

ANALIZA
MATEMATYCZNA 2

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Przykłady i zadania

Wydanie dziewiętnaste powiększone



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2016

Marian Gewert

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:

IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1993 – 2016 by Oficyna Wydawnicza GiS

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie $\text{\LaTeX}$.

ISBN 978-83-62780-37-2

Wydanie XIX powiększone, Wrocław 2016
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Oficyna Wydawnicza ATUT

Spis treści

Wstęp	7
1 Całki niewłaściwe	9
Przykłady	9
Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju	9
Kryteria zbieżności całek niewłaściwych pierwszego rodzaju	12
Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju	16
Całki niewłaściwe drugiego rodzaju	18
Kryteria zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju	21
Zadania	26
2 Szeregi liczbowe i potęgowe	28
Przykłady	28
Definicje i podstawowe twierdzenia	28
Kryteria zbieżności szeregów	31
Zbieżność bezwzględna szeregów	44
Szeregi potęgowe	46
Zadania	56
3 Rachunek różniczkowy funkcji dwóch i trzech zmiennych	59
Przykłady	59
Funkcje dwóch i trzech zmiennych	59
Granice funkcji w punkcie	62
Pochodne cząstkowe funkcji	66
Różniczka funkcji	72
Pochodne cząstkowe funkcji złożonych	76
Pochodna kierunkowa funkcji	78
Wzór Taylora. Ekstrema funkcji	81
Funkcje uwikłane	94
Mnożniki Lagrange’a	98
Zadania	101

4	Całki podwójne	106
	Przykłady	106
	Całki podwójne po prostokącie	106
	Całki podwójne po obszarach normalnych	108
	Zamiana zmiennych w całkach podwójnych	120
	Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych	125
	Zastosowania całek podwójnych w geometrii	130
	Zastosowania całek podwójnych w fizyce	140
	Zadania	147
5	Całki potrójne	151
	Przykłady	151
	Całki potrójne po prostopadłościanie	151
	Całki potrójne po obszarach normalnych	153
	Zamiana zmiennych w całkach potrójnych	158
	Współrzędne walcowe w całkach potrójnych	162
	Współrzędne sferyczne w całkach potrójnych	165
	Zastosowania całek potrójnych	170
	Zadania	183
	Odpowiedzi i wskazówki	187
	Zbiory zadań	194

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań jest drugą częścią zestawu podręczników do Analizy matematycznej 2. Podręczniki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik, ale mogą z nich korzystać także studenci uczelni ekonomicznych, pedagogicznych i rolniczych oraz niektórych wydziałów uniwersytetów.

Przykłady i zadania z tego zbioru obejmują całki niewłaściwe, szeregi liczbowe i potęgowe oraz rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych wraz z zastosowaniami. Ilustrują one materiał teoretyczny z pierwszej części zestawu pt. „*Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*”. Zbiór zawiera przykładowe zadania z pełnymi rozwiązaniami oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Do wszystkich zadań podane są odpowiedzi lub wskazówki.

Przykłady i zadania w zbiorze są podobnych typów oraz mają zbliżony stopień trudności do zadań, które studenci rozwiązują zwykle na kolokwiah i egzaminach. Oryginalne zestawy zadań ze sprawdzianów z poprzednich lat można znaleźć w trzeciej części zestawu pt. „*Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*”.

Do obecnego wydania dodano kilkanaście nowych przykładów, zadań i rysunków. Ponadto wszystkie przykłady poprzedzono wiadomościami teoretycznymi i wzorami potrzebnymi do ich rozwiązania.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za uwagi o poprzednich wydaniach. Dziękujemy również naszym Studentom za wskazanie błędów w odpowiedziach do zadań.

Czytelników prosimy o przesyłanie uwag o podręczniku oraz informacji o zauważonych błędach i usterkach.

Marian Gewert

Zbigniew Skoczylas

1

Całki niewłaściwe

Przykłady

Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

► **Przykład 1.1.** Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^4}; \quad & \text{(b)} \int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{x^2 + 4}; \quad & \text{(c)} \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}}; \quad & \text{(d)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 9}; \\ \text{(e)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x} \, dx; \quad & \text{(f)} \int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} x \cos x^2 \, dx; \quad & \text{(g)} \int_0^{\infty} \frac{e^x \, dx}{e^{2x} + 1}; \quad & \text{(h)} \int_{-\infty}^{\infty} x \ln(x^2 + 1) \, dx. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Całkę niewłaściwą funkcji f na $[a, \infty)$ lub $(-\infty, b]$ określamy odpowiednio wzorami:

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) \, dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^b f(x) \, dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna. Całkę niewłaściwą funkcji f na prostej $(-\infty, \infty)$ definiujemy jako sumę całek niewłaściwych na $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, gdzie a oznacza dowolną liczbę. Zbieżność tej całki ustalamy w zależności od zbieżności całek na półprostych. Jeżeli obie całki są zbieżne, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli jedna z tych całek jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ , a druga jest zbieżna albo rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub ∞ , to mówimy, że całka jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ . W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna.

► (a) Mamy

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_3^T \frac{dx}{x^4} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{3x^3} \right]_3^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3T^3} + \frac{1}{81} \right) = \frac{1}{81},$$

zatem rozważana całka jest zbieżna.

► (b) Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{x^2+4} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{x \, dx}{x^2+4} \left[\begin{array}{l} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ t = x^2 + 4; \, dt = 2x \, dx \\ x = 0, \, t = 4; \, x = T, \, t = T^2 + 4 \end{array} \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_4^{T^2+4} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2} [\ln |t|]_4^{T^2+4} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [\ln(T^2+4) - \ln 4] = \frac{1}{2} (\infty - \ln 4) = \infty. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy granicę niewłaściwą ∞ , więc rozważana całka jest rozbieżna do ∞ .

► (c) Mamy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}} &= \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}} \left[\begin{array}{l} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ t = 3x - 5; \, dt = 3 \, dx \\ x = S, \, t = 3S - 5; \, x = -1, \, t = -8 \end{array} \right] \\ &= \lim_{S \rightarrow -\infty} \frac{1}{3} \int_{3S-5}^{-8} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{S \rightarrow -\infty} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{t^2} \right]_{3S-5}^{-8} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{S \rightarrow -\infty} \left[\sqrt[3]{(-8)^2} - \sqrt[3]{(3S-5)^2} \right] = \frac{1}{2} (4 - \infty) = -\infty. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy granicę niewłaściwą $-\infty$, więc rozważana całka jest rozbieżna do $-\infty$.

► (d) Przyjmując $a = 0$ w definicji całki niewłaściwej na $(-\infty, \infty)$, otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+9} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+9} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+9}.$$

Ponieważ

$$\int \frac{dx}{x^2+9} \left[\begin{array}{l} \text{całkowanie przez} \\ \text{podstawienie} \\ x = 3t; \, dx = 3 \, dt \\ \text{przyjęto } C = 0 \end{array} \right] = \int \frac{3 \, dt}{9t^2+9} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{3} \arctg t = \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3},$$

więc

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+9} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+9} &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{dx}{x^2+9} + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{dx}{x^2+9} \\
 &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \right]_s^0 + \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \right]_0^T \\
 &= \frac{1}{3} \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(-\operatorname{arctg} \frac{s}{3} \right) + \frac{1}{3} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{T}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Zatem rozważana całka jest zbieżna.

► (e) Przyjmując jak powyżej $a = 0$, otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x} dx &= \int_{-\infty}^0 e^{-2x} dx + \int_0^{\infty} e^{-2x} dx \\
 &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 e^{-2x} dx + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-2x} dx \\
 &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_s^0 + \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^T \\
 &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-2s} - \frac{1}{2} \right) + \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2T} \right) = \left(\infty - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \infty.
 \end{aligned}$$

Ponieważ pierwsza z granic jest równa ∞ , a druga jest skończona, więc rozważana całka jest rozbieżna do ∞ .

► (f) Mamy

$$\begin{aligned}
 \int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} x \cos x^2 dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\sqrt{\pi}}^T x \cos x^2 dx \left[\begin{array}{l} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ t = x^2; \quad dt = 2x dx \\ x = \sqrt{\pi}, \quad t = \pi; \quad x = T, \quad t = T^2 \end{array} \right] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{T^2} \frac{1}{2} \cos t dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\sin t \right]_{\pi}^{T^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\sin T^2 - \sin \pi) = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \sin T^2.
 \end{aligned}$$

Granica $\lim_{T \rightarrow \infty} \sin T^2$ nie istnieje, gdyż np. dla ciągów $T'_n = \sqrt{n\pi}$, $T''_n = \sqrt{(\pi/2) + 2n\pi}$, rozbieżnych do ∞ , mamy odpowiednio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(T'_n \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(T''_n \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = 1.$$

Zatem badana całka jest rozbieżna.

► (g) Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} \left[\begin{array}{l} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ t = e^x; \quad dt = e^x dx \\ x = 0, t = 1; \quad x = T, t = e^T \end{array} \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^{e^T} \frac{dt}{t^2 + 1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\arctg t \right]_1^{e^T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\arctg e^T - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Badana całka jest zatem zbieżna.

► (h) Przyjmując $a = 0$ w definicji całki niewłaściwej na $(-\infty, \infty)$ otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \ln(x^2 + 1) dx = \int_{-\infty}^0 x \ln(x^2 + 1) dx + \int_0^{\infty} x \ln(x^2 + 1) dx.$$

Pokażemy, że druga z całek jest rozbieżna do ∞ . Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x \ln(x^2 + 1) dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x \ln(x^2 + 1) dx \left[\begin{array}{l} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ t = x^2 + 1; \quad dt = 2x dx \\ x = 0, t = 1; \quad x = T, t = T^2 + 1 \end{array} \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_1^{T^2+1} \ln t dt \left[\begin{array}{l} \text{całkowanie przez części} \\ u(t) = \ln t, \quad v'(t) = 1 \\ u'(t) = 1/t, \quad v(t) = t \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\left[t \ln t \right]_1^{T^2+1} - \int_1^{T^2+1} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[(T^2 + 1) \ln(T^2 + 1) - T^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \{ (T^2 + 1) [\ln(T^2 + 1) - 1] + 1 \} = \infty. \end{aligned}$$

Z nieparzystości funkcji podcałkowej wynika, że

$$\int_{-\infty}^0 x \ln(x^2 + 1) dx = -\infty.$$

Zatem badana całka niewłaściwa jest rozbieżna.

Kryteria zbieżności całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

► **Przykład 1.2.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$(a) \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^2 x \, dx; \quad (b) \int_2^{\infty} \frac{x \, dx}{x^2 - \arctg x}; \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{(2^x + 1) \, dx}{4^x + 1}.$$

Rozwiązanie. Niech funkcje f i g spełniają dla każdego $x \in [a, \infty)$ nierówności $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Wówczas:

[1] jeżeli całka niewłaściwa funkcji g jest zbieżna, to całka niewłaściwa funkcji f także jest zbieżna;

[2] jeżeli całka niewłaściwa funkcji f jest rozbieżna do ∞ , to całka niewłaściwa funkcji g także jest rozbieżna do ∞ .

► (a) Dla każdego $x \geq 0$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leq e^{-x} \sin^2 x \leq e^{-x}.$$

Ponadto całka $\int_0^{\infty} e^{-x} \, dx$ jest zbieżna, gdyż

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-x} \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} [1 - e^{-T}] = 1.$$

Zatem z kryterium porównawczego [1] wynika zbieżność badanej całki.

► (b) Dla każdego $x \geq 2$ prawdziwe są nierówności

$$\frac{x}{x^2 - \arctg x} \geq \frac{x}{x^2 - 0} = \frac{1}{x} \geq 0.$$

Ponadto całka $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}$ jest rozbieżna do ∞ , gdyż

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_2^T \frac{dx}{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} [\ln x]_2^T = \lim_{T \rightarrow \infty} [\ln T - \ln 2] = \infty.$$

Zatem z kryterium porównawczego [2] wynika rozbieżność badanej całki do ∞ .

► (c) Dla każdego $x \geq 0$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leq \frac{2^x + 1}{4^x + 1} \leq \frac{2^x + 1}{4^x} = 2^{-x} + 4^{-x}.$$

Całki niewłaściwe $\int_0^{\infty} 2^{-x} \, dx$, $\int_0^{\infty} 4^{-x} \, dx$ są zbieżne, gdyż

$$\int_0^{\infty} 2^{-x} \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T 2^{-x} \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{2^{-x}}{\ln 2} \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln 2} [1 - 2^{-T}] = \frac{1}{\ln 2},$$

$$\int_0^{\infty} 4^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T 4^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{4^{-x}}{\ln 4} \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln 4} [1 - 4^{-T}] = \frac{1}{\ln 4}.$$

Zatem badana całka także jest zbieżna.

► **Przykład 1.3.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{e^{3x} dx}{3e^{4x} - 5}; \quad (b) \int_{\pi}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + \cos x}; \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{\arctg x dx}{x + 1}; \quad (d) \int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x^2 + 4}.$$

Rozwiązanie. Niech funkcje f i g będą dodatnie (ujemne) na półprostej $[a, \infty)$ oraz niech spełniają warunek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \text{ gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas całki niewłaściwe funkcji f , g są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do ∞ ($-\infty$).

► (a) Zauważmy, że dla $x \rightarrow \infty$ mamy

$$\frac{e^{3x}}{3e^{4x} - 5} \sim \frac{e^{3x}}{3e^{4x}} = \frac{1}{3e^x}.$$

Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym zbieżności całek niewłaściwych

$$f(x) = \frac{1}{3e^x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{e^{3x}}{3e^{4x} - 5},$$

otrzymamy

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3e^x}}{\frac{e^{3x}}{3e^{4x} - 5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^{4x} - 5}{3e^{4x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{3e^{4x}} \right) = 1.$$

Ponieważ całka $\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^x}$ jest zbieżna (rozwiązanie Przykładu 1.2 (a)) oraz $0 < k < \infty$, więc badana całka także jest zbieżna.

► (b) Zauważmy, że dla $x \rightarrow \infty$ mamy

$$\frac{x}{x^2 + \cos x} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Zatem w kryterium ilorazowym rozbieżności całek niewłaściwych przyjmujemy

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{x}{x^2 + \cos x}.$$

Wtedy

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x^2 + \cos x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\cos x}{x^2}\right) = 1.$$

Ponieważ całka $\int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x}$ jest rozbieżna do ∞ (rozwiązanie Przykładu 1.2 (b)) oraz $0 < k < \infty$, więc badana całka także jest rozbieżna do ∞ .

► (c) Ponieważ $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \pi/2$, więc dla $x \rightarrow \infty$ mamy

$$\frac{\arctg x}{x+1} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x+1} = \frac{\pi}{2(x+1)}.$$

Zatem w kryterium ilorazowym rozbieżności całek niewłaściwych przyjmujemy

$$f(x) = \frac{\arctg x}{x+1} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}.$$

Wtedy

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2(x+1)}}{\frac{\arctg x}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2 \arctg x} = 1.$$

Całka $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+1}$ jest rozbieżna do ∞ , gdyż

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{dx}{x+1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\ln|x+1| \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln(T+1) = \infty.$$

Ponadto $0 < k < \infty$, więc badana całka także jest rozbieżna do ∞ .

► (d) Zauważmy, że dla $x \rightarrow \infty$ mamy

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2 + 4} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym zbieżności całek niewłaściwych

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 4},$$

otrzymamy

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{x^2} = 1.$$

Całka $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ jest zbieżna, gdyż

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_2^T \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{-2}{\sqrt{x}} \right]_2^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{T}} \right) = \sqrt{2}.$$

Ponadto $0 < k < \infty$, więc badana całka także jest zbieżna.

Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

► **Przykład 1.4.** Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną całek niewłaściwych:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{\sin^3 x \, dx}{x^2}; \quad (b) \int_2^{\infty} \frac{x \cos x \, dx}{(x^2 - 1)^3}; \quad (c) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} x \cos x \, dx; \quad (d^*) \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x}.$$

Rozwiązanie. Mówimy, że całka $\int_a^{\infty} f(x) \, dx$ jest zbieżna bezwzględnie, jeżeli $\int_a^{\infty} |f(x)| \, dx$ jest zbieżna. Wiadomo, że jeżeli całka niewłaściwa jest zbieżna bezwzględnie, to jest zbieżna.

► (a) Dla każdego $x \geq 1$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leq \left| \frac{\sin^3 x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Ponadto całka $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ jest zbieżna. Z kryterium porównawczego wynika, że całka $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin^3 x}{x^2} \right| dx$ jest zbieżna. Stąd całka $\int_1^{\infty} \frac{\sin^3 x \, dx}{x^2}$ jest zbieżna bezwzględnie, a więc również zbieżna.

► (b) Zauważmy, że dla każdego $x \geq 2$ zachodzą nierówności

$$0 \leq \left| \frac{x \cos x}{(x^2 - 1)^3} \right| \leq \frac{x}{(x^2 - 1)^3}.$$

Ponadto całka $\int_2^{\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 - 1)^3}$ jest zbieżna, gdyż

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 - 1)^3} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_2^T \frac{x \, dx}{(x^2 - 1)^3} \left[\begin{array}{l} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ t = x^2 - 1; \, dt = 2x \, dx \\ x = 2, \, t = 3; \, x = T, \, t = T^2 - 1 \end{array} \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_3^{T^2-1} \frac{dt}{t^3} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_3^{T^2-1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{(T^2 - 1)^2} \right) = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

Zatem analogicznie jak w poprzednim przykładzie badana całka niewłaściwa jest zbieżna bezwzględnie, a więc również zbieżna.

► (c) Pokażemy, że badana całka jest rozbieżna. Mamy

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} x \cos x \, dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^T x \cos x \, dx \left[\begin{array}{l} \text{całkowanie przez części} \\ u(x) = x, \quad v'(x) = \cos x \\ u'(x) = 1, \quad v(x) = \sin x \end{array} \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ [x \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^T - \int_{\frac{\pi}{2}}^T \sin x \, dx \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} [x \sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{2}}^T = \lim_{T \rightarrow \infty} (T \sin T + \cos T) - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że granica $\lim_{T \rightarrow \infty} (T \sin T + \cos T)$ nie istnieje, gdyż np. dla ciągów $T'_n = 2n\pi$, $T''_n = (2n+1)\pi$, rozbieżnych do ∞ , mamy odpowiednio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T'_n \sin T'_n + \cos T'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n\pi \sin(2n\pi) + \cos(2n\pi)) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T''_n \sin T''_n + \cos T''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((2n+1)\pi \sin(2n+1)\pi + \cos(2n+1)\pi) = -1,$$

więc badana całka jest rozbieżna. Rozbieżność całki $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} |x \cos x| \, dx$ wynika, z twierdzenia o zbieżności całek niewłaściwych zbieżnych bezwzględnie. Gdyby bowiem całka ta była zbieżna, to byłaby zbieżna także całka $\int_{\pi/2}^{\infty} x \cos x \, dx$, co jak pokazaliśmy powyżej nie zachodzi.

► (d*) Pokażemy, że badana całka nie jest zbieżna bezwzględnie, ale jest zbieżna. W rozwiązaniu wykorzystamy nierówność $|\sin x| \geq \sin^2 x$ zachodzącą dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz okresowość funkcji $\sin^2 x$. Wykorzystując tę nierówność otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &\geq \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx + \dots \\ &\geq \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2\pi} dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin^2 x}{3\pi} dx + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin^2 x}{4\pi} dx + \dots \\ &= \left(\int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 x \, dx \right) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{4\pi} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \infty. \end{aligned}$$

To oznacza, że badana całka nie jest zbieżna bezwzględnie. Uzasadnienie jej zbieżności jest bardziej skomplikowane. Wymaga zastosowania twierdzenia Dirichleta. Twierdzenie to orzeka, że jeżeli funkcja g ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, \infty)$ oraz maleje do 0, gdy $x \rightarrow \infty$, a funkcja ciągła f ma ograniczoną funkcję pierwotną na $[a, \infty)$, to

całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x)g(x) dx$ jest zbieżna. Łatwo sprawdzić, że funkcje

$$g(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \sin x$$

spełniają na przedziale $[\pi, \infty)$ założenia twierdzenia Dirichleta. Zatem rozważana całka jest zbieżna.

Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

► **Przykład 1.5.** Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{dx}{\sin^2 x}; & \text{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}; & \text{(c)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1}; \\ \text{(d)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}; & \text{(e)} \int_0^{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx; & \text{(f)} \int_1^4 \frac{dx}{2-\sqrt{x}}. \end{array}$$

Rozwiązanie. Niech funkcja f określona na przedziale $(a, b]$ będzie nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a . Całkę funkcji f na przedziale $(a, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \rightarrow a^+} \int_A^b f(x) dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna. Analogicznie definiuje się całkę funkcji f określonej na przedziale $[a, b)$ i nieograniczonej tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu b .

► (a) Funkcja $f(x) = 1/\sin^2 x$ jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu π , zatem

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{A \rightarrow \pi^+} \int_A^{\frac{3}{2}\pi} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{A \rightarrow \pi^+} [-\operatorname{ctg} x]_A^{\frac{3}{2}\pi} = \lim_{A \rightarrow \pi^+} (0 + \operatorname{ctg} A) = \infty.$$

Badana całka jest rozbieżna do ∞ .

► (b) Funkcja $f(x) = 1/\sqrt[3]{1-x}$ jest nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu 1, zatem

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} &= \lim_{B \rightarrow 1^-} \int_0^B \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} \left[\begin{array}{c} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ t = 1-x; \quad dt = -dx \\ x=0, \quad t=1; \quad x=B, \quad t=1-B \end{array} \right] \\ &= \lim_{B \rightarrow 1^-} \int_{1-B}^1 \frac{-dt}{\sqrt[3]{t}} \\ &= \lim_{B \rightarrow 1^-} \int_{1-B}^1 t^{-\frac{1}{3}} dt = \lim_{B \rightarrow 1^-} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{2}{3}} \right]_{1-B}^1 = \lim_{B \rightarrow 1^-} \frac{2}{3} \left(1 - \sqrt[3]{(1-B)^2} \right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Badana całka jest zbieżna.

► (c) Ponieważ funkcja podcałkowa $f(x) = 1/(x^2 - 1)$ jest nieograniczona na prawostronnym sąsiedztwie punktu -1 oraz na lewostronnym sąsiedztwie punktu 1 , więc przyjmując w określeniu całki niewłaściwej za miejsce podziału $a = 0$ otrzymamy

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 1} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - 1} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

Zbadamy z definicji zbieżność każdej z całek po prawej stronie znaku równości. Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 1} &= \lim_{B \rightarrow 1^-} \int_0^B \frac{dx}{x^2 - 1} \left[\begin{array}{c} \text{rozkład na ułamki proste} \\ \text{pierwszego rodzaju} \\ \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \end{array} \right] \\ &= \lim_{B \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} \int_0^B \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \lim_{B \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} \left[\ln|x-1| - \ln|x+1| \right]_0^B \\ &= \frac{1}{2} \lim_{B \rightarrow 1^-} \ln \left| \frac{B-1}{B+1} \right| = \frac{1}{2} \lim_{B \rightarrow 1^-} \ln \frac{1-B}{1+B} = -\infty. \end{aligned}$$

Z parzystości funkcji podcałkowej wynika, że także

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - 1} = -\infty.$$

Zatem badana całka jest rozbieżna do $-\infty$.

► (d) Ponieważ funkcja podcałkowa $f(x) = \cos x / \sqrt[3]{1 - 2 \sin x}$ jest nieograniczona na obu jednostronnych sąsiedztwach punktu $\pi/6$, więc rozważana całka niewłaściwa jest

określona wzorem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}.$$

Zbadamy zbieżność każdej z całek po prawej stronie znaku równości. Najpierw jednak obliczymy całkę nioznaczoną $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}$. Mamy

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} & \left[\begin{array}{l} \text{całkowanie} \\ \text{przez podstawienie} \\ t = 1 - 2\sin x; \\ dt = -2\cos x \, dx \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} \\ & = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt[3]{t^2} + C = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1-2\sin t)^2} + C. \end{aligned}$$

Zatem dla pierwszej całki oznaczonej mamy

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} & = \lim_{B \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} \int_0^B \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} \\ & = -\frac{3}{4} \lim_{B \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} \left[\sqrt[3]{(1-2\sin x)^2} \right]_0^B = -\frac{3}{4} \lim_{B \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} \left[\sqrt[3]{(1-2\sin B)^2} - 1 \right] = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Dla drugiej całki oznaczonej mamy

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} & = \lim_{A \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} \\ & = -\frac{3}{4} \lim_{A \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \left[\sqrt[3]{(1-2\sin x)^2} \right]_A^{\frac{\pi}{2}} \\ & = -\frac{3}{4} \lim_{A \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \left[1 - \sqrt[3]{(1-2\sin A)^2} \right] = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Zatem badana całka jest zbieżna do $\frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) = 0$.

► (e) Funkcja $f(x) = (1/x^2) \sin(1/x)$ jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0, zatem badaną całkę określamy wzorem

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx & = \lim_{A \rightarrow 0^+} \int_A^{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx \left[\begin{array}{l} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ t = 1/x; \, dt = -(1/x^2) \, dx \\ x = A, \, t = 1/A; \, x = 3/\pi, \, t = \pi/3 \end{array} \right] \\ & = - \int_{\frac{1}{A}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t \, dt = \lim_{A \rightarrow 0^+} \left[\cos t \right]_{\frac{1}{A}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \lim_{A \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{A}. \end{aligned}$$

Ponieważ granica $\lim_{A \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{A}$ nie istnieje, więc badana całka jest rozbieżna.

► (f) W przedziale $[1, 4)$ funkcja $f(x) = 1/(2 - \sqrt{x})$ jest nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu 4. Zgodnie z definicją całki niewłaściwej mamy

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{dx}{2 - \sqrt{x}} &= \lim_{B \rightarrow 4^-} \int_1^B \frac{dx}{2 - \sqrt{x}} \left[\begin{array}{l} \text{całkowanie przez podstawienie} \\ x = t^2 \ (t \geq 0); \ dx = 2t \ dt \\ x = 1, \ t = 1; \ x = B, \ t = \sqrt{B} \end{array} \right] \\ &= \lim_{B \rightarrow 4^-} \int_1^{\sqrt{B}} \frac{2t \ dt}{2 - t} \\ &= \lim_{B \rightarrow 4^-} 2 \int_1^{\sqrt{B}} \left(\frac{-2}{t - 2} - 1 \right) dt \\ &= 2 \lim_{B \rightarrow 4^-} \left[-2 \ln |t - 2| - t \right]_1^{\sqrt{B}} = 2 \lim_{B \rightarrow 4^-} \left(-2 \ln |\sqrt{B} - 2| - \sqrt{B} + 1 \right) = \infty. \end{aligned}$$

Zatem badana całka jest rozbieżna do ∞ .

Kryteria zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju

► **Przykład 1.6.** Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

$$(a) \int_0^1 \frac{(1 + \sin x) dx}{\sqrt{x}}; \quad (b) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + x}}; \quad (c) \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x - 1)^2}; \quad (d) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{tg} x \, dx.$$

Rozwiązanie. Niech funkcje f i g będą nieograniczone tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a oraz niech dla każdego $x \in (a, b]$ spełniają nierówności $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Wówczas:

[1] jeżeli całka $\int_a^b g(x) dx$ jest zbieżna, to także całka $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna;

[2] jeżeli całka $\int_a^b f(x) dx$ jest rozbieżna do ∞ , to także całka $\int_a^b g(x) dx$ jest rozbieżna do ∞ .

► (a) Zauważmy, że dla każdego $x > 0$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leq \frac{1 + \sin x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1 + 1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Ponadto całka niewłaściwa $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ jest zbieżna. Zatem z kryterium porównawczego

[1] wynika, że badana całka jest także zbieżna.

► (b) Zauważmy, że dla $x > 0$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{0 + x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Ponieważ całka $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ jest zbieżna, więc także badana całka jest zbieżna.

► (c) Dla każdego $0 \leq x < 1$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leq \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{e^0}{(x-1)^2} \leq \frac{e^x}{(x-1)^2}.$$

Ponadto, całka niewłaściwa $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ jest rozbieżna do ∞ . Zatem z kryterium porównawczego [2] wynika, że badana całka jest także rozbieżna do ∞ .

► (d) Zauważmy, że dla $\pi/4 \leq x < \pi/2$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leq \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x \leq x \operatorname{tg} x.$$

Uzasadnimy teraz rozbieżność całki niewłaściwej $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx$. Mamy

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx &= \lim_{B \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_{\pi/4}^B \operatorname{tg} x \, dx \\ &= - \lim_{B \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_{\pi/4}^B \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx \\ &= - \lim_{B \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [\ln |\cos x|]_{\pi/4}^B = \lim_{B \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left[\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln |\cos B| \right] = \infty. \end{aligned}$$

Z kryterium porównawczego [2] wynika rozbieżność badanej całki do ∞ .

► **Przykład 1.7.** Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

$$(a) \int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{x^3}}; \quad (b) \int_0^1 \frac{(e^x - 1) \, dx}{x^4}; \quad (c) \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

Rozwiązanie. Niech funkcje dodatnie (ujemne) f i g będą nieograniczone tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a . Ponadto niech spełniają warunek

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \text{ gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas całki niewłaściwe drugiego rodzaju funkcji f, g na przedziale $(a, b]$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do $\infty (-\infty)$. Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia dla całek niewłaściwych na przedziale $[a, b)$.

► (a) Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, więc dla $x \sim 0$ mamy

$$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \sim 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Przyjmując w kryterium ilorazowym $f(x) = 1/\sqrt{x}$ otrzymamy

$$k = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Ponieważ całka $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ jest zbieżna oraz $0 < k < \infty$, więc badana całka także jest zbieżna.

► (b) Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, więc dla $x \sim 0$ mamy

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{x^4} = \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{x^3} \sim 1 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3}.$$

Przyjmując w kryterium ilorazowym $f(x) = 1/x^3$ otrzymamy

$$k = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = 1.$$

Ponieważ całka $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$ jest rozbieżna do ∞ oraz $0 < k < \infty$, więc badana całka także jest rozbieżna do ∞ .

► (c) Najpierw przekształcimy całkę niewłaściwą w ten sposób, aby funkcja podcałkowa była nieograniczona na sąsiedztwie punktu 0 zamiast π . Podstawiając $t = \pi - x$ otrzymamy

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 - \cos t}.$$

Ze wzoru Maclaurina funkcji $\cos t$ i $n = 3$ dla $t \sim 0$ mamy $\cos t \sim 1 - \frac{t^2}{2}$. Zatem przyjmując w kryterium ilorazowym

$$f(t) = \frac{1}{t^2} \quad \text{oraz} \quad g(t) = \frac{1}{1 - \cos t},$$

otrzymamy

$$k = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

Ponieważ całka $\int_0^{\pi} \frac{dt}{t^2}$ jest rozbieżna do ∞ oraz $0 < k < \infty$, więc badana całka także jest rozbieżna do ∞ .

► **Przykład 1.8.** Obliczyć wartości główne całek niewłaściwych:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+(x+1)^2}; & \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx; & \text{(c)} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) dx; \\ \text{(d)} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x-2) dx; & \text{(e)} \int_{-1}^1 \frac{\sin x dx}{x^4}; & \text{(f)} \int_{-4}^9 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}. \end{array}$$

Rozwiązanie. Wartość główną całki niewłaściwej pierwszego rodzaju funkcji f na $(-\infty, \infty)$ definiujemy wzorem

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x) dx$$

Z kolei wartość główną całki niewłaściwej drugiego rodzaju z funkcji f określonej na $[a, b] \setminus \{c\}$ i nieograniczonej jedynie na obustronnym sąsiedztwie punktu c definiujemy wzorem:

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right].$$

Jeżeli granica po prawej stronie równości nie istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa nie ma wartości głównej. Jeżeli całka niewłaściwa na $(-\infty, \infty)$ jest zbieżna do w , to wartość główna całki także się równa w . Podobnie jest dla całki niewłaściwej drugiego rodzaju.

► (a) Ponieważ

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{dx}{1+(x+1)^2} &= \lim_{T \rightarrow \infty} [\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1)]_{-T}^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg}[(T+1) - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-T)] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \end{aligned}$$

więc wartością główną całki jest π .

► (b) Ponieważ

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T e^{-x} dx = - \lim_{T \rightarrow \infty} [e^{-x}]_{-T}^T = \lim_{T \rightarrow \infty} (e^{-T} - e^T) = -(0 - \infty) = \infty,$$

więc wartością główną całki jest ∞ .

► (c) Ponieważ granica

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) dx &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \right]_{-T}^T \\ &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\cos \left(T - \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(T + \frac{\pi}{6} \right) \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \sin T\end{aligned}$$

nie istnieje, więc wartość główna całki także nie istnieje.

► (d) Funkcja podcałkowa jest określona wzorem

$$\operatorname{sgn}(x-2) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 2, \\ 0 & \text{dla } x = 2, \\ 1 & \text{dla } x > 2. \end{cases}$$

Ponieważ granica

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \operatorname{sgn}(x-2) dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_{-T}^2 \operatorname{sgn}(x-2) dx + \int_2^T \operatorname{sgn}(x-2) dx \right] \\ &\stackrel{T > 2}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_{-T}^2 (-1) dx + \int_2^T 1 dx \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ [-x]_{-T}^2 + [x]_2^T \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} [-2 - T + T - 2] = -4\end{aligned}$$

jest skończona, więc wartość główna całki równa się -4 . Zauważmy, że wartość główna całki istnieje mimo, że całka niewłaściwa na przedziale $(-\infty, \infty)$ nie istnieje.

► (e) Funkcja $f(x) = (\sin x)/x^4$ jest określona dla $x \neq 0$ i tylko na obustronnym sąsiedztwie punktu 0 jest nieograniczona. Zatem

$$\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\sin x dx}{x^4} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\sin x dx}{x^4} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{\sin x dx}{x^4} \right]$$

Z nieparzystości funkcji f wynika, że

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\sin x dx}{x^4} = - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\sin x dx}{x^4}.$$

Stąd

$$\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\sin x dx}{x^4} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[- \int_{\varepsilon}^1 \frac{\sin x dx}{x^4} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{\sin x dx}{x^4} \right] = 0.$$

► (f) Funkcja $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ jest określona dla $x \neq 0$ i tylko na obustronnym sąsiedztwie punktu 0 jest nieograniczona. Zatem

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-4}^9 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-4}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \int_{\varepsilon}^9 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \right] \\ &= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \left[-\sqrt{-x} \right]_{-4}^{-\varepsilon} + \left[\sqrt{x} \right]_{\varepsilon}^9 \right\} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [(-\sqrt{\varepsilon} + 2) + (3 - \sqrt{\varepsilon})] = 10. \end{aligned}$$

Zadania

Odp. str. 187

1.1. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2}; & \text{(b)} \quad & \int_0^{\infty} 2^{-x} dx; & \text{(c)} \quad & \int_{\pi}^{\infty} x \sin x dx; \\ \text{(d)} \quad & \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+4}; & \text{(e)} \quad & \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+5}}; & \text{(f)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+13}; \\ \text{(g)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx; & \text{(h)} \quad & \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^6+1}; & \text{(i*)} \quad & \int_{-\infty}^{-1} (\pi - \arctg x) dx. \end{aligned}$$

1.2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}-3}; & \text{(b)} \quad & \int_2^{\infty} \frac{(x-1) dx}{x^4+x+1}; & \text{(c)} \quad & \int_{\pi}^{\infty} \frac{(1+\sin x) dx}{x^3}; \\ \text{(d)} \quad & \int_{-\infty}^0 \frac{2^x dx}{x-1}; & \text{(e)} \quad & \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^7+1}}; & \text{(f)} \quad & \int_2^{\infty} \frac{(\sqrt{2}+\cos x) dx}{\sqrt{x}-1}. \end{aligned}$$

1.3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_5^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^5-3}}; & \text{(b)} \quad & \int_{-\infty}^{-1} \frac{(e^{2x}+1) dx}{e^x-1}; & \text{(c)} \quad & \int_1^{\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx; \\ \text{(d)} \quad & \int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3-\sin x}; & \text{(e)} \quad & \int_0^{\infty} \frac{(2^x-1) dx}{x^2 2^x+1}; & \text{(f)} \quad & \int_0^{\infty} 2^x \sin 3^{-x} dx. \end{aligned}$$

1.4. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną całek niewłaściwych:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int_0^{\infty} \frac{\sin 3x \, dx}{e^{2x} + 1}; & \text{(b)} \int_{\pi}^{\infty} x \cos 2x \, dx; & \text{(c)} \int_0^{\infty} \frac{x^2 \sin x \, dx}{x^4 + 1}; \\
 & \text{(d)} \int_{-\infty}^0 \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 1}; & \text{(e}^*) \int_0^{\infty} \frac{2^x \cos x \, dx}{4^x + \sin x}; & \text{(f}^*) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

1.5. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}; & \text{(b)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin x}; & \text{(c)} \int_2^3 \frac{dx}{x(x-3)}; \\
 & \text{(d)} \int_0^e \frac{\ln x \, dx}{x}; & \text{(e)} \int_3^5 \frac{2^x \, dx}{2^x - 8}; & \text{(f}^*) \int_0^e \frac{\sin \ln x \, dx}{x}.
 \end{aligned}$$

1.6. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctg \frac{1}{x} \, dx; & \text{(b)} \int_0^2 \frac{e^x \, dx}{x^3}; & \text{(c)} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x \, dx}{\sqrt[3]{x - \pi}}; \\
 & \text{(d)} \int_0^4 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}; & \text{(e}^*) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16 - x^4}}; & \text{(f}^*) \int_1^3 \frac{x^6 \, dx}{(x-1)^2}.
 \end{aligned}$$

1.7. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x \, dx}{x^4}; & \text{(b)} \int_0^1 \frac{(e^{2x} - 1) \, dx}{\sqrt[3]{x^4}}; & \text{(c)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}}; \\
 & \text{(d)} \int_0^1 \frac{dx}{(\arcsin x)^2}; & \text{(e}^*) \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{e^x - e^{2x}}}; & \text{(f}^*) \int_0^{\pi} \frac{dx}{x - \sin x}; \\
 & \text{(g}^*) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - \sqrt{x}}; & \text{(h}^*) \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}; & \text{(i}^*) \int_1^2 \frac{dx}{2^x - x^2}.
 \end{aligned}$$

1.8. Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos x \, dx}{x^2 + 4}; & \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x \, dx}{e^x + 1}; & \text{(c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x+5|} \, dx; \\
 & \text{(d)} \int_{-\infty}^{\infty} (x^3 - x^2) \, dx; & \text{(e)} \int_{-1}^1 \frac{\sin x \, dx}{x^2}; & \text{(f)} \int_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x|}}.
 \end{aligned}$$