frac{dx}{x+1} = \lim_{T\to\infty} \Big[\ln|x+1|\Big]_0^T = \lim_{T\to\infty} \ln(T+1) = \infty.$$

Ponadto $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wynika, że badana całka także jest rozbieżna do ∞.

► (d) Zauważmy, że dla dużych x mamy

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2+4} \approx \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Zatem przyjmując

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+4} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}},$$

otrzymamy

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{x^2+4}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+4} \overset{:x^2}{\underset{:x^2}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Z faktu podanego na wstępie Przykładu 1.2 wynika, że całka postaci $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ jest zbieżna. Ponadto $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wnioskujemy, że badana całka także jest zbieżna.

▷ **Zadanie 1.3.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\int\limits_5^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5-3}}$; (b) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\left(e^{2x}+1\right)\,dx}{e^x-1}$; (c) $\int\limits_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{x^2\,dx}{x^3-\sin x}$; (e) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{(2^x-1)\,dx}{x^2 2^x+1}$; (f) $\displaystyle\int\limits_0^\infty 2^x \sin 3^{-x}\,dx$.

Odpowiedzi. (b) rozbieżna do $-\infty$; (d) rozbieżna do ∞; (a); (c); (e); (f) zbieżna.

Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

► **Przykład 1.4.** Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\sin^3 x\,dx}{x^2}$; (b) $\displaystyle\int\limits_2^\infty \frac{x\cos x\,dx}{(x^2-1)^3}$; (c) $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^\infty x\cos x\,dx$; (d*) $\displaystyle\int\limits_\pi^\infty \frac{\sin x\,dx}{x}$.

Rozwiązanie. Mówimy, że całka $\displaystyle\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna bezwzględnie, jeżeli $\displaystyle\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ jest zbieżna. Dowodzi się, że jeżeli całka niewłaściwa jest zbieżna bezwzględnie, to jest zbieżna.

► (a) Dla każdego $x \geqslant 1$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin^3 x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Ponadto całka $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ jest zbieżna. Z kryterium porównawczego zbieżności (1, str. 13) wynika, że całka $\displaystyle\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin^3 x}{x^2}\right| dx$ jest zbieżna. Stąd całka $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\sin^3 x\,dx}{x^2}$ jest zbieżna bezwzględnie, a więc również zbieżna.

► (b) Zauważmy, że dla każdego $x \geqslant 2$ zachodzą nierówności

$$0 \leqslant \left|\frac{x\cos x}{(x^2-1)^3}\right| \leqslant \frac{x}{(x^2-1)^3}.$$

Ponadto całka $\displaystyle\int\limits_2^\infty \frac{x\,dx}{(x^2-1)^3}$ jest zbieżna, gdyż

$$\int\limits_2^\infty \frac{x\,dx}{(x^2-1)^3} = \lim_{T\to\infty}\int\limits_2^T \frac{x\,dx}{(x^2-1)^3}\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t=x^2-1;\ dt=2x\,dx\\ x=2,\ t=3;\ x=T,\ t=T^2-1\end{array}\right] = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\int\limits_3^{T^2-1}\frac{dt}{t^3}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_3^{T^2-1} = \frac{1}{4}\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{(T^2-1)^2}\right) = \frac{1}{36}.$$

Zatem, analogicznie jak w poprzednim przykładzie, na mocy kryterium porównawczego, badana całka niewłaściwa jest zbieżna bezwzględnie, a więc również zbieżna.

► (c) Pokażemy, że badana całka jest rozbieżna. Mamy

$$\int_{\pi/2}^{\infty} x\cos x\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_{\pi/2}^{T} x\cos x\,dx \begin{bmatrix}\text{całkowanie przez części}\\ u(x)=x,\ v'(x)=\cos x\\ u'(x)=1,\ v(x)=\sin x\end{bmatrix}$$
$$= \lim_{T\to\infty}\left(\left[x\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{T} - \int_{\pi/2}^{T}\sin x\,dx\right) =$$
$$= \lim_{T\to\infty}\left[x\sin x+\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{T} = \lim_{T\to\infty}\left[(T\sin T+\cos T)-\frac{\pi}{2}\right].$$

Zauważmy teraz, że granica $\lim\limits_{T\to\infty}(T\sin T+\cos T)$ nie istnieje, gdyż np. dla ciągów $T_n^{'}=2n\pi$, $T_n^{''}=(2n+1)\pi$, rozbieżnych do ∞, mamy odpowiednio

$$\lim_{n\to\infty}\left(T_n^{'}\sin T_n^{'}+\cos T_n^{'}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2n\pi\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0}+\underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1}\right) = 1$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}\left(T_n^{''}\sin T_n^{''}+\cos T_n^{''}\right) = \lim_{n\to\infty}\left((2n+1)\pi\underbrace{\sin((2n+)\pi)}_{=0}+\underbrace{\cos((2n+1)\pi)}_{=-1}\right) = -1,$$

więc badana całka jest rozbieżna. Pokażemy, że również całka $\int\limits_{\pi/2}^{\infty}|x\cos x|\,dx$ nie jest zbieżna. Gdyby bowiem całka ta była zbieżna, to wobec podanego na wstępie faktu byłaby zbieżna także całka $\int\limits_{\pi/2}^{\infty}x\cos x\,dx$, co jak pokazaliśmy powyżej nie zachodzi.

► (d*) Pokażemy, że badana całka nie jest zbieżna bezwzględnie, ale jest zbieżna. W rozwiązaniu wykorzystamy nierówność $|\sin x|\geqslant\sin^2 x$ zachodzącą dla każdego $x\in\mathbb{R}$ oraz okresowość funkcji $\sin^2 x$. Stosując tę nierówność otrzymamy

$$\int_{\pi}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geqslant \int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx+\int_{3\pi}^{4\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx+\ldots$$
$$\geqslant \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{2\pi}\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin^2 x}{3\pi}\,dx+\int_{3\pi}^{4\pi}\frac{\sin^2 x}{4\pi}\,dx+\ldots$$
$$= \left(\int_{\pi}^{2\pi}\sin^2 x\,dx\right)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{3\pi}+\frac{1}{4\pi}+\ldots\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right) = \infty.$$

To oznacza, że badana całka nie jest zbieżna bezwzględnie. Uzasadnienie jej zbieżności jest bardziej skomplikowane. Wymaga zastosowania twierdzenia Dirichleta. Twierdzenie to orzeka, że jeżeli funkcja g ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,\infty)$ oraz maleje do 0, gdy $x\to\infty$, a funkcja ciągła f ma ograniczoną funkcję pierwotną na $[a,\infty)$, to całka niewłaściwa $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ jest zbieżna. Łatwo sprawdzić, że funkcje $g(x)=1/x$, $f(x)=\sin x$ spełniają na przedziale $[\pi,\infty)$ założenia twierdzenia Dirichleta. Zatem rozważana całka jest zbieżna.

▷ **Zadanie 1.4.** Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin 3x\,dx}{e^{2x}+1}$; (b) $\displaystyle\int\limits_\pi^\infty x\cos 2x\,dx$; (c) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^2\sin x\,dx}{x^4+1}$;

(d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^0 \frac{\cos x\,dx}{x^2+1}$; (e*) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{2^x\cos x\,dx}{4^x+\sin x}$; (f*) $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$.

Odpowiedzi. (a); (c); (d); (e*) zbieżna bezwzględnie; (b) rozbieżna; (f*) zbieżna, ale nie zbieżna bezwzględnie.

Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

► **Przykład 1.5.** Korzystając z defnicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int\limits_\pi^{3\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x}$; (b) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; (c) $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1}$;

(d) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}$; (e) $\displaystyle\int\limits_0^{3/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$; (f) $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{dx}{2-\sqrt{x}}$.

Rozwiązanie. Niech funkcja f określona na przedziale $(a,b]$ będzie nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a. Całkę funkcji f na przedziale $(a,b]$ definiujemy wzorem:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{A\to a^+}\int\limits_A^b f(x)\,dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna. Analogicznie definiuje się całkę funkcji f określonej na przedziale $[a,b)$ i nieograniczonej tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu b.

Niech funkcja f określona na przedziale (a,b) jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a i na lewostronnym sąsiedztwie punktu b. Wtedy całkę funkcji f na przedziale (a,b) definiujemy wzorem

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^d f(x)\,dx + \int\limits_d^b f(x)\,dx,$$

gdzie d jest dowolnym punktem przedziału (a,b). Zbieżność tej całki ustalamy w zależności od zbieżności całek na przedziałach $(a,d]$, $[d,b)$. Jeżeli obie całki są zbieżne, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli jedna z tych całek jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞, a druga jest zbieżna albo rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub ∞, to mówimy, że całka jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna. Niech teraz funkcja f określona na zbiorze $[a,c)\cup(c,b]$ będzie nieograniczona tylko na obu jednostronnych sąsiedztwach punktu c. Wtedy całkę funkcji f na przedziale $[a,b]$ określamy wzorem

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Zbieżność tej całki ustalamy tak samo jak zbieżność całki na przedziale (a,b).

► (a) W przedziale $(\pi, 3\pi/2]$ funkcja $f(x) = 1/\sin^2 x$ jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu π. Mamy bowiem $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{1}{\sin^2 x} = \infty$. Zatem

$$\int\limits_\pi^{3\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{A\to\pi^+} \int\limits_A^{3\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{A\to\pi^+} \Big[-\operatorname{ctg} x\Big]_A^{3\pi/2} = \lim_{A\to\pi^+} (0 + \operatorname{ctg} A) = \infty,$$

czyli badana całka jest rozbieżna do ∞.

► (b) W przedziale $[0,1)$ funkcja $f(x) = 1/\sqrt[3]{1-x}$ jest nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu 1. Mamy bowiem $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \infty$. Zatem

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{B\to 1^-} \int\limits_0^B \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ t = 1-x;\ \ dt = -\,dx \\ x=0,\ t=1;\ \ x=B,\ t=1-B \end{array}\right] = \lim_{B\to 1^-} \int\limits_1^{1-B} \frac{-dt}{\sqrt[3]{t}}$$

$$= \lim_{B\to 1^-} \int\limits_{1-B}^1 t^{-1/3} dt = \lim_{B\to 1^-} \left[\frac{3}{2} t^{2/3}\right]_{1-B}^1 = \frac{3}{2} \lim_{B\to 1^-} \left(1 - \sqrt[3]{(1-B)^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Badana całka jest zbieżna.

► (c) W przedziale $(-1,1)$ funkcja podcałkowa $f(x) = 1/\left(x^2-1\right)$ jest nieograniczona na prawostronnym sąsiedztwie punktu -1 oraz na lewostronnym sąsiedztwie punktu 1, gdyż mamy

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty.$$

Zatem przyjmując w określeniu całki niewłaściwej za miejsce podziału $a = 0$ otrzymamy

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-1} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2-1} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-1}.$$

Zbadamy z definicji zbieżność każdej z całek po prawej stronie znaku równości. Mamy

$$\begin{aligned}
\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-1} &= \lim_{B\to 1^-} \int\limits_{0}^{B} \frac{dx}{x^2-1} \left[\begin{array}{c} \text{rozkład na ułamki proste} \\ \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{B\to 1^-} \int\limits_{0}^{B} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \lim_{B\to 1^-} \Big[\ln|x-1| - \ln|x+1| \Big]_0^B \\
&= \frac{1}{2} \lim_{B\to 1^-} \ln \left| \frac{B-1}{B+1} \right| = \frac{1}{2} \lim_{B\to 1^-} \ln \frac{1-B}{1+B} = -\infty.
\end{aligned}$$

Z parzystości funkcji podcałkowej wynika, że także

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2-1} = -\infty.$$

Zatem badana całka jest rozbieżna do $-\infty$.

► (d) W przedziale $[0, \pi/2]$ funkcja podcałkowa $f(x) = \cos x / \sqrt[3]{1-2\sin x}$ jest nieograniczona na obu jednostronnych sąsiedztwach punktu $\pi/6$. Mamy bowiem

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}^-} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = \infty, \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{6}^+} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = -\infty.$$

Więc rozważana całka niewłaściwa jest określona wzorem

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = \int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}.$$

Zbadamy zbieżność każdej z całek po prawej stronie znaku równości. Najpierw jednak obliczymy całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}$. Mamy

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie} \\ \text{przez podstawienie} \\ t = 1-2\sin x; \\ dt = -2\cos x\, dx \end{array} \right] &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt[3]{t^2} + C \\
&= -\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1-2\sin t)^2} + C.
\end{aligned}$$

Zatem dla pierwszej całki niewłaściwej mamy

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = \lim_{B\to\frac{\pi}{6}-} \int_0^B \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = -\frac{3}{4}\lim_{B\to\frac{\pi}{6}-}\left[\sqrt[3]{(1-2\sin x)^2}\right]_0^B$$

$$= -\frac{3}{4}\lim_{B\to\frac{\pi}{6}-}\left[\sqrt[3]{(1-2\sin B)^2}-1\right] = \frac{3}{4}.$$

Dla drugiej całki niewłaściwej mamy

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = \lim_{A\to\frac{\pi}{6}+} \int_A^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = -\frac{3}{4}\lim_{A\to\frac{\pi}{6}+}\left[\sqrt[3]{(1-2\sin x)^2}\right]_A^{\pi/2}$$

$$= -\frac{3}{4}\lim_{A\to\frac{\pi}{6}+}\left[1-\sqrt[3]{(1-2\sin A)^2}\right] = -\frac{3}{4}.$$

Stąd badana całka jest zbieżna do $\dfrac{3}{4}+\left(-\dfrac{3}{4}\right)=0.$

► (e) Funkcja $f(x)=\left(1/x^2\right)\sin\left(1/x\right)$ na przedziale $(0,3/\pi]$ jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0, bo dla ciągu $x_n=\dfrac{2}{\pi(1+4n)} \longrightarrow 0^+$ mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{2}{\pi(1+4n)}\right)^2}\sin\frac{1}{\dfrac{2}{\pi(1+4n)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi(1+4n)}{2}\right)^2\sin\frac{\pi(1+4n)}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi(1+4n)}{2}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi(1+4n)}{2}\right)^2 = \infty.$$

Zatem badaną całkę określamy wzorem

$$\int_0^{3/\pi}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to 0+}\int_A^{3/\pi}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx\left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie}\\ t=1/x;\;\; dt=-\left(1/x^2\right)\,dx\\ x=A,\; t=1/A;\;\; x=3/\pi,\; t=\pi/3\end{array}\right]$$

$$= -\int_{1/A}^{\pi/3}\sin t\,dt = \lim_{A\to 0+}\left[\cos t\right]_{1/A}^{\pi/3} = \frac{1}{2}-\lim_{A\to 0+}\cos\frac{1}{A}.$$

Ponieważ granica $\lim\limits_{A\to 0+}\cos(1/A)$ nie istnieje, gdyż np. dla ciągów $A_n^{'}=1/(2n\pi)$, $A_n^{''}=2/(\pi+2n\pi)$, zbieżnych do 0^+, mamy odpowiednio

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{A_n^{'}} = \lim_{n\to\infty}\cos 2n\pi = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{A_n^{''}} = \lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) = 0,$$

więc badana całka jest rozbieżna.

► (f) W przedziale $[1,4)$ funkcja $f(x) = 1/\left(2-\sqrt{x}\right)$ jest nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu 4. Mamy bowiem

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{2-\sqrt{x}} = \infty.$$

Zgodnie z definicją całki niewłaściwej otrzymamy

$$\int_1^4 \frac{dx}{2-\sqrt{x}} = \lim_{B\to 4^-} \int_1^B \frac{dx}{2-\sqrt{x}} \left[\begin{array}{c}\text{całkowanie przez podstawienie} \\ x=t^2\ (t\geqslant 0);\ \ dx = 2t\,dt \\ x=1,\ t=1;\ \ x=B,\ t=\sqrt{B}\end{array}\right] = \lim_{B\to 4^-} \int_1^{\sqrt{B}} \frac{2t\,dt}{2-t}$$

$$= \lim_{B\to 4^-} 2 \int_1^{\sqrt{B}} \left(\frac{-2}{t-2} - 1\right) dt = 2 \lim_{B\to 4^-} \Big[-2\ln|t-2| - t\Big]_1^{\sqrt{B}}$$

$$= 2 \lim_{B\to 4^-} \left(-2\ln\left|\sqrt{B}-2\right| - \sqrt{B} + 1\right) = \infty.$$

Zatem badana całka jest rozbieżna do ∞.

▷ **Zadanie 1.5.** Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$; (b) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sin x}$; (c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x(x-3)}$;

(d) $\displaystyle\int_0^e \frac{\ln x\,dx}{x}$; (e) $\displaystyle\int_3^5 \frac{2^x\,dx}{2^x-8}$; (f*) $\displaystyle\int_0^e \frac{\sin\ln x\,dx}{x}$.

Odpowiedzi. (a) 5/3; (b) ∞; (c) $-\infty$; (d) $-\infty$; (e) ∞; (f*) rozbieżna.

Kryteria zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju

► **Przykład 1.6.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+\sin x)\,dx}{\sqrt{x}}$; (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+x}}$; (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{(x-1)^2}$; (d) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} x\,\mathrm{tg}\,x\,dx$.

Rozwiązanie. *Kryterium porównawcze.* Niech funkcje f i g będą nieograniczone w przedziale $(a,b]$ tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a oraz niech dla każdego x z tego przedziału spełniają nierówności $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Wówczas:

(1) jeżeli całka $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ jest zbieżna, to także całka $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna;

(2) jeżeli całka $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ jest rozbieżna do ∞, to także całka $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ jest rozbieżna do ∞.

Ponadto w rozwiązaniach wykorzystamy fakt, że całka niewłaściwa drugiego rodzaju postaci $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^p}$ $(b > 0)$ jest zbieżna dla $0 < p < 1$ i rozbieżna do ∞ dla $p \geqslant 1$.

► (a) W przedziale $(0, 1]$ funkcja $(1 + \sin x)/\sqrt{x}$ jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0. Zauważmy, że dla każdego $x > 0$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{1 + \sin x}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1 + 1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Ponadto, całka niewłaściwa $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ jest zbieżna, co wynika z podanego na wstępie faktu. Zatem z kryterium porównawczego zbieżności (1) wynika, że badana całka jest także zbieżna.

► (b) W przedziale $(0, 2]$ funkcja $1/\sqrt[3]{x^4 + x}$ jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0. Zauważmy, że dla $x > 0$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{0 + x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Ponieważ z podanego na wstępie faktu wynika, że całka $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ jest zbieżna, więc wobec kryterium porównawczego zbieżności (1) także badana całka jest zbieżna.

► (c) W przedziale $(0, 1]$ funkcja $e^x/(x-1)^2$ jest nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu 1. Dla każdego $0 \leqslant x < 1$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{e^0}{(x-1)^2} \leqslant \frac{e^x}{(x-1)^2}.$$

Ponadto, całka niewłaściwa $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ jest rozbieżna do ∞, gdyż

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{B \to 1^-} \int\limits_0^B \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{B \to 1^-} \left[\frac{-1}{x-1}\right]_0^B = \lim_{B \to 1^-} \left(\frac{-1}{B-1} - 1\right) = \infty.$$

Zatem z kryterium porównawczego rozbieżności (2) wynika, że badana całka jest także rozbieżna do ∞.

► (d) W przedziale $[\pi/4, \pi/2)$ funkcja $x \operatorname{tg} x$ jest nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu $\pi/2$. Zauważmy, że dla $\pi/4 \leqslant x < \pi/2$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x \leqslant x \operatorname{tg} x.$$

Uzasadnimy teraz rozbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx$. Mamy

$$\begin{aligned}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx &= \lim_{B \to \frac{\pi}{2}^-} \int\limits_{\pi/4}^{B} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\lim_{B \to \frac{\pi}{2}^-} \int\limits_{\pi/4}^{B} \frac{(\cos x)' \, dx}{\cos x} \\ &= -\lim_{B \to \frac{\pi}{2}^-} \big[\ln|\cos x|\big]_{\pi/4}^{B} = \lim_{B \to \frac{\pi}{2}^-} \left[\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln|\cos B|\right] = \infty.\end{aligned}$$

Z kryterium porównawczego rozbieżności (2) wynika rozbieżność badanej całki do ∞.

▷ **Zadanie 1.6.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \, dx$; (b) $\int\limits_0^{2} \frac{e^x \, dx}{x^3}$; (c) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^2 x \, dx}{\sqrt[3]{x - \pi}}$;

(d) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$; (e*) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{16 - x^4}}$; (f*) $\int\limits_1^{3} \frac{x^6 \, dx}{(x-1)^2}$.

Odpowiedzi. (a); (c); (d); (e*) zbieżna; (b); (f*) rozbieżna do ∞.

► **Przykład 1.7.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{x^3}}$; (b) $\int\limits_0^{1} \frac{(e^x - 1) \, dx}{x^4}$; (c) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}$; (d) $\int\limits_0^{4} \frac{\sqrt{x} \, dx}{\ln(1 + 3x)}$.

Rozwiązanie. *Kryterium ilorazowe.* Niech funkcje dodatnie (ujemne) f i g będą nieograniczone w przedziale $(a, b]$ tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a. Ponadto niech spełniają warunek

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \text{ gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas całki niewłaściwe drugiego rodzaju funkcji f, g na przedziale $(a, b]$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do ∞ $(-\infty)$. Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia dla całek niewłaściwych na przedziale $[a, b)$.

Ponadto ponownie przypomnijmy fakt, że całka niewłaściwa drugiego rodzaju postaci

$$* \qquad \int_0^b \frac{dx}{x^p} \quad (b > 0) \text{ jest zbieżna dla } 0 < p < 1 \text{ i rozbieżna do } \infty \text{ dla } p \geqslant 1.$$

► (a) W przedziale całkowania funkcja $\sin x/\sqrt{x^3}$ jest dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0, mamy bowiem

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^3} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{3x^2} = \infty.$$

Ponieważ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, więc dla x bliskich 0 mamy

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \approx 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Funkcja $1/\sqrt{x}$ jest w przedziale całkowania dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0. Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym $g(x) = 1/\sqrt{x}$, otrzymamy

$$k = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ponieważ całka $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ jest zbieżna $(*)$ oraz $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wynika, że badana całka także jest zbieżna.

► (b) W przedziale całkowania funkcja $(e^x - 1)/x^4$ jest dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0, mamy bowiem

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^4} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{4x^3} = \infty.$$

Ponieważ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, więc dla x bliskich 0 mamy

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x^4} = \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{x^3} \approx 1 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3}.$$

Funkcja $1/x^3$ jest w przedziale całkowania dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0. Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym $g(x) = 1/x^3$, otrzymamy

$$k = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{e^x - 1}{x^4}}{\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Ponieważ całka $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3}$ jest rozbieżna do ∞ $(*)$ oraz $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wynika, że badana całka także jest rozbieżna do ∞.

► (c) W przedziale całkowania funkcja $1/(1+\cos x)$ jest dodatnia i nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu π. Przekształcimy całkę niewłaściwą w ten sposób, aby funkcja podcałkowa była nieograniczona na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0 zamiast lewostronnym π. Podstawiając $t = \pi - x$ otrzymamy

$$\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+\cos x} = \int\limits_0^\pi \frac{dt}{1-\cos t}.$$

Funkcja $f(t) = 1/(1-\cos t)$ jest na przedziale całkowania dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0. Ze wzoru Maclaurina funkcji $\cos t$ i $n = 3$ dla t bliskich 0 mamy $\cos t \approx 1 - \frac{t^2}{2}$. Funkcja $1/t^2$ w przedziale całkowania jest dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym punktu 0. Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym $g(t) = 1/t^2$, otrzymamy

$$k = \lim_{t\to0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to0^+} \frac{\frac{1}{1-\cos t}}{\frac{1}{t^2}}$$

$$= \lim_{t\to0^+} \frac{t^2}{1-\cos t} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{t\to0^+} \frac{2t}{\sin t} = 2 \lim_{t\to0^+} \frac{t}{\sin t} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Ponieważ całka $\int\limits_0^\pi \frac{dt}{t^2}$ jest rozbieżna do ∞ $(*)$ oraz $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wnioskujemy, że badana całka także jest rozbieżna do ∞.

(d) W przedziale całkowania funkcja $\sqrt{x}/\ln(1+3x)$ jest dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0, mamy bowiem

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+3x)} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{1+3x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1+3x}{6\sqrt{x}} = \infty.$$

Ponieważ $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, więc dla dodatnich x bliskich 0 mamy

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+3x)} = \frac{3x}{\ln(1+3x)} \cdot \frac{1}{3\sqrt{x}} \approx 1 \cdot \frac{1}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3\sqrt{x}}.$$

Funkcja $1/\left(3\sqrt{x}\right)$ w przedziale całkowania jest dodatnia i nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0. Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym

$g(x) = 1/\left(3\sqrt{x}\right)$, otrzymamy

$$k = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+3x)}}{\dfrac{1}{3\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{\ln(1+3x)} = 1$$

Ponieważ $\int\limits_0^4 \frac{dx}{3\sqrt{x}}$ jest zbieżna $(*)$ oraz $0 < k < \infty$, więc z kryterium ilorazowego wynika, że badana całka także jest zbieżna.

▷ **Zadanie 1.7.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

(a) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^3 x\,dx}{x^4}$; (b) $\int\limits_0^1 \frac{\left(e^{2x}-1\right)\,dx}{\sqrt[3]{x^4}}$; (c) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$;

(d) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(\arcsin x)^2}$; (e*) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{e^x-e^{2x}}}$; (f*) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{x-\sin x}$;

(g*) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2-\sqrt{x}}$; (h*) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$; (i*) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2^x-x^2}$.

Odpowiedzi. (b); (c); (e*) zbieżna; (a); (d); (f*); (g*); (h*); (i*) rozbieżna.

▶ **Przykład 1.8.** Obliczyć wartości główne całek niewłaściwych:

(a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+(x+1)^2}$; (b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx$; (c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\,dx$;

(d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-2)\,dx$; (e) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin x\,dx}{x^4}$; (f) $\int\limits_{-4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$.

Rozwiązanie. Wartość główną całki niewłaściwej pierwszego rodzaju funkcji f na prostej definiujemy wzorem

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} f(x)\,dx.$$

Z kolei wartość główną całki niewłaściwej drugiego rodzaju z funkcji f określonej na $[a,b]\setminus\{c\}$ i nieograniczonej jedynie na obustronnym sąsiedztwie punktu c definiujemy wzorem:

$$\text{v.p.} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right].$$

Jeżeli w definicjach granica nie istnieje, to mówimy, że całki niewłaściwe (pierwszego lub drugiego rodzaju) nie mają wartości głównej. Jeżeli całka niewłaściwa (pierwszego lub drugiego rodzaju) jest zbieżna do w, to wartość główna całki także się równa w.

► (a) Mamy

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+(x+1)^2} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{dx}{1+(x+1)^2} = \lim_{T\to\infty} \left[\operatorname{arc\,tg}(x+1)\right]_{-T}^{T}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \operatorname{arc\,tg}\left[(T+1) - \operatorname{arc\,tg}(-T)\right] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

► (b) Mamy

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} e^{-x}\, dx$$
$$= -\lim_{T\to\infty} \left[e^{-x}\right]_{-T}^{T} = -\lim_{T\to\infty} \left(e^{-T} - e^{T}\right) = -(0-\infty) = \infty.$$

► (c) Mamy

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) dx = -\lim_{T\to\infty} \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]_{-T}^{T}$$
$$= -\lim_{T\to\infty} \left[\cos\left(T - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(-T - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= \lim_{T\to\infty} \left[\cos\left(T + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(T - \frac{\pi}{6}\right)\right].$$

A dalej korzystając ze wzoru $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left((\alpha+\beta)/2\right)\sin\left((\alpha-\beta)/2\right)$ otrzymamy

$$\lim_{T\to\infty} \left[\cos\left(T + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(T - \frac{\pi}{6}\right)\right] = -2\lim_{T\to\infty} \sin T \sin\frac{\pi}{6} = -\lim_{T\to\infty} \sin T.$$

Ponieważ granica $\lim\limits_{T\to\infty} \sin T$ nie istnieje, więc wartość główna całki także nie istnieje.

► (d) Funkcja podcałkowa jest określona wzorem

$$\operatorname{sgn}(x-2) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 2, \\ 0 & \text{dla } x = 2, \\ 1 & \text{dla } x > 2. \end{cases}$$

Zatem

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-2)\, dx = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \operatorname{sgn}(x-2)\, dx$$
$$= \lim_{T\to\infty} \left(\int_{-T}^{2} \operatorname{sgn}(x-2)\, dx + \int_{2}^{T} \operatorname{sgn}(x-2)\, dx \right) =$$

$$\stackrel{T>2}{=\!=} \lim_{T\to\infty}\left(\int_{-T}^{2}(-1)\,dx+\int_{2}^{T}1\,dx\right)$$
$$= \lim_{T\to\infty}\left(\big[-x\big]_{-T}^{2}+\big[x\big]_{2}^{T}\right)=\lim\,[-2-T+T-2]=-4.$$

Zauważmy, że wartość główna całki istnieje mimo, że całka niewłaściwa na przedziale $(-\infty,\infty)$ nie istnieje.

▶ (e) Funkcja $f(x)=(\sin x)/x^4$ jest określona dla $x\neq 0$ i tylko na obustronnym sąsiedztwie punktu 0 jest nieograniczona. Zatem

$$\text{v.p.}\int_{-1}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^4}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\sin x\,dx}{x^4}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^4}\right)$$

Z nieparzystości funkcji f wynika, że

$$\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\sin x\,dx}{x^4}=-\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^4}.$$

Stąd

$$\text{v.p.}\int_{-1}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^4}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^4}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^4}\right)=0.$$

▶ (f) Funkcja $f(x)=1/\sqrt{|x|}$ jest określona dla $x\neq 0$ i tylko na obustronnym sąsiedztwie punktu 0 jest nieograniczona. Zatem

$$\text{v.p.}\int_{-4}^{9}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-4}^{-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}+\int_{\varepsilon}^{9}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-4}^{-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{-x}}+\int_{\varepsilon}^{9}\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)$$
$$=2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\left[-\sqrt{-x}\right]_{-4}^{-\varepsilon}+\left[\sqrt{x}\right]_{\varepsilon}^{9}\right\}=2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\left(-\sqrt{\varepsilon}+2\right)+\left(3-\sqrt{\varepsilon}\right)\right]=10.$$

▷ **Zadanie 1.8.** Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\cos x\,dx}{x^2+4}$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x\,dx}{e^x+1}$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x+5|}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(x^3-x^2\right)dx$; (e) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin x\,dx}{x^2}$; (f) $\displaystyle\int_{-8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{|x|}}$.

Odpowiedzi. (a) 0; (b) ∞; (c) 2; (d) $-\infty$; (e) 0; (f) 39/2.