

ANALIZA
MATEMATYCZNA 2

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie dziewiętnaste zmienione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2019

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1993 – 2019 by Marian Gewert i Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie $\text{\LaTeX}$.

ISBN 978–83–62780–64–8

Wydanie XIX zmienione, Wrocław 2019
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS, sp. z o.o., A.Bieroński, P.Bieroński, sp. jawna

Spis treści

Wstęp	7
1. Całki niewłaściwe	9
1. Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju	9
2. Kryteria zbieżności całek niewłaściwych pierwszego rodzaju	12
3. Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju	14
4. Całki niewłaściwe drugiego rodzaju	15
5. Kryteria zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju	19
2. Szeregi liczbowe i funkcyjne	22
1. Definicje i podstawowe twierdzenia	22
2. Kryteria zbieżności szeregów	25
3. Zbieżność bezwzględna szeregów	29
4. Iloczyn szeregów*	31
5. Ciągi funkcyjne	32
6. Szeregi funkcyjne	37
7. Szeregi potęgowe	42
8. Szeregi Fouriera*	47
3. Rachunek różniczkowy funkcji dwóch i trzech zmiennych	51
1. Zbiory na płaszczyźnie i w przestrzeni	51
2. Funkcje dwóch i trzech zmiennych	55
3. Granice i ciągłość funkcji	59
4. Pochodne cząstkowe funkcji	63
5. Płaszczyzna styczna i różniczka funkcji	68
6. Pochodne cząstkowe funkcji złożonych	71
7. Pochodna kierunkowa funkcji	73
8. Wzór Taylora*. Ekstrema funkcji	76
9. Metoda najmniejszych kwadratów	83
10. Metoda mnożników Lagrange’a*	83
11. Funkcje uwikłane	86

4. Całki podwójne	90
1. Całki podwójne po prostokącie	90
2. Całki podwójne po obszarach normalnych	93
3. Zamiana zmiennych w całkach podwójnych*	99
4. Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych	101
5. Zastosowania całek podwójnych w geometrii	104
6. Zastosowania całek podwójnych w fizyce	106
5. Całki potrójne	110
1. Całki potrójne po prostopadłościanie	110
2. Całki potrójne po obszarach normalnych	113
3. Zamiana zmiennych w całkach potrójnych*	117
4. Współrzędne walcowe w całkach potrójnych	119
5. Współrzędne sferyczne w całkach potrójnych	121
6. Zastosowania całek potrójnych w geometrii i fizyce	124
Odpowiedzi i wskazówki	128
Literatura	149
Skorowidz	150

Wstęp

Niniejsza książka jest pierwszą częścią zestawu podręczników do Analizy matematycznej 2. Pozostałymi częściami są zbiór zadań pt. „*Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*” oraz opracowanie pt. „*Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*”. Podręczniki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci uczelni ekonomicznych, pedagogicznych i rolniczych oraz niektórych wydziałów uniwersytetów.

Materiał zawarty w książce obejmuje całki niewłaściwe, szeregi liczbowe, ciągi i szeregi funkcyjne, rachunek różniczkowy i całkowity funkcji wielu zmiennych wraz z zastosowaniami. Wszystkie zagadnienia teoretyczne zakończone są ćwiczeniami, przy czym początkowe z nich są z reguły najprostsze. Odpowiedzi do ćwiczeń umieszczone są na końcu podręcznika. Fragmenty materiału oznaczone gwiazdką nieznacznie wykraczają poza standardowy program przedmiotu. W ten sam sposób oznaczono trudniejsze ćwiczenia. Uzupełniający materiał oraz trudniejsze ćwiczenia dołączono z myślą o studentach, którzy chcą pogłębić swoje wiadomości z analizy matematycznej. Studentów tych zachęcamy do zapoznania się z książką „*Studencki konkurs matematyczny*”, która jest zbiorem trudnych i nietypowych zadań z algebry oraz analizy.

Przykłady ze wzorcowymi rozwiązaniami ilustrujące materiał teoretyczny z tego podręcznika umieszczono w drugiej części zestawu pt. „*Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*”. Tam też można znaleźć dużą liczbę zadań do samodzielnej nauki.

Ćwiczenia z tej książki oraz zadania z drugiej części zestawu są podobnych typów i mają ten sam stopień trudności jak zadania, które zwykle pojawiają się na kolokwiah i egzaminach. Zadania, które w poprzednich latach studenci rozwiązywali na sprawdzianach, są umieszczone w trzeciej części zestawu.

Do obecnego wydania dodano wiele nowych ćwiczeń i rysunków oraz poprawiono zauważone błędy i usterki.

Serdecznie dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za uwagi o wcześniejszych wydaniach książki. Dziękujemy również naszym Studentom za wskazanie błędów w odpowiedziach do ćwiczeń.

Uprzejmie prosimy Czytelników o przesyłanie uwag o podręczniku oraz informacji o dostrzeżonych błędach i usterekach.

Marian Gewert

Zbigniew Skoczylas

1.

Całki niewłaściwe

W tym rozdziale przyjmujemy, że rozważane tu funkcje są całkowne na dowolnym przedziale domkniętym zawartym w ich dziedzinie.

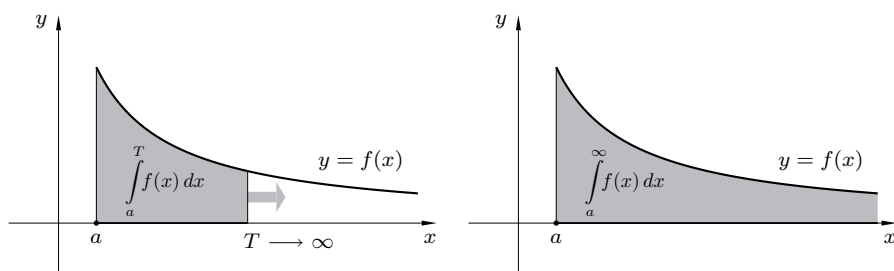
1 Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

Definicja 1.1. (*całka na półprostej*)

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $[a, \infty)$. Całkę funkcji f na $[a, \infty)$ określamy wzorem:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka jest *zbieżna*. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest *rozbieżna* odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest *rozbieżna*.

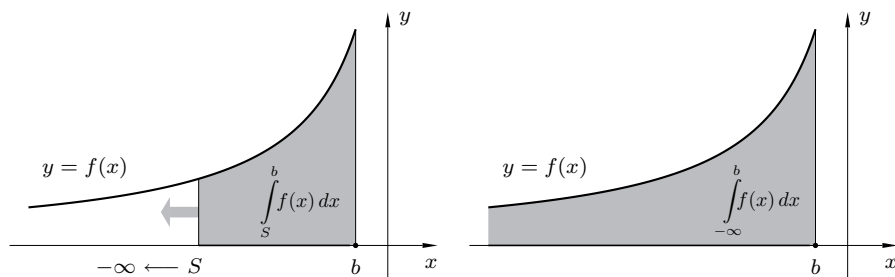


Rys. 1.1. Ilustracja całki na półprostej $[a, \infty)$

Analogicznie określa się całkę na przedziale $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^b f(x) dx.$$

Uwaga. Jeżeli funkcja f jest nieujemna na przedziale $[a, \infty)$, to całka tej funkcji na tym przedziale jest zbieżna albo rozbieżna do ∞ . Podobnie dla całki na przedziale $(-\infty, b]$.

Rys. 1.2. Ilustracja całki na półprostej $(-\infty, b]$

Ćwiczenie 1.2. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

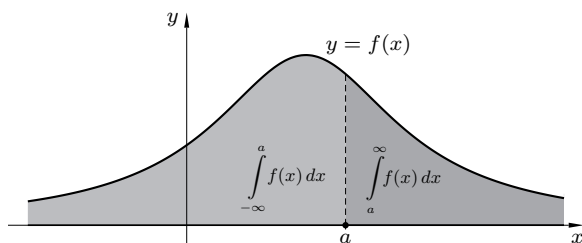
- (a) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$; (b) $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; (c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$; (d) $\int_{\pi}^{\infty} \sin x \, dx$;
 (e) $\int_{-\infty}^{-9} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$; (f) $\int_{-\infty}^0 x e^x \, dx$; (g*) $\int_1^{\infty} \frac{\cos \sqrt{x} \, dx}{\sqrt{x}}$; (h*) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Definicja 1.3. (całka na prostej)

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(-\infty, \infty)$. Całkę funkcji f na prostej $(-\infty, \infty)$ definiujemy wzorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^a f(x) \, dx + \int_a^{\infty} f(x) \, dx,$$

gdzie a oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Zbieżność całki po lewej stronie znaku równości ustalamy w zależności od zbieżności całek po prawej stronie. Jeżeli obie całki po prawej są zbieżne, to mówimy, że całka po lewej jest zbieżna. Jeżeli jedna z całek po prawej jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ , a druga jest zbieżna albo rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub ∞ , to mówimy, że całka po lewej jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ . W pozostałych przypadkach mówimy, że całka po lewej jest rozbieżna.



Rys. 1.3. Ilustracja całki na prostej

Uwaga. Jeżeli całka na przedziale $(-\infty, \infty)$ jest zbieżna dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, to jest zbieżna dla dowolnego a i jej wartość nie zależy od a . Całki po przedziałach nieograniczonych $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ nazywamy *całkami niewłaściwymi pierwszego rodzaju*. Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju są liniowe. Na koniec zauważmy, że jeżeli funkcja f jest nieujemna na przedziale $(-\infty, \infty)$, to całka niewłaściwa funkcji f na prostej jest zbieżna albo rozbieżna do ∞ .

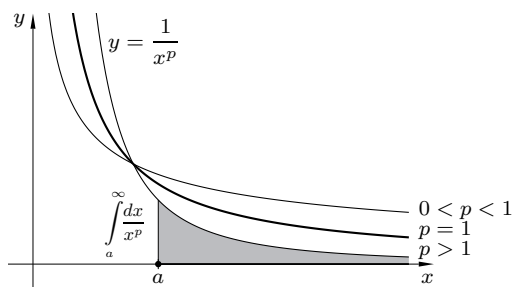
Ćwiczenie 1.4. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}; & \text{(b)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \, dx}{x^2 + 1}; & \text{(c)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{2x}}; & \text{(d)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}; \\ \text{(e)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \, dx; & \text{(f)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} e^x \sin x \, dx; & \text{(g)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + \sqrt{|x|}}; & \text{(h)} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} (3^x - 2^{-x}) \, dx. \end{aligned}$$

FAKT 1.5. (o zbieżności całek $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$)

Całka niewłaściwa $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ ($a > 0$) jest zbieżna dla $p > 1$ i rozbieżna do ∞ dla $0 < p \leq 1$.

Uwaga. Analogiczny fakt jest prawdziwy także dla całek niewłaściwych $\int_{-\infty}^b \frac{dx}{x^p}$ ($b < 0$), o ile funkcja podcałkowa jest poprawnie określona.



Rys. 1.4. Wykresy funkcji $y = \frac{1}{x^p}$ dla różnych wartości parametru $p > 0$

Ćwiczenie 1.6. Korzystając z powyższego faktu zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}; & \text{(b)} \quad & \int_8^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}; & \text{(c)} \quad & \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}; \end{aligned}$$

$$(d) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(\sqrt[3]{2x+5})^4}; \quad (e) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-2)^3}}; \quad (f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|+2}}.$$

Ćwiczenie 1.7. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_a^{\infty} \frac{dx}{p^x}$ ($a \in \mathbb{R}$) w zależności od parametru $p > 0$.

Ćwiczenie* 1.8. Funkcję *gamma*, która jest uogólnieniem silni, określamy wzorem

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad \text{gdzie } p > 0.$$

Obliczyć $\Gamma(1)$ i następnie pokazać, że $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ dla $p > 0$ oraz $\Gamma(n) = (n-1)!$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 1.9. (wartość główna całki niewłaściwej pierwszego rodzaju)

Wartość główną całki niewłaściwej pierwszego rodzaju funkcji f na $(-\infty, \infty)$ definiujemy wzorem

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(x) dx.$$

Jeżeli granica po prawej stronie równości nie istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa nie ma wartości głównej.

Uwaga. Jeżeli całka niewłaściwa na $(-\infty, \infty)$ jest zbieżna do w , to wartość główna całki także się równa w . Z drugiej strony całka rozbieżna może mieć wartość główną.

Ćwiczenie 1.10. Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}; \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}} dx; \quad (c) \int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx; \quad (d) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx.$$

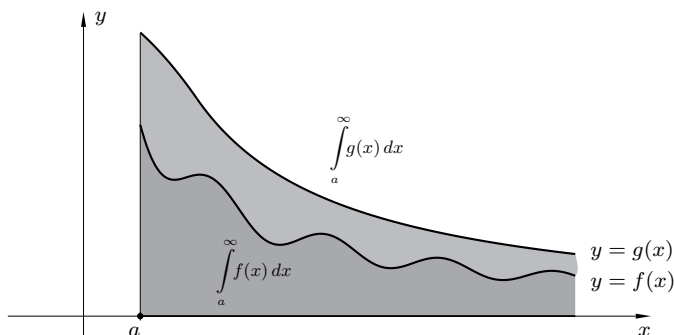
2 Kryteria zbieżności całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

TWIERDZENIE 2.1. (kryterium porównawcze zbieżności/rozbieżności całek)

Niech funkcje f i g spełniają dla każdego $x \in [a, \infty)$ nierówności $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Wówczas:

(a) jeżeli całka $\int_a^{\infty} g(x) dx$ jest zbieżna, to całka $\int_a^{\infty} f(x) dx$ także jest zbieżna;

(b) jeżeli całka $\int_a^\infty f(x) dx$ jest rozbieżna do ∞ , to całka $\int_a^\infty g(x) dx$ także jest rozbieżna do ∞ .



Rys. 2.1. Ilustracja kryterium porównawczego zbieżności całek niewłaściwych

Uwaga. Twierdzenie pozostanie prawdziwe, gdy nierówności w założeniu są spełnione dla każdego $x \in [a^*, \infty)$, gdzie $a^* > a$. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla funkcji niedodatnich f i g . Ponadto prawdziwe są podobne twierdzenia dla całek niewłaściwych na półprostej $(-\infty, b]$.

Ćwiczenie 2.2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

(a) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}};$

(b) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + x};$

(c) $\int_4^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{x + 1};$

(d) $\int_{-\infty}^0 \frac{\arctg x^2 dx}{x^2 + 1};$

(e) $\int_{2\pi}^\infty \frac{(2 + \sin x) dx}{\sqrt{x}};$

(f) $\int_{2\pi}^\infty \frac{(x + \sin x) dx}{x^2 - 1};$

(g*) $\int_{-\infty}^1 e^{-x^2} dx;$

(h*) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{4^x dx}{x + 1};$

(i*) $\int_\pi^\infty \frac{dx}{\cos x - \sqrt{3}}.$

TWIERDZENIE 2.3. (kryterium ilorazowe zbieżności/rozbieżności całek)

Niech funkcje f i g będą dodatnie (ujemne) na półprostej $[a, \infty)$ oraz niech spełniają warunek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \text{ gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas całki $\int_a^\infty f(x) dx$, $\int_a^\infty g(x) dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do ∞ ($-\infty$).

Uwaga. Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia dla całek niewłaściwych na półprostej $(-\infty, b]$.

Ćwiczenie 2.4. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

$$(a) \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 1}};$$

$$(b) \int_3^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^6 - 10x}};$$

$$(c) \int_1^{\infty} \frac{e^x dx}{x(e^x - 1)};$$

$$(d) \int_{-\infty}^{-\pi} \frac{x dx}{x^3 + \sin x};$$

$$(e) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - x}};$$

$$(f) \int_{-\infty}^{-\pi} e^x \cos \frac{1}{x} dx;$$

$$(g^*) \int_1^{\infty} \frac{(x+1)^x dx}{x^{x+2}};$$

$$(h^*) \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+3^{-x}) dx}{\ln(1+2^{-x})};$$

$$(i^*) \int_{-\infty}^0 \frac{e^{3x} dx}{e^x + 1}.$$

3 Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

Definicja 3.1. (zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju)

Mówimy, że całka niewłaściwa pierwszego rodzaju funkcji f jest *zbieżna bezwzględnie*, gdy całka niewłaściwa funkcji $|f|$ jest zbieżna.

Ćwiczenie 3.2. Zbadać zbieżność bezwzględną całek niewłaściwych:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{\sin 2x dx}{x^2 + 1};$$

$$(b) \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx;$$

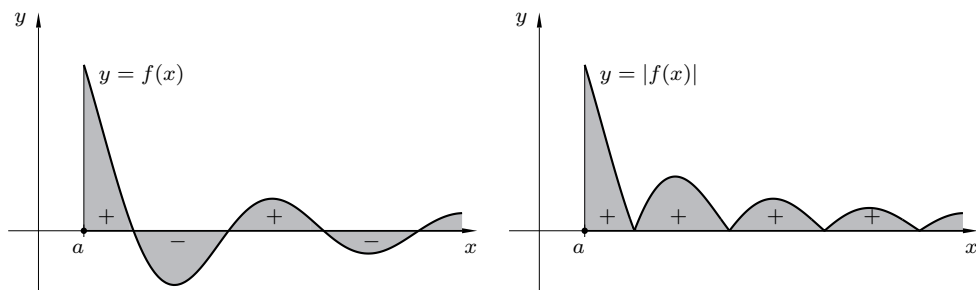
$$(c) \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^3};$$

$$(d^*) \int_{10}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor} dx}{x}.$$

TWIERDZENIE 3.3. (o zbieżności całek zbieżnych bezwzględnie)

Jeżeli całka niewłaściwa jest zbieżna bezwzględnie, to jest zbieżna. Ponadto

$$\left| \int_a^{\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{\infty} |f(x)| dx.$$



Rys. 3.1. Ilustracja twierdzenia o zbieżności całek niewłaściwych zbieżnych bezwzględnie

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla pozostałych rodzajów całek niewłaściwych pierwszego rodzaju. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Np. całka niewłaściwa funkcji $f(x) = (\sin x)/x$ na przedziale $[\pi, \infty)$ jest zbieżna, ale nie jest zbieżna bezwzględnie.

Ćwiczenie 3.4. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną całek niewłaściwych:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^{\infty} x \sin x \, dx; & \text{(b)} \int_1^{\infty} \frac{\cos 2x \, dx}{e^x + 1}; & \text{(c)} \int_2^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{(x^2 + 4)^2}; \\
 \text{(d)} \int_0^{\infty} \frac{2^x \sin x \, dx}{5^x + 3^x \cos x}; & \text{(e)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x} \sin x \, dx}{2 + \cos x}; & \text{(f)} \int_1^{\infty} \frac{(\sin x + \cos x) \, dx}{(x^2 + 9)^2}; \\
 \text{(g}^*) \int_1^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \, dx}{x}; & \text{(h}^*) \int_{-\infty}^0 e^x \sin^5 x \, dx; & \text{(i}^*) \int_0^{\infty} \sin x^2 \, dx.
 \end{array}$$

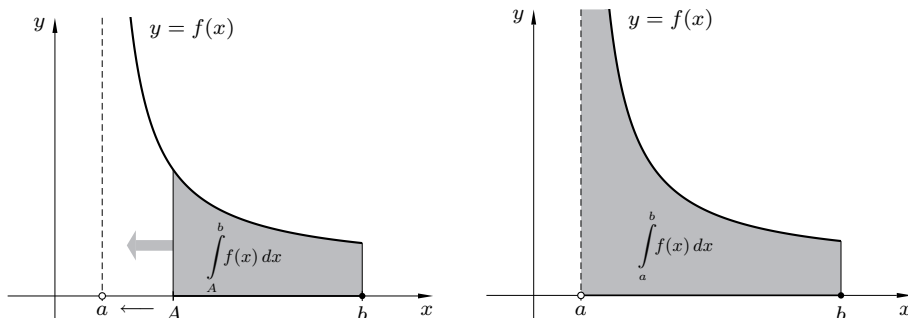
4 Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

Definicja 4.1. (całka z funkcji nieograniczonej)

Niech funkcja f określona na przedziale $(a, b]$ będzie nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a . Całkę funkcji f na przedziale $(a, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{A \rightarrow a^+} \int_A^b f(x) \, dx.$$

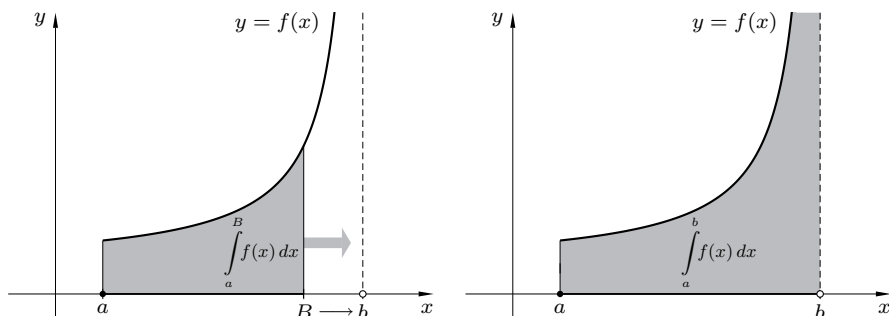
Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka jest *zbieżna*. Jeżeli granica jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest *rozbieżna* odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest *rozbieżna*.



Rys. 4.1. Ilustracja całki z funkcji nieograniczonej na $(a, b]$

Analogicznie definiuje się całkę funkcji f określonej na przedziale $[a, b)$ i nieograniczonej tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow b^-} \int_a^B f(x) dx.$$



Rys. 4.2. Ilustracja całki z funkcji nieograniczonej na $[a, b)$

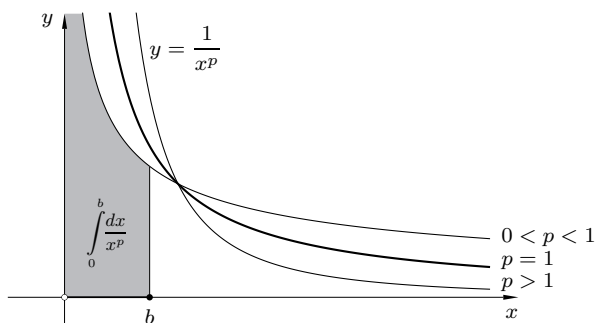
Uwaga. Jeżeli funkcja f jest nieujemna na przedziale $(a, b]$ albo $[a, b)$, to całka $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna albo rozbieżna do ∞ . Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale $(a, b]$, to całka $\int_a^b f(x) dx$ wyznaczona według powyższej definicji jest zbieżna i jej wartość pokrywa się ze zwykłą całką oznaczoną obliczoną z definicji (wartość $f(a)$ przyjmujemy dowolnie). Np. całka $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} dx$ jest zbieżna. Podobnie jest dla funkcji określonej na przedziale $[a, b)$.

Ćwiczenie 4.2. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

- (a) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; (b) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^2}$; (c) $\int_0^e \ln x dx$; (d) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$;
 (e) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$; (g) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$; (h) $\int_1^2 \frac{(x-2) dx}{\sqrt{x-1}}$.

FAKT 4.3. (o zbieżności całek $\int_0^b \frac{dx}{x^p}$)

Całka $\int_0^b \frac{dx}{x^p}$ ($b > 0$) jest zbieżna dla $0 < p < 1$ i rozbieżna do ∞ dla $p \geq 1$.



Rys. 4.3. Wykresy funkcji $y = \frac{1}{x^p}$ dla różnych wartości parametru $p > 0$

Uwaga. Analogiczny fakt jest prawdziwy także dla całek $\int_a^0 \frac{dx}{x^p}$ ($a < 0$), o ile funkcja podcałkowa jest poprawnie określona.

Ćwiczenie 4.4. Korzystając z powyższego faktu zbadać zbieżność całek:

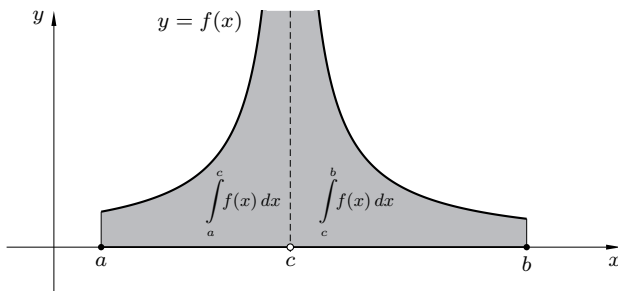
(a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^4}$; (b) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{x+3}}$; (c) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-1)^4}}$; (d) $\int_3^4 \frac{dx}{(4-x)^3}$.

Definicja 4.5. (całki z funkcji nieograniczonych, ciąg dalszy)

Niech funkcja f określona na zbiorze $[a, c) \cup (c, b]$ będzie nieograniczona tylko na obu jednostronnych sąsiedztwach punktu c . Całkę funkcji f na $[a, c) \cup (c, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Jeżeli obie całki po prawej stronie znaku równości są zbieżne, to mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli jedna z tych całek jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ , a druga jest zbieżna albo rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub ∞ , to mówimy, że całka jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ . W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna.

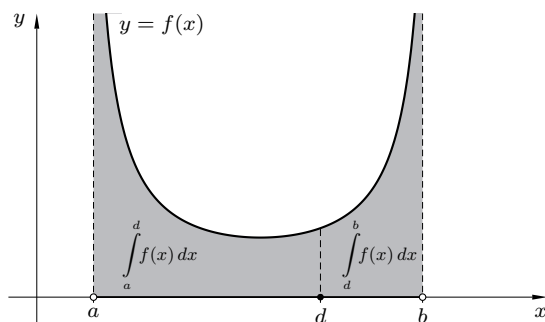


Rys. 4.4. Ilustracja definicji całki z funkcji nieograniczonej na $[a, c) \cup (c, b]$

Uwaga. Podobnie określa się całki funkcji nieograniczonych tylko na sąsiedztwach obu-stronnych lub jednostronnych punktów $c_1, c_2, \dots, c_n \in [a, b]$. Na przykład dla funkcji f określonej na przedziale (a, b) i nieograniczonej tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a i na lewostronnym sąsiedztwie punktu b przyjmujemy:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx,$$

gdzie d jest dowolnym punktem przedziału (a, b) . Jeżeli całka jest zbieżna dla pewnego d , to jest zbieżna dla dowolnego $d \in (a, b)$ i jej wartość nie zależy od d . Całki zdefiniowane w tym paragrafie nazywamy *całkami niewłaściwymi drugiego rodzaju*.



Rys. 4.5. Ilustracja całki funkcji nieograniczonej na (a, b)

Ćwiczenie 4.6. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

- (a) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2}$; (b) $\int_{-8}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; (c) $\int_0^2 \frac{dx}{x(x-1)}$; (d) $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2 x}$;
 (e) $\int_{-1}^1 \frac{\arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (f) $\int_{-2}^2 \frac{x dx}{\sqrt[4]{4-x^2}}$; (g) $\int_{-\pi}^0 \frac{dx}{\cos x}$; (h*) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Definicja 4.7. (wartość główna całki niewłaściwej drugiego rodzaju)

Wartość główną całki niewłaściwej drugiego rodzaju z funkcji f określonej na $[a, b] \setminus \{c\}$ i nieograniczonej jedynie na obu jednostronnych sąsiedztwach punktu c definiujemy wzorem:

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right].$$

Jeżeli granica po prawej stronie równości nie istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa nie ma wartości głównej.

Uwaga. Jeżeli całka niewłaściwa z funkcji f określonej na $[a, b] \setminus \{c\}$ jest zbieżna do w , to wartość główna całki także się równa w .

Ćwiczenie 4.8. Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

$$(a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}; \quad (b) \int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}; \quad (c) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x^4} dx; \quad (d) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

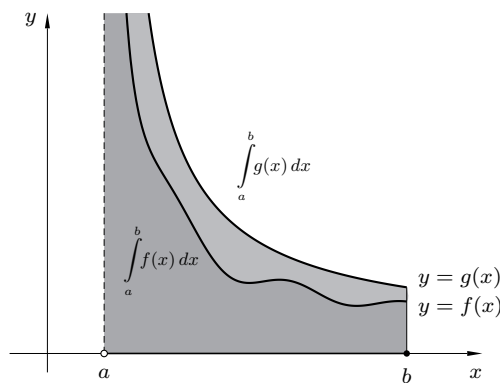
5 Kryteria zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju

TWIERDZENIE 5.1. (kryterium porównawcze zbieżności/rozbieżności całek)

Niech funkcje f i g będą określone na przedziale $(a, b]$ i nieograniczone tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a oraz niech dla każdego $x \in (a, b]$ spełniają nierówności $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Wówczas:

(a) jeżeli całka $\int_a^b g(x) dx$ jest zbieżna, to także całka $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna;

(b) jeżeli całka $\int_a^b f(x) dx$ jest rozbieżna do ∞ , to także całka $\int_a^b g(x) dx$ jest rozbieżna do ∞ .



Rys. 5.1. Ilustracja kryterium porównawczego zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju

Uwaga. Twierdzenie powyższe pozostanie prawdziwe, gdy nierówności w założeniu są spełnione dla każdego $x \in (a, b^*)$ ($a < b^* < b$). Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie dla funkcji określonych na przedziale $[a, b)$ i nieograniczonych tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu b . Wszystkie warianty tego twierdzenia można stosować także dla funkcji niedodatnich.

Ćwiczenie 5.2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

$$(a) \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{x}}; \quad (b) \int_0^1 \frac{(x+1) dx}{\sin^2 x}; \quad (c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{2x-\pi}}; \quad (d^*) \int_0^2 \frac{\sin x dx}{x^3}.$$

TWIERDZENIE 5.3. (kryterium ilorazowe zbieżności/rozbieżności całek)

Niech funkcje f i g będą dodatnie (ujemne) na przedziale $(a, b]$ i nieograniczone tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu a . Ponadto niech spełniają warunek

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \text{ gdzie } 0 < k < \infty.$$

Wówczas całki

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b g(x) dx$$

są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do ∞ ($-\infty$).

Uwaga. Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia dla całek niewłaściwych na przedziale $[a, b)$. Przy wyborze funkcji g warto pamiętać, że dla x bliskich 0 prawdziwe są zależności:

$$\sin x \sim x^1; \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}; \quad a^x \sim 1 + x \ln a \quad (a > 0); \quad \ln(1+x) \sim x.$$

Ćwiczenie 5.4. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{x^3}}; \quad (b) \int_0^8 \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x}}; \quad (c) \int_{-1}^0 \frac{(e^x - 1) dx}{x^2}; \quad (d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}};$$

$$(e) \int_2^3 \frac{\sqrt{x-2} dx}{x^3 - 8}; \quad (f) \int_0^2 \frac{dx}{\ln(1+x)}; \quad (g) \int_1^4 \frac{dx}{x - \sqrt{x}}; \quad (h^*) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}.$$

Ćwiczenie* 5.5. Przyjmując odpowiednie definicje zbadać zbieżność całek niewłaściwych, które są jednocześnie całkami pierwszego i drugiego rodzaju:

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{1+x}; \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{1+x^2}; \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{xe^x}; \quad (d) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln x};$$

$$(e) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}; \quad (f^*) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}; \quad (g^*) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - \sqrt{x}}; \quad (h^*) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

¹Symbol $f(x) \sim g(x)$ dla x bliskich 0 oznacza, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Ćwiczenie 5.6. *(przykłady z geometrii i fizyki)*

- (a) Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru ograniczonego prostymi $x = 1$, $x \geq 1$, $y = 0$ i wykresem funkcji $y = 1/x$.
- (b) Obliczyć pracę W , jaką należy wykonać, aby ciało o masie $m = 100$ kg przenieść z powierzchni Ziemi do nieskończoności. Zaniedbać opór powietrza. Przyjąć promień Ziemi $R = 6380$ km oraz przyspieszenie na poziomie morza $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$.
- (c) Obliczyć współrzędne (x_C, y_C) środka masy jednorodnego obszaru ograniczonego prostymi $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ i wykresem funkcji $y = 1/\sqrt[3]{x}$.
- (d) Obliczyć siłę, z jaką jednorodnie naładowana półprosta przyciąga ładunek $Q = 4$ C położony na przedłużeniu półprostej, w odległości $d = 1$ m od jej końca. Gęstość liniowa ładunku jest równa $\lambda_0 = 1 \text{ C/m}$ pręta.
- (e*) Obliczyć siłę, z jaką jednorodny nieskończony prostoliniowy pręt o gęstości λ_0 przyciąga masę m umieszczoną w odległości r od niego.
-