ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Opracowanie
Marian Gewert   Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Kolokwia i egzaminy

Wydanie dziesiąte zmienione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2018

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład książki wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978-83–62780–61–7

Wydanie X zmienione, Wrocław 2018
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: I-BiS Usługi Komputerowe – Wydawnictwo, spółka jawna.

Spis treści

Wstęp **7**

Zestawy zadań z kolokwiów **9**
Pierwsze kolokwium 9
Drugie kolokwium 26

Zestawy zadań z egzaminów **43**
Egzamin podstawowy 43
Egzamin poprawkowy 67

Odpowiedzi i wskazówki **91**
Pierwsze kolokwium 91
Drugie kolokwium 96
Egzamin podstawowy 105
Egzamin poprawkowy 114

Wstęp

Niniejszy zbiór zawiera zestawy zadań, które w ubiegłych latach studenci Politechniki Wrocławskiej rozwiązywali na kolokwiach i egzaminach z Analizy matematycznej 2. Zadania z tych sprawdzianów obejmują całki niewłaściwe, szeregi liczbowe i potęgowe oraz rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych wraz z zastosowaniami w fizyce i technice. Do zestawów kolokwialnych i egzaminacyjnych o numerach nieparzystych podane są odpowiedzi.

Opracowanie pozwala studentom zapoznać się z rodzajami oraz stopniem trudności zadań kolokwialnych i egzaminacyjnych. Jest to jednocześnie dodatkowy materiał do samodzielnej nauki. Zestawy zadań z tego zbioru mogą być wykorzystywane przez prowadzących ćwiczenia na kolokwiach a wykładowców na egzaminach.

Zbiór zadań *„Kolokwia i egzaminy”* jest trzecią częścią zestawu podręczników do Analizy matematycznej 2. Pozostałymi częściami zestawu są *„Definicje, twierdzenia, wzory”* oraz *„Przykłady i zadania”*.

Aktualne wydanie nie zawiera zestawów na ocenę celującą. Zestawy te stały się częścią oddzielnego opracowania *„Algebra i analiza. Egzaminy na ocenę celującą”*. Ambitnych studentów, którzy lubią rozwiązywać trudne i nietypowe zadania, zachęcamy do zapoznania się z tą książką.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za zestawy zadań z kolokwiów i egzaminów, a także za uwagi o poprzednich wydaniach.

Marian Gewert *Zbigniew Skoczylas*

6. Obliczyć moment statyczny, względem osi Ox, jednorodnej ($\sigma_0 = 1$) figury płaskiej D ograniczonej krzywymi $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $y = 0$, $(y \geqslant 0)$.

7. Wykorzystując całkę podwójną obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $z = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$, $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $z = 0$.

8. Obliczyć moment bezwładności, względem osi Oz, jednorodnej bryły U o masie M ograniczonej powierzchniami $z = x^2 + y^2 + 1$, $z = 5$.

Egzamin poprawkowy

Zestaw 1. *odp. str. 114*

1. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\ln\left(3.02^2 - 1.97^3\right).$$

2. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_4^\infty \frac{x\,dx}{1 + x^4}$

3. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \sin\frac{n\pi}{2}$.

4. Płaszczyzna $z = z_0$ jest styczna do wykresu funkcji $z = x^2 + xy + y^2 + x + y$. Wyznaczyć z_0.

5. Za pomocą całki podwójnej obliczyć objętość kuli o promieniu R.

6. Wyznaczyć zbiór tych $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$ jest zbieżny. Obliczyć jego sumę.

7. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_0^1 dx \int_{(x-1)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy.$$
Narysować obszar całkowania.

8. Sporządzić rysunek i obliczyć objętość bryły U ograniczonej nierównościami $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4z$, $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$.

Zestaw 2.

1. Funkcję $f(x) = \dfrac{2x}{x + 4}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Wyznaczyć przedział zbieżności tego szeregu.

2. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(0, 0, z_0)$ do powierzchni
$$z = x\cos\left(x + y^2\right).$$

3. Zmienić kolejność całkowania w całce $\int\limits_{-6}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{-x^2-6x}}^{x+7} f(x,y)\,dy$. Narysować obszar całkowania.

4. Sporządzić rysunek i obliczyć objętość bryły U ograniczonej nierównościami $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

5. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y) = x^2 - 2y + 1$ na obszarze D określonym nierównościami $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $\ y \leqslant 0$.

6. Wyznaczyć położenie środka masy ćwiartki jednorodnego pierścienia o promieniach r, R, gdzie $0 < r < R$.

7. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{x+2}{x^3}\,dx$.

8. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4n^2-5}$.

Zestaw 3. *odp. str. 114*

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{xe^{\sqrt{x}}}$.

2. Za pomocą całki podwójnej obliczyć pole sfery o promieniu R.

3. We wnętrzu pierwszej ćwiartki układu współrzędnych znaleźć ekstrema lokalne funkcji $z = xy(4 - x - y)$.

4. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć wartość przybliżoną wyrażenia

$$\sqrt{8.94} \cdot 1.001^3.$$

5. Obliczyć $y''(0)$ dla funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem

$$3x^2 + y^2 - 2xy = 1, \text{ gdzie } y > 0.$$

6. Obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 4^n x^{2n}$ i wyznaczyć zbiór tych $x \in \mathbb{R}$, dla których jest on zbieżny.

7. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + y^2$ w punkcie $(x_0, y_0) = (1,1)$, w kierunku wersora $\boldsymbol{v} = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$.

8. Niech U oznacza kulę o środku w punkcie $(0,0,0)$ i promieniu 1. Obliczyć całkę potrójną

$$\iiint\limits_U \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz.$$

Zestaw 4.

1. Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar całkowania D określony jest nierównościami $4x^2 - 2 \leqslant y \leqslant x^2 + 1$. Narysować obszar całkowania.

2. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 2$.

3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n(n+1)}$.

4. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4 + 4n + 1} - n^2\right)$.

5. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}}$.

6. Obliczyć masę półkola o promieniu R. Powierzchniowa gęstość masy w punkcie jest równa odległości tego punktu od osi symetrii półkola.

7. Sporządzić rysunek i obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 6 - x^2 - y^2.$$

8. Wyznaczyć wersor wskazujący kierunek, w którym pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^3}$ w punkcie $(1,1)$ przyjmuje wartość 0.

Zestaw 5. *odp. str. 114*

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x\,dx$.

2. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami

$$z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0.$$

3. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = e^x\left(2x + y^2\right)$.

4. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\sqrt{10001} \cdot \ln 1.01^4.$$

5. Wyznaczyć styczną do krzywej $x^2 + y^2 - xy = 1$ w punkcie $(1,1)$.

6. Obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n}$. Wyznaczyć zbiór tych $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg ten jest zbieżny.

7. Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ zapisać w postaci całki iterowanej, jeżeli obszar całkowania D jest częścią wspólną czterech kół o promieniach 1 i środkach $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(0,1)$, $D=(1,1)$.

8. Pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2$ w punkcie $(x_0, y_0) = (1,0)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ jest równa 1. Wyznaczyć $\boldsymbol{v}$.

Zestaw 6.

1. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y) = x + 2y$ na obszarze D określonym nierównościami $0 \leqslant y \leqslant \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

2. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_3^\infty \frac{4\,dx}{x^2-4}$.

3. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n^2}{n!+3}$.

4. Wyznaczyć położenie środka masy jednorodnego wycinka koła o promieniu R i kącie rozwarcia $2\pi/3$.

5. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n}{2^{n+1}}$.

6. Obliczyć całkę potrójną $\iiint\limits_U dxdydz$, gdzie obszar całkowania U jest określony nierównościami $y \geqslant x^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1 - y^2$.

7. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$ w punkcie $(x_0,y_0) = (2,1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v} = (4/5, -3/5)$.

8. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x-1}^{|x-1|+1} f(x,y)\,dy.$$

Narysować obszar całkowania.

Zestaw 7. *odp. str. 115*

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_{32}^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^5-1}}\,dx$.

2. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ na kole $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2$.

4. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć wartość przybliżoną wyrażenia

$$\sqrt[3]{8.02} \cdot 2.001^7.$$

5. Wyznaczyć styczną do krzywej $x^2 + y^2 + 6xy - 2x - 2y = 4$ w punkcie $(1, 1)$.

6. Obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$. Wyznaczyć zbiór tych $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg jest zbieżny.

7. Pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie (x_0, y_0), w kierunku wersora $\boldsymbol{v}_1 = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$ wynosi 1, a w kierunku wersora $\boldsymbol{v}_2 = \left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$ ma wartość 0. Wyznaczyć pochodną tej funkcji w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wersora $\boldsymbol{v} = (1, 0)$.

8. Za pomocą całki potrójnej obliczyć objętość stożka o promieniu podstawy R i wysokości H.

Zestaw 8.

1. Obliczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = \left(4x^2 + 2y\right) e^y$.

2. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego trójkąta prostokątnego równoramiennego o przeciwprostokątnej a oraz masie M, względem jego osi symetrii.

3. Obliczyć objętość bryły $U = \left\{(x, y, z):\ -1 \leqslant y \leqslant 1 - |x|,\ \ x^2 - 4 \leqslant z \leqslant 1 - y^2\right\}$.

4. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x, y) = x^y + y^2$ w punkcie $(x_0, y_0) = (1, 2)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v} = (5/13, -12/13)$.

5. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \dfrac{1}{2^n}$.

6. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_2^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

7. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{2n^2 + 3}(x+1)^n$.

8. Całkę podwójną z funkcji f po obszarze D zamienić na całkę iterowaną, jeżeli obszar całkowania określony jest nierównościami $x^2 - 4x \leqslant y \leqslant x$, $x \geqslant 2$. Sporządzić rysunek obszaru D.

Zestaw 9.

odp. str. 115

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$.

3. Funkcję $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Określić przedział zbieżności tego szeregu.

4. Za pomocą różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\sqrt{4.05^2 + 3.07^2}.$$

5. Wyznaczyć równanie stycznej w punkcie $(1, y_0)$ do wykresu funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem $x^3 + y^3 + xy = 1$.

6. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

7. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego prostokąta o bokach $a = 10$, $b = 20$ i masie $M = 200$ względem dłuższego boku.

8. Obliczyć współrzędne środka masy półkuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$, jeśli gęstość masy w każdym punkcie tej półkuli jest równa jego odległości od początku układu współrzędnych.

Zestaw 10.

1. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_2^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4 + x + 1}.$$

2. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$. Korzystając z tego rozwinięcia wyznaczyć $f^{(18)}(0)$.

3. Napisać równanie stycznej w punkcie $(2, 2)$ do wykresu funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem $x^3 + x - y^3 - y = 0$.

4. Obliczyć pochodną kierunkową $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(2, 1)$ funkcji $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v} = \left(-\sqrt{3}/2, 1/2\right)$.

5. Obliczyć całkę $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$, gdzie D jest obszarem położonym w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i ograniczonym krzywymi $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$, $y = 0$. Zastosować współrzędne biegunowe. Sporządzić rysunek.

6. Wyznaczyć współrzędne środka masy jednorodnego obszaru ograniczonego krzywymi $y = -x + 1$, $y = 0$, $x = 0$.

7. Korzystając z całki potrójnej obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Zastosować współrzędne sferyczne. Sporządzić rysunek tej bryły.

8. Wyznaczyć poziomice funkcji $f(x,y) = 2 + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ oraz narysować poziomicę przechodzącą przez punkt $(4,4)$.

Zestaw 11. *odp. str. 116*

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n}$.

3. Funkcję $f(x) = x^2 e^{-x}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Określić przedział zbieżności tego szeregu.

4. Za pomocą różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $2.01^{3.03}$.

5. Wyznaczyć równanie stycznej w punkcie $(1, y_0)$ do wykresu funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej wzorem $x^2 \ln y - y \ln x = 0$.

6. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 - 2x + 3y^2 + 6y$.

7. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $a = 10$, $b = 20$ i masie $M = 100$, względem dłuższej przyprostokątnej.

8. Obliczyć współrzędne środka masy jednorodnej bryły ograniczonej powierzchniami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Zestaw 12.

1. Obliczyć pole płata Σ o równaniu $z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ wyciętego powierzchnią $x^2 + y^2 = 1$. Zastosować współrzędne biegunowe.

2. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnego $(\gamma_0 = 1)$ obszaru U ograniczonego powierzchniami $z = 1$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Zastosować współrzędne walcowe.

3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}(x-2)^n$.

4. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\left(2x^2+1\right) dx}{4x^5 + x - 1}.$$

5. Korzystając z definicji obliczyć pochodną cząstkową

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, 2\right), \text{ gdzie } f(x,y) = \frac{\arcsin x}{y^2}.$$

6. W całce iterowanej

$$\int_0^1 dy \int_{y^3}^{\sqrt[4]{y}} f(x,y)\,dx$$

zmienić kolejność całkowania i naszkicować obszar całkowania.

7. Obliczyć granicę $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^3-y^3}{x-y}$. Natomiast uzasadnić, że nie istnieje granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+3xy-y^2}{5x^2+7y^2}.$$

8. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = (x-2)^2 + (y+3)^2 + 7$.

Zestaw 13.

odp. str. 116

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-2)^n}{n}$.

3. Funkcję $f(x) = xe^{x^2+1}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Określić przedział zbieżności tego szeregu.

4. Za pomocą różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\sqrt{1.02^2 + 1.97^3}.$$

5. Wyznaczyć równanie stycznej w punkcie $(0, y_0)$ do wykresu funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej wzorem $xe^y - y^2 \ln y = 0$.

6. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = 9x^2 - 6x + 3y^2 - 6y$.

7. Obliczyć moment statyczny względem osi Ox jednorodnego półkola $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $y \geqslant 0$ o masie $\pi/2$.

8. Obliczyć współrzędne środka masy jednorodnej bryły ograniczonej powierzchniami $z = 1,\ \ z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Zestaw 14.

1. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem

$$x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0.$$

2. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

3. Wyznaczyć masę kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ o objętościowej gęstości masy $\gamma(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Zastosować współrzędne sferyczne.

4. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego koła o średnicy D i masie M, względem jego środka.

5. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $\left(-1/2, \sqrt{3}/2, z_0\right)$ do wykresu funkcji $z = \dfrac{\arcsin x}{\arccos y}$.

6. Niech $P_n = \left(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2^i}, \left(1 + \dfrac{3}{4n}\right)^n, \log_{n+1} 2\right)$. Obliczyć granicę $\lim_{n\to\infty} P_n$.

7. Obliczyć całkę podwójną $\iint_R \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$, gdzie $R = [0,1] \times [0,1]$.

8. Wyznaczyć sumę częściową i następnie obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Zestaw 15. *odp. str. 117*

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_0^1 \dfrac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^n\sqrt{n}}$.

3. Funkcję $f(x) = \dfrac{x}{x^4+16}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Określić przedział zbieżności tego szeregu.

4. Za pomocą różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $1.94^2 e^{0.12}$.

5. Wyznaczyć równanie stycznej w punkcie $(0, y_0)$ do wykresu funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej wzorem $x^2e^y + ye^x - 1 = 0$.

6. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = 4x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 6y$.

7. Obliczyć moment statyczny jednorodnego kwadratu o boku $a = 10$ i masie $M = 100$, względem jego przekątnej.

8. Obliczyć współrzędne środka masy jednorodnej bryły ograniczonej powierzchniami $z = 1$, $z = x^2 + y^2$.

Zestaw 16.

1. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x,y,z) = \dfrac{xy^2z^3}{6}$ na prostopadłościanie $P = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$.

2. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n^2+3}$.

3. Korzystając z całki podwójnej obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z = 0$, $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 9$. Zastosować współrzędne biegunowe. Sporządzić rysunek.

4. Narysować dziedzinę i wyznaczyć zbiór wartości funkcji

$$f(x,y) = 2\arcsin\left((x-2)^2 + (y+3)^2 - 3\right).$$

5. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć wartość przybliżoną wyrażenia $1.02^{2.97}$.

6. Znaleźć współrzędne środka masy jednorodnej bryły U określonej nierównościami $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Zastosować współrzędne sferyczne. Sporządzić rysunek.

7. Obliczyć drugą pochodną $y''(4)$ funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$, której wykres przechodzi przez punkt $(4,4)$.

8. Zbadać bezwzględną zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int\limits_2^{\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$.

Zestaw 17. *odp. str. 117*

1. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\dfrac{58^\circ}{2.03}$.

2. We wnętrzu kwadratu $P = [0,\pi] \times [0,\pi]$ znaleźć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y).$$

3. Niech $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$. Narysować zbiór

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) > 0\right\}.$$

4. Powołując się na twierdzenie o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregu potęgowego wyznaczyć promień zbieżności szeregu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1}$ i obliczyć jego sumę.

5. Przy pomocy całki niewłaściwej obliczyć pole obszaru D zawartego w półpłaszczyźnie $x \geqslant 0$, ograniczonego osią Ox oraz wykresem funkcji $y = \dfrac{x}{x^4+16}$.

6. Obliczyć masę M obszaru D ograniczonego krzywymi $y = e^x$, $y = \left|1 - x^3\right|$, $x = 2$, jeżeli powierzchniowa gęstość masy ma postać $\sigma(x,y) = 2xy$.

7. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x,y) = x + y$ na obszarze D ograniczonym krzywymi $y = x^2 - 1$, $x = (y+1)^2$.

8. Korzystając ze współrzędnych sferycznych obliczyć całkę potrójną

$$\iiint\limits_U \frac{dxdydz}{x^2+y^2+2z^2},$$

gdzie obszar U określony jest warunkami $4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 16$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Zestaw 18.

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^3 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

2. Funkcję $f(x) = x \sin x \cos x$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Korzystając z otrzymanego rozwinięcia obliczyć $f^{(117)}(0)$.

3. Zbadać ciągłość funkcji $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{y} & \text{dla} \quad y \neq 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ x & \text{dla} \quad y = 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

4. Wysokość i średnica podstawy stożka zmierzone z dokładnością 0.1 cm wynoszą odpowiednio 4.0 i 6.0 cm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole powierzchni bocznej tego stożka?

5. Wiedząc, że funkcja f ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe znaleźć $\frac{\partial g}{\partial y}$ i $\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}$ dla funkcji $g(x,y,z) = f(xy, x-z)$.

6. Obliczyć pole płata Σ wyciętego z powierzchni $z = \sqrt{x^2+y^2} - 2$ przez walec $x^2 + y^2 = 2x$. Naszkicować rysunek.

7. Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $y = 1 - |x|$, $y = x^2 + x$, zamienić na całki iterowane.

8. Wyznaczyć współrzędne środka masy jednorodnej bryły U ograniczonej powierzchniami $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ i zawierającej punkt $(0,0,1)$.

Zestaw 19. *odp. str. 118*

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

2. Wyznaczyć płaszczyznę styczną w punkcie $(-3, y_0, \pi/4)$ do wykresu funkcji

$$z = \operatorname{arc\,tg}\left(x^2 + y\right).$$

3. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x,y) = x^2 - y^2$ na kwadracie o wierzchołkach $A = (-2,0)$, $B = (2,0)$, $C = (0,-2)$, $D = (0,2)$.

4. Obliczyć $\frac{\partial F}{\partial u}$, jeżeli funkcja F określona jest wzorem $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, gdzie $f(x,y) = x - \frac{y}{x}$ oraz $u = \frac{x}{y}$, $v = x - y$.

5. Dla jakiego $p > 1$ wartość średnia funkcji $f(x,y,z) = \dfrac{xy + xz + yz}{xyz}$ na sześcianie $P = [1,p] \times [1,p] \times [1,p]$ jest równa $\ln p$?

6. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_D 2y\,dxdy$, gdzie obszar D ograniczony jest krzywymi $y = \cos\frac{\pi}{2}x,\ \ x + y = 0,\ \ |x - y| = 1.$

7. Leżący na płaszczyźnie $y = 0$ łuk $z = x^2$, gdzie $x \in [0, 2]$, obracamy wokół osi Oz najkrótszą drogą do płaszczyzny $y = \sqrt{3}x$. Obliczyć pole powierzchni płata Σ zakreślonego przez łuk podczas obrotu.

8. Wyznaczyć wszystkie wartości $x \in \mathbb{R}$, dla których zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{x^n \cdot n^3}$.

Zestaw 20.

1. Korzystając z definicji obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

2. Znaleźć promień i przedział zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \ln^2 n}$.

3. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\sqrt[1.99]{3.98}$.

4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

5. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_D 2x^2 y\,dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym osiami układu współrzędnych oraz krzywą $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

6. Sporządzić rysunek i obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $z = -3,\ \ z = xy,\ \ x^2 + y^2 = 1$.

7. Obliczyć moment bezwładności względem początku układu współrzędnych dodatniego oktantu wydrążonej kuli o promieniu wewnętrznym 1 i zewnętrznym 2, jeżeli objętościowa gęstość masy w punkcie jest odwrotnie proporcjonalna do jego odległości od punktu $(0, 0, 0)$, a masa bryły wynosi 4.

8. Wyznaczyć współrzędne środka masy jednorodnej bryły U ograniczonej powierzchniami $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = x^2 + y^2$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne walcowe.

Zestaw 21. *odp. str. 118*

1. Wyznaczyć zbiór tych wartości parametru $a > 0$, dla których szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + 3^n}{2^n + 5^n}$ jest rozbieżny.

2. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x, y, z) = \frac{yz}{x}$ na obszarze U będącym graniastosłupem o wierzchołkach $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 0, 0)$, $C = (2, 2, 0)$, $A' = (1, 0, 2)$, $B' = (2, 0, 2)$, $C' = (2, 2, 2)$.