ANALIZA
MATEMATYCZNA 2

Opracowanie
Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Kolokwia i egzaminy

Wydanie jedenaste poprawione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2023

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

ISBN 978-83–67234–04–7

Wydanie XI poprawione, Wrocław 2023
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp

Zbiór zadań *„Kolokwia i egzaminy"* jest trzecią częścią zestawu podręczników do **Analizy matematycznej 2**. Pozostałymi częściami zestawu są *„Definicje, twierdzenia, wzory"* oraz *„Przykłady i zadania"*. Zbiór zawiera zestawy zadań, które w ubiegłych latach studenci Politechniki Wrocławskiej rozwiązywali na kolokwiach i egzaminach z **Analizy matematycznej 2**. Zadania z tych sprawdzianów obejmują całki niewłaściwe, szeregi liczbowe i potęgowe oraz rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych wraz z zastosowaniami w fizyce i technice. Do zestawów kolokwialnych i egzaminacyjnych o numerach nieparzystych podane są odpowiedzi.

Opracowanie pozwala studentom zapoznać się z rodzajami oraz stopniem trudności zadań kolokwialnych i egzaminacyjnych. Jest to jednocześnie dodatkowy materiał do samodzielnej nauki. Zestawy zadań z tego zbioru mogą być wykorzystywane przez prowadzących ćwiczenia na kolokwiach, a przez wykładowców na egzaminach.

Studentów Politechniki Wrocławskiej zainteresowanych udziałem w konkursie matematycznym „Egzamin na ocenę celującą" zachęcamy do zapoznania się z książką pt. *„Studencki konkurs matematyczny"*. To opracowanie zawiera zadania wraz z rozwiązaniami z konkursów, które odbyły się w latach 1994 – 2021.

W aktualnym wydaniu dokonano drobnych zmian redakcyjnych oraz poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za zestawy zadań z kolokwiów i egzaminów, a także za uwagi o poprzednich wydaniach.

Marian Gewert *Zbigniew Skoczylas*

Zestawy zadań z kolokwiów

Pierwsze kolokwium

Zestaw 1. *odp. str. 90*

1. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}$.

2. Funkcję $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$ rozwinąć w szereg Maclaurina i określić jego promień zbieżności.

3. Uzasadnić, że figura D ograniczona krzywą $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}$ oraz prostymi $x = \pi$, $y = 0$ ma skończone pole.

4. Niech $f(x, y, z) = e^{z-xy}$. Narysować zbiór punktów $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ spełniających warunek $f(x, y, z) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z)$.

5. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{a-\sqrt{a^2-xy}}{xy}$, gdzie $a > 0$.

Zestaw 2.

1. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{n}\right)^n$.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+5)^n}{n+30}$.

3. Uzasadnić, że granica $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ nie istnieje.

Od roku akademickiego 2000/2001 na obu kolokwiach studenci otrzymują do rozwiązania w czasie 60 minut po 4 zadania.

4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$.

5. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_1^\infty \sqrt{e^{-x}}\,dx$.

Zestaw 3. *odp. str. 90*

1. Niech $f(x,y,z)=e^{z+xy}$. Narysować zbiór punktów $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ spełniających warunek $f(x,y,z)=\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial z\partial x}(x,y,z)$.

2. Funkcję $f(x)=\ln\left(1+3x+2x^2\right)$ rozwinąć w szereg Maclaurina i określić jego promień zbieżności.

3. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 3^n$.

4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^3+1}$.

5. Zbadać, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{tg} xy}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0,\ y\in\mathbb{R},\\ 0 & \text{dla} \quad x=0,\ y\in\mathbb{R}\end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

Zestaw 4.

1. Sformułować warunek konieczny zbieżności szeregów i na tej podstawie uzasadnić równość $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^{100}}{3^n}=0$.

2. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{4^n}{(n+1)5^n}$.

3. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$.

4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x+1}{e^{3x}+2}\,dx$.

5. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,0)}\frac{\sin(xy)}{y^3}$.

Zestaw 5. *odp. str. 91*

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_{2\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{n}\right)^n n!$.

3. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji $f(x) = x^2e^{-x}$ i określić przedział zbieżności tego szeregu.

4. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n^2+1}$.

5. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$.

Zestaw 6.

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{7^n - 5^n}$.

2. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

3. Zbadać, czy funkcja określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ma pochodną cząstkową $f''_{yx}(0,0)$.

4. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}(2-x)^n$.

5. Promień podstawy stożka zmierzony z dokładnością 1 cm wynosi 3 m, a jego wysokość zmierzona z dokładnością 2 cm wynosi 4 m. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole powierzchni bocznej tego stożka?

Zestaw 7. *odp. str. 91*

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

2. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^n+5^n}$.

3. Uzasadnić równość $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{50^n}{n!} = 0$. Wykorzystać warunek konieczny zbieżności szeregów.

4. Sformułować kryterium całkowe zbieżności lub rozbieżności szeregów. Korzystając z tego kryterium zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^3+8}$.

5. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^3}{12^n}(x+3)^n$.

Zestaw 8.

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n}{2n^2-1}$.

2. Obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{3^n}$.

3. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_{-\infty}^{3} \dfrac{dx}{x^2+4x+13}$.

4. Zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, jeżeli

$$f(x,y) = \sqrt[5]{x^{10} - 32y^5}.$$

5. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\frac{1.01^3 - 2.98^2}{1.01^3 + 2.98^2}.$$

Zestaw 9. *odp. str. 91*

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\ln(x+1)}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$.

2. Uzasadnić zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \dfrac{1}{n^3}$.

3. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ax^2+3y^2}{x^2+2y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest ciągła na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnić.

4. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1,1,z_0)$ do wykresu funkcji

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

5. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$.

Zestaw 10.

1. Obliczyć pole figury D ograniczonej wykresem funkcji

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}|x|}{x^2+1}$$

i jej asymptotą w ∞.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{\cos\frac{1}{n}}$. Sformułować wykorzystane kryteria.

3. Funkcję $f(x) = \frac{x}{3x-1}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Podać przedział zbieżności otrzymanego szeregu.

4. Uzasadnić, że granica $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x+y-3}{x^2+y^2-5}$ nie istnieje.

5. Równanie stanu gazu doskonałego ma postać $p = \frac{RT}{V}$, gdzie: p oznacza ciśnienie, T – temperaturę, V – objętość, R – stałą gazową. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć, jak należy zmienić objętość gazu przy wzroście temperatury o 2%, aby jego ciśnienie nie uległo zmianie.

Zestaw 11. *odp. str. 91*

1. Uzasadnić zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_2^{\infty} \frac{x^2+\sin x}{x^4+\sin x}\,dx$.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{n^2+1}$.

3. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest ciągła na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnić.

4. Korzystając z różniczki funkcji dwóch zmiennych obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $0.97^{1.05} + 1.05^{0.97}$.

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6\ln x$.

Zestaw 12.

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$. Sformułować wykorzystane kryteria lub definicje.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n-1}}{n4^n}$. Podać wykorzystane kryteria.

3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} x^{2n}$.

4. Wyznaczyć i narysować dziedzinę funkcji $f(x,y) = \ln \frac{x^2+y^2+2y}{x+y}$ oraz jej poziomicę dla poziomu $h = 0$.

5. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \arcsin \frac{xy}{x+y}$ w punkcie $(0,1)$ w kierunku wersora nachylonego pod kątem α do dodatniej części osi Ox. Dla jakiego kąta α, pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość najmniejszą?

Zestaw 13. *odp. str. 91*

1. Uzasadnić zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{4x^3+\sqrt{x}}\,dx$.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2}$.

3. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest ciągła na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnić.

4. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y,z) = \ln\left(x+y^2+z^3\right)$ w punkcie $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,-1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v} = \left(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}\right)$.

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 y + \frac{2}{x} + \frac{1}{y}$.

Zestaw 14.

1. Obliczyć pole figury D ograniczonej wykresem funkcji $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, gdzie $x \geqslant 0$ oraz jej asymptotą w ∞.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$. Sformułować wykorzystane kryteria.

3. Wyznaczyć zbiór punktów nieciągłości funkcji f określonej wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \arcsin\left(x^2+y^2\right) & \text{dla} \quad x^2+y^2 \leqslant 1, \\ \dfrac{\pi}{2}\cos xy & \text{dla} \quad x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

4. Uzasadnić równość $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$.

5. Obliczyć pochodne cząstkowe F'_u, F'_v funkcji określonej wzorem

$$F(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right),$$

gdzie funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na $\mathbb{R}^2$ oraz

$$x = \operatorname{arctg}\frac{v}{u}, \quad y = \sqrt{u^2+v^2}.$$

Wyrazić f'_x, f'_y za pomocą pochodnych cząstkowych F'_u, F'_v oraz zmiennych u i v.

Zestaw 15.

odp. str. 92

1. Uzasadnić zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^{\infty} \frac{2-\sin x}{2+\sin x} e^{-3x}\,dx$.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+2}$.

3. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(ax^2+y^2\right)}{2x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest ciągła na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnić.

4. Niech $u(x,y) = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$, gdzie f jest dowolną funkcją jednej zmiennej mającą ciągłą pochodną. Sprawdzić równość $xu'_x + yu'_y = xy + u$.

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 54\ln y$.

Zestaw 16.

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2\sqrt{x}}\,dx$.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^2}$.

3. Wyznaczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)3^n}$.

4. W celu wyznaczenia przenikalności elektrycznej polietylenu zmierzono pojemność oraz wymiary kondensatora płaskiego o izolacji polietylenowej uzyskując następujące wyniki: pojemność $C = (3 \pm 0.2)\cdot 10^{-9}$ F, powierzchnia okładzin $S = (150 \pm 10)\cdot 10^{-4}$ m^2, grubość izolacji $d = (0.1 \pm 0.01)\cdot 10^{-3}$ m. Z jaką dokładnością można obliczyć przenikalność dielektryczną polietylenu używając wzoru $\varepsilon = \frac{Cd}{S}$?

5. Podać definicję pochodnej kierunkowej funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$. Obliczyć $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0)$ dla funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^4}$ oraz wersora $\boldsymbol{v} = \left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$. W jakim kierunku pochodna ta jest największa?

Zestaw 17.

odp. str. 92

1. Niech $g(u,v)$ będzie funkcją o ciągłych pochodnych cząstkowych drugiego rzędu spełniającą równanie $g''_{uu} + g''_{vv} = 0$. Pokazać, że funkcja $f(x,y) = g\left(x^2 - y^2, 2xy\right)$ spełnia równanie $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$.

2. Funkcję $f(x) = \dfrac{x}{1 - x - 2x^2}$ rozwinąć w szereg Maclaurina i określić przedział jego zbieżności.

3. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^3}}$.

4. Pokazać, że funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $(0,0)$. Obliczyć pochodne cząstkowe $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$.

5. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y = 1/\sqrt{x^2+1}$ wokół osi Ox.

Zestaw 18.

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{(x+1)^2}\, dx$.

2. Korzystając z twierdzeń o całkowaniu lub różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n e^n}$.

3. Określić dziedzinę funkcji $f(x,y) = \ln\left(2 - x^2 - y^2\right)$. Zbadać, czy jest ona zbiorem otwartym, domkniętym, ograniczonym. Naszkicować poziomice wykresu funkcji f.

4. Zbadać, czy istnieje granica $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. Wyznaczyć wersor $\boldsymbol{v}$ wskazujący kierunek, dla którego pochodna kierunkowa $f_{\boldsymbol{v}}(2,1)$ funkcji $f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{x}$ ma wartość 0.

Zestaw 19.

odp. str. 92

1. Niech $f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, gdzie $g(r)$ jest funkcją jednej zmiennej dwukrotnie różniczkowalną. Sprawdzić, że zachodzi równość $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{d^2 g}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dg}{dr}$.

2. Uzasadnić równość $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$.

3. Sprawdzić, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2-y^2} & \text{dla} \quad |x| \neq |y|, \\ 0 & \text{dla} \quad |x| = |y| \end{cases}$$

ma pochodne cząstkowe $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$.

4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)^2}$.

5. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+2}}$.

Zestaw 20.

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^2 \frac{\cos x}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

2. Korzystając z twierdzeń o całkowaniu lub różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(1-e)^{n-1}}$.

3. Określić dziedzinę funkcji $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-1}$. Zbadać, czy jest ona zbiorem otwartym, domkniętym, ograniczonym. Naszkicować poziomice wykresu funkcji f.

4. Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2 x}{xy}$.

5. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(0,1,z_0)$ do wykresu funkcji

$$z = \frac{\operatorname{arctg} y}{1+x^2}.$$

Zestaw 21. *odp. str. 92*

1. Niech g i h będą funkcjami jednej zmiennej dwukrotnie różniczkowalnymi. Uzasadnić, że funkcja $f(x,y) = \frac{x}{y}h(x) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ spełnia równanie

$$xy\, f''_{xy} + y^2\, f''_{yy} + x\, f'_x + 2y\, f'_y = 0.$$

2. Pokazać, że funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ma obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $(0,0)$.

3. Funkcję $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$ rozwinąć w szereg Maclaurina oraz określić przedział jego zbieżności.

4. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

5. Zbadać zbieżność warunkową szeregu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+5}$.

Zestaw 22.

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

2. Korzystając z twierdzeń o całkowaniu lub różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1-e)^n}$.

3. Określić dziedzinę funkcji

$$f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2-1\right).$$

Zbadać, czy jest ona zbiorem otwartym, domkniętym, ograniczonym. Naszkicować poziomice wykresu funkcji f.

4. Zbadać, czy istnieje granica $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

5. Wiedząc, że funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu, znaleźć pochodne h'_x oraz h''_{zx} funkcji $h(x,y,z) = xf(yz, xz)$.

Zestaw 23. *odp. str. 93*

1. Niech p i q będą funkcjami jednej zmiennej dwukrotnie różniczkowalnymi. Uzasadnić, że funkcja $f(x,y) = xp\left(-\dfrac{y}{x}\right) + q\left(\dfrac{x}{y}\right)$ spełnia równanie

$$x^2 f''_{xx} + 2xy\, f''_{xy} + y^2 f'_y = 0.$$

2. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{x^3+1}$.

3. Zbadać, czy istnieje pochodna cząstkowa $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

4. Zbadać zbieżność warunkową szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

5. Wykorzystując rozwinięcie funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ wyznaczyć szereg Maclaurina funkcji $g(x) = \ln\left(1+3x+2x^2\right)$ oraz określić przedział jego zbieżności.

Zestaw 24.

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin x^2}{(x+2)^2}\,dx.$

2. Korzystając z twierdzeń o całkowaniu lub różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}.$

3. Określić dziedzinę funkcji

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$$

Zbadać, czy jest ona zbiorem otwartym, domkniętym, ograniczonym. Naszkicować poziomice wykresu funkcji f.

4. Zbadać, czy istnieje granica $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy^2}.$

5. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $\left(1, \sqrt{3}, z_0\right)$ do wykresu funkcji

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Zestaw 25.

odp. str. 93

1. Obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^n}.$

2. Zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ funkcji określonej wzorem $f(x,y) = \sqrt[3]{x^6-8y^3}.$

3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int\limits_1^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) dx.$

4. Napisać rozwinięcie funkcji $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ w szereg Taylora o środku $x_0 = 3$.

5. Zbadać, czy istnieje granica $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^4+y^4\right)}{x^2+y^2}.$

Zestaw 26.

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}}$, gdzie $a < b$. Czy całka $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}}$ jest zbieżna?

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite k, dla których szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^k}$ jest zbieżny.

3. Wyznaczyć zbiór liczb rzeczywistych x, dla których szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{(x+1)^n}$ jest zbieżny.

4. Niech $f(x,y,z) = e^{xy-z}$. Znaleźć i naszkicować zbiór punktów $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, dla których $f(x,y,z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}(x,y,z)$.

5. Przy pomocy różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\ln 1.02 \cdot \sin 358^\circ.$$

Zestaw 27. *odp. str. 93*

1. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = x^2 + y^2$, która jest równoległa do płaszczyzny $3x - 6y + 2z - 17 = 0$.

2. Korzystając z twierdzeń o szeregach uzasadnić równość $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$. Sformułować wykorzystane twierdzenia.

3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{3^n + 2^n}$.

4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{9-x^2}}$.

5. Znaleźć punkty ciągłości funkcji f określonej wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{dla} \quad y \leqslant x^2, \\ 2x - 1 & \text{dla} \quad y > x^2. \end{cases}$$

Zestaw 28.

1. W zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ zbadać ciągłość funkcji f określonej wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{dla} \quad y \geqslant 0, \\ \alpha & \text{dla} \quad y < 0. \end{cases}$$

Sprawdzić, czy zbiór punktów ciągłości funkcji f jest otwarty.

2. Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do wykresu funkcji $z = \frac{x^2 - y}{x + y + 1}$ w punktach przecięcia tego wykresu z prostą $x = y = z$.

3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_\alpha^\infty \frac{\sin x^2}{x^4}\,dx$ w zależności od rzeczywistego parametru α.

4. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{3n}}{2^{5n+2}}$.

5. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (2n)!}{(n+1)!}$.

Zestaw 29. *odp. str. 93*

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+5}$.

2. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

3. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $\left(1, -\sqrt{3}, z_0\right)$ do wykresu funkcji $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$.

4. Funkcję $f(x) = \frac{x}{3x+1}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Określić przedział zbieżności otrzymanego szeregu.

5. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{5^n + 3^n}$.

Zestaw 30.

1. Obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n+2}\right)$.

2. Wyznaczyć zbiór liczb rzeczywistych x, dla których szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n! \cos n\pi}{n^n}$ jest zbieżny warunkowo.

3. Dla funkcji $f(x,y) = \sqrt{\ln \frac{x}{y} - 1}$ wyznaczyć i naszkicować zbiór

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) < 0\right\}.$$

4. Przy pomocy różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\frac{(5.1)^2 \cdot (2.9)^2}{1 + (2.9)^2}.$$

5. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_0^{\infty} e^{-x} \sin 3x \, dx$.

Zestaw 31. *odp. str. 94*

1. Sformułować kryterium całkowe zbieżności szeregów. Korzystając z tego kryterium zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2+2}$.

2. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$ wokół osi Ox. Sporządzić rysunek.

3. Korzystając z twierdzeń o szeregach uzasadnić równość $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

4. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{n3^n}$.

5. Niech $f(x,y) = \ln\left(x^2+3y\right)$. Obliczyć f'''_{xxy}.

Zestaw 32.

1. Obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n}{(n+1)^2}$.

2. Dla jakich wartości parametru $0 \leqslant \alpha < 2$ całka $\displaystyle\int_{\alpha}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$ jest zbieżna?

3. Wyznaczyć zbiór liczb $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg potęgowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(10x)^n}{2^n+5^n}$ jest rozbieżny.

4. Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do wykresu funkcji $z = \ln \dfrac{x^2}{y}$ w punktach $(1, y_1, 1)$, $(1, -1, z_2)$.

5. Znaleźć i naszkicować dziedzinę naturalną funkcji $f(x,y) = \operatorname{tg} \dfrac{x}{y}$ oraz jej poziomice odpowiadające poziomom $h = 0$ i $h = \sqrt{3}$. Czy funkcja f jest ciągła w punkcie $(0,1)$?

Zestaw 33. *odp. str. 94*

1. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y = 1/\sqrt{x^2+1}$ wokół osi Ox.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{(n+1)3^n}$.

3. Określić i naszkicować dziedzinę funkcji $f(x,y) = \ln \dfrac{x+1}{y}$.

4. Zbadać, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0,\ y \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0,\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

5. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji funkcji $f(x,y) = e^{2y-x^3}$. Czy pochodne cząstkowe mieszane są równe?

Zestaw 34.

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n}$.

2. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji $f(x) = xe^{-x^2}$ i na tej podstawie obliczyć $f^{(7)}(0)$.

3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^6+2x^2}}.$$

4. Wyznaczyć i narysować dziedzinę funkcji $f(x,y) = \arcsin\sqrt{x-\sqrt{y}}$. Do jakich klas zbiorów można zaliczyć otrzymaną dziedzinę?

5. Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Zestaw 35.

odp. str. 94

1. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y\sqrt[3]{x} = 3$, gdzie $0 < x \leqslant 1$, wokół osi Ox.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n\sqrt{n}}$.

3. Określić i naszkicować dziedzinę funkcji $f(x,y) = \sqrt{\frac{x-2}{y}}$.

4. Zbadać, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{3y} & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R},\ y \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R},\ y = 0 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

5. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$. Czy pochodne cząstkowe mieszane są równe?

Zestaw 36.

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_0^{\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx$.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

3. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji $f(x) = \dfrac{x}{4+x^2}$ i jego promień zbieżności.

4. Wyznaczyć zbiór punktów ciągłości funkcji f określonej wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin xy & \text{dla} \quad x \neq y, \\ 0 & \text{dla} \quad x = y. \end{cases}$$

5. Obliczyć pochodne cząstkowe u'_y, u'_z funkcji $u(x,y,z) = \left(x+z^2\right)^{\sqrt{yz}}$.

Zestaw 37. *odp. str. 94*

1. Czy bryła V ograniczona powierzchnią powstałą przez obrót krzywej

$$y = \frac{1}{\sqrt{4-x}},$$

gdzie $0 \leqslant x < 4$, wokół osi Ox ma skończoną objętość?

2. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}$.

3. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = xe^{-x^2}$. Wykorzystując otrzymane rozwinięcie obliczyć $f^{(5)}(0)$.

4. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(2,1,z_0)$ do wykresu funkcji

$$z = y \ln\left(2 + x^2 y - y^2\right).$$

5. Obliczyć pochodne cząstkowe mieszane rzędu drugiego funkcji

$$f(x,y) = \sin x^2 y + \frac{\sqrt{x}}{y}.$$

Czy otrzymane pochodne są równe?

Zestaw 38.

1. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha\sqrt{x^2+y^2} & \text{dla} \quad x^2+y^2 \leqslant 4, \\ 8 - \left(x^2+y^2\right) & \text{dla} \quad x^2+y^2 > 4 \end{cases}$$

jest ciągła? Narysować wykres tej funkcji.

2. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$.

4. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\ln n}$.

5. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)^{2n}}{\left(n^3+1\right)^n}$.

Zestaw 39. *odp. str. 95*

1. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót krzywej $y = 1/\sqrt{3+x^2}$ wokół osi Ox.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n^3}$.

3. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = x^2 \cos 2x$. Wykorzystując otrzymane rozwinięcie obliczyć $f^{(4)}(0)$.

4. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1, 0, z_0)$ do wykresu funkcji

$$z = xe^{4xy-y^2}.$$

5. Obliczyć pochodne cząstkowe mieszane rzędu drugiego funkcji

$$f(x, y) = \cos xy^2 - \frac{x}{\sqrt{y}}.$$

Czy otrzymane pochodne są równe?

Zestaw 40.

1. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{1}{4^n}$.

2. Obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt[3]{x^5}}\, dx$.

4. Wyznaczyć i naszkicować poziomice oraz wykres funkcji $g(x, y) = -x - y^2$.

5. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(2, 1, z_0)$ do wykresu funkcji $z = x^{xy}$