# ANALIZA
# MATEMATYCZNA
# 1

Marian Gewert   Zbigniew Skoczylas

# ANALIZA MATEMATYCZNA 1

## Przykłady i zadania

Wydanie dwudzieste siódme uzupełnione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2020

*Marian Gewert*
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

*Zbigniew Skoczylas*
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

*Projekt okładki:*
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej



Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–62780–72–3

Wydanie XXVII uzupełnione, Wrocław 2020
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Sp. z o.o., Sp. Kom.

# Spis treści

# Wstęp

Zestaw podręczników do Analizy matematycznej 1 składa się z trzech części. Pierwszą z nich jest książka *„Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory”*, drugą – niniejszy zbiór zadań, a ostatnią – opracowanie *„Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy.* Książki są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać również studenci wydziałów nauk ścisłych i przyrodniczych uniwersytetów, a także uczelni ekonomicznych, pedagogicznych, rolniczych oraz wojskowych.

Zbiór zawiera przykładowe zadania z rozwiązaniami przedstawionymi ”krok po kroku” oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Bezpośrednio za zadaniami podano wskazówki do rozwiązań i odpowiedzi. Przykłady i zadania obejmują rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej wraz z zastosowaniami. Materiał teoretyczny, którego znajomość jest potrzebna do rozwiązywania zadań, można znaleźć w pierwszej części zestawu. Zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze i kierowane do ambitnych studentów. Więcej trudnych i nietypowych zadań Czytelnik znajdzie w książce *„Studencki konkurs matematyczny”*. Przykłady i zadania z tego zbioru są podobnych typów oraz mają zbliżony stopień trudności do zadań, które studenci zwykle rozwiązują na kolokwiach i egzaminach. Zadania ze sprawdzianów przeprowadzonych w poprzednich latach w Politechnice Wrocławskiej zawiera trzecia część zestawu.

Uzupełnieniem zestawu podręczników do Analizy matematycznej 1 jest książka pt. *„Przykłady i kontrprzykłady w analizie”*. Publikacja ta przeznaczona dla ambitnych studentów zawiera m.in. przykłady ciągów, funkcji, granic, szeregów, całek itp. o nieoczekiwanych własnościach oraz kontrprzykłady świadczące, że założeń klasycznych twierdzeń nie da się osłabić.

Do obecnego wydanie dołączono kilkanaście nowych przykładów, zadań i rysunków. Ponadto poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o zbiorze.

*Marian Gewert* *Zbigniew Skoczylas*

# 1. Funkcje

## 1.1. Podstawowe określenia

**Przykład 1.1.** Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji:

**(a)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-4}$; **(b)** $g(x) = \sqrt{16-x^4}$; **(c)** $h(x) = \dfrac{1}{\log\left(2x^2-x\right)}$;

**(d)** $p(x) = \log_3 |\cos x|$; **(e)** $q(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}}$; **(f)** $r(x) = \operatorname{tg}\left[\pi\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]$.

**Rozwiązanie.** Dziedziną naturalną funkcji określonej wzorem $f(x)$ nazywamy zbiór $D_f$ liczb rzeczywistych $x$, dla których można obliczyć $f(x)$.

**(a)** Dziedzina funkcji $f$ jest określona przez warunki $x \geqslant 0$ oraz $x^2-4 \neq 0$. Zatem $D_f = [0,2) \cup (2,\infty)$.

**(b)** Dziedzina funkcji $g$ jest określona przez warunek $16 - x^4 \geqslant 0$. Mamy

$$16 - x^4 = \left(4-x^2\right)\left(4+x^2\right) = (2-x)(2+x)\left(4+x^2\right).$$

Ponieważ $4+x^2 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc nierówność $16-x^4 \geqslant 0$ jest równoważna nierówności $(2-x)(2+x) \geqslant 0$. Rozwiązaniem tej nierówności jest $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Zatem $D_g = [-2,2]$.

**(c)** Dziedzina funkcji $h$ jest określona przez warunki $2x^2 - x > 0$ oraz $\log\left(2x^2-x\right) \neq 0$. Warunki te są równoważne następującym $2x\,(x-1/2) > 0$ oraz $2x^2-x \neq 1$. Drugi warunek można zapisać w postaci

$$2x^2 - x - 1 \neq 0 \iff 2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right) \neq 0.$$

Po rozwiązaniu nierówności otrzymamy

$$D_h = \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},0\right) \cup \left(\frac{1}{2},1\right) \cup (1,\infty).$$

**(d)** Dziedzina funkcji $p(x) = \log_3|\cos x|$ jest zbiorem rozwiązań nierówności $|\cos x| > 0$, która jest równoważna warunkowi $\cos x \neq 0$. Zatem $D_p = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + n\pi :\ n \in \mathbb{Z}\}$.

**(e)** Warunek określający dziedzinę funkcji $q$ ma postać

$$(x+1)(x-2) \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{x}{(x+1)(x-2)} \geqslant 0.$$

Rozwiązaniem tego układu nierówności jest zbiór $(-1,0] \cup (2,\infty)$. Zatem $D_q = (-1,0] \cup$

$(2, \infty)$.

**(f)** Funkcja $\operatorname{tg} u$ jest określona dla $u \neq \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Zatem funkcja $r$ jest określona dla $\pi(x + 1/2) \neq \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Stąd otrzymamy $x \neq k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Dziedzina funkcji $r$ ma postać $D_r = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

**Zadanie 1.1.** Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji:

**(a)** $f(x) = \sqrt{\sin x}$; **(b)** $g(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x}$; **(c)** $h(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$;

**(d)** $p(x) = \log_3(2 - |x|)$; **(e)** $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; **(f)** $r(x) = \dfrac{2^x}{2^x - 4}$.

**Odpowiedzi.** **(a)** $D_f = \ldots \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \ldots$; **(b)** $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; **(c)** $D_h = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; **(d)** $D_p = (-2, 2)$; **(e)** $D_q = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; **(f)** $D_r = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

## 1.2. Funkcje monotoniczne

**Przykład 1.2.** Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

**(a)** $f(x) = \dfrac{x}{5} - 3$, $\mathbb{R}$; **(b)** $g(x) = \sqrt{-2 - x}$, $(-\infty, -2]$;

**(c)** $q(x) = x^4 + x^2 + 1$, $(-\infty, 0]$; **(d)** $r(x) = x + \dfrac{4}{x}$, $[2, \infty)$.

**Rozwiązanie.** Funkcja $f$ jest rosnąca (niemalejąca) na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla dowolnych punktów $x_1$, $x_2$ z tego zbioru z warunku $x_1 < x_2$ wynika nierówność

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) \leqslant f(x_2)).$$

Podobnie określa się funkcję malejącą oraz nierosnącą. Funkcja jest monotoniczna na zbiorze, gdy jest rosnąca, niemalejąca, malejąca lub nierosnąca na tym zbiorze.

**(a)** Pokażemy, że funkcja $f(x) = x/5 - 3$ jest rosnąca na $\mathbb{R}$. Niech $x_1, x_2$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi nierówność $x_1 < x_2$. Wtedy

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\frac{x_2}{5} - 3\right) - \left(\frac{x_1}{5} - 3\right) = \frac{x_2 - x_1}{5}.$$

Ponieważ licznik otrzymanego wyrażenia jest dodatni, więc $f(x_2) - f(x_1) > 0$. To oznacza, że funkcja $f$ jest rosnąca.

**(b)** Pokażemy, że funkcja $g(x) = \sqrt{-2 - x}$ jest malejąca na przedziale $(-\infty, -2]$. Niech $x_1, x_2$ będą dowolnymi liczbami spełniającymi nierówność $x_1 < x_2 \leqslant -2$. Wtedy

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= \sqrt{-2 - x_2} - \sqrt{-2 - x_1} \\ &= \frac{\left(\sqrt{-2 - x_2} - \sqrt{-2 - x_1}\right)\left(\sqrt{-2 - x_2} + \sqrt{-2 - x_1}\right)}{\sqrt{-2 - x_2} + \sqrt{-2 - x_1}} \\ &= \frac{(-2 - x_2) - (-2 - x_1)}{\sqrt{-2 - x_2} + \sqrt{-2 - x_1}} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{-2 - x_2} + \sqrt{-2 - x_1}}. \end{aligned}$$

Ponieważ licznik otrzymanego wyrażenia jest ujemny a mianownik dodatni, więc $g(x_2) - g(x_1) < 0$. To oznacza, że funkcja $g$ jest malejąca na przedziale $(-\infty, -2]$.

**(c)** Pokażemy, że funkcja $q(x) = x^4 + x^2 + 1$ jest malejąca na przedziale $(-\infty, 0]$. Niech $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ oraz $x_1 < x_2$. Wtedy

$$\begin{aligned} q(x_2) - q(x_1) &= \left(x_2^4 - x_1^4\right) + \left(x_2^2 - x_1^2\right) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)\left(x_2^2 + x_1^2\right) + (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)\left(x_2^2 + x_1^2 + 1\right). \end{aligned}$$

Ponieważ dla dowolnych $x_1$, $x_2 \in (-\infty, 0)$ czynniki pierwszy i trzeci są dodatnie, a drugi ujemny, więc $q(x_2) - q(x_1) < 0$. To oznacza, że funkcja $q$ jest malejąca na rozważanym przedziale.

**(d)** Pokażemy, że funkcja $r(x) = x + 4/x$ jest rosnąca na przedziale $[2, \infty)$. Niech $x_1$, $x_2$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $2 \leqslant x_1 < x_2$. Wtedy

$$r(x_2) - r(x_1) = \left(x_2 + \frac{4}{x_2}\right) - \left(x_1 + \frac{4}{x_1}\right) = (x_2 - x_1) + \frac{4(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 4)}{x_1 x_2}.$$

Ponieważ $x_2 > x_1$ oraz $x_1 x_2 > 2^2 = 4$, więc $x_2 - x_1 > 0$ oraz $x_1 x_2 - 4 > 0$. Zatem $r(x_2) - r(x_1) > 0$. To oznacza, że funkcja $r$ jest rosnąca na przedziale $[2, \infty)$.

**Zadanie 1.2.** Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

**(a)** $f(x) = -4x + 5$, $\mathbb{R}$; **(b)** $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $\mathbb{R}$; **(c)** $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $(-\infty, 0)$;

**(d)** $p(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, $[1, \infty)$; **(e)** $q(x) = 4x - x^2$, $[2, \infty)$; **(f)** $r(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, $[1, \infty)$.

## 1.3. Złożenia funkcji

**Przykład 1.3.** Napisać wzory funkcji złożonych $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:

**(a)** $f(x) = x^2, \quad g(x) = 2^x$; **(b)** $f(x) = 2 + \cos x, \quad g(x) = \sqrt{x}$;

**(c)** $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$; **(d)** $f(x) = -x, \quad g(x) = \log x$.

**Rozwiązanie.** Złożeniem funkcji $f$ i $g$ nazywamy funkcję $g \circ f$ określoną wzorem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Gdy znamy tylko wzory określające funkcje $f$ i $g$, to za dziedzinę naturalną złożenia $g \circ f$ przyjmujemy zbiór $\{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$. Mamy kolejno:

**(a)**
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(x^2\right) = \left(x^2\right)^2 = x^4, \quad D_{f \circ f} = \mathbb{R};$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x}, \quad D_{f \circ g} = \mathbb{R};$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^2\right) = 2^{\left(x^2\right)} = 2^{x^2}, \quad D_{g \circ f} = \mathbb{R};$$
$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(2^x) = 2^{(2^x)} = 2^{2^x}, \quad D_{g \circ g} = \mathbb{R}.$$

**(b)** $(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=f\left(2+\cos x\right)=2+\cos(2+\cos x),\quad D_{f\circ f}=\mathbb{R};$

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\sqrt{x}\right)=2+\cos\sqrt{x},\quad D_{f\circ g}=[0,\infty);$$

$$(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(2+\cos x\right)=\sqrt{2+\cos x},\quad D_{g\circ f}=\mathbb{R};$$

$$(g\circ g)(x)=g\left(g(x)\right)=g\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x},\quad D_{g\circ g}=[0,\infty).$$

**(c)** $(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x,\quad D_{f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{0\};$

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x^2}}=x^2,\quad D_{f\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{0\};$$

$$(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}=x^2,\quad D_{g\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{0\};$$

$$(g\circ g)(x)=g\left(g(x)\right)=g\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}=x^4,\quad D_{g\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

**(d)** $(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=f\left(-x\right)=-(-x)=x,\quad D_{f\circ f}=\mathbb{R};$

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\log x\right)=-\left(\log x\right)=-\log x,\quad D_{f\circ g}=(0,\infty);$$

$$(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(-x\right)=\log(-x),\quad D_{g\circ f}=(-\infty,0);$$

$$(g\circ g)(x)=g\left(g(x)\right)=g\left(\log x\right)=\log\left(\log x\right),\quad D_{g\circ g}=(1,\infty).$$

**Zadanie 1.3.** Napisać wzory funkcji złożonych $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:

**(a)** $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad g(x)=x^2;$ **(b)** $f(x)=\log_2 x,\quad g(x)=2^x;$

**(c)** $f(x)=\sqrt{x},\quad g(x)=x^4;$ **(d)** $f(x)=\sin x,\quad g(x)=\dfrac{1}{x}.$

**Odpowiedzi.** **(a)** $(f\circ f)(x)=x$ dla $x\neq 0$, $(f\circ g)(x)=1/x^2$ dla $x\neq 0$, $(g\circ f)(x)=1/x^2$ dla $x\neq 0$, $(g\circ g)(x)=x^4$ dla $x\in\mathbb{R}$; **(b)** $(f\circ f)(x)=\log_2\left(\log_2 x\right)$ dla $x>1$, $(f\circ g)(x)=x$ dla $x\in\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=x$ dla $x>0$, $(g\circ g)(x)=2^{2^x}$ dla $x\in\mathbb{R}$; **(c)** $(f\circ f)(x)=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$ dla $x\geqslant 0$, $(f\circ g)(x)=\sqrt{x^4}=x^2$ dla $x\in\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=\left(\sqrt{x}\right)^4=x^2$ dla $x\geqslant 0$, $(g\circ g)(x)=\left(x^4\right)^4=x^{16}$ dla $x\in\mathbb{R}$; **(d)** $(f\circ f)(x)=\sin(\sin x)$ dla $x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=\sin(1/x)$ dla $x\neq 0$, $(g\circ f)(x)=1/\sin x$ dla $x\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, $(g\circ g)(x)=x$ dla $x\neq 0$.

## 1.4. Funkcje odwrotne

**Przykład 1.4.** Uzasadnić z definicji, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

**(a)** $f(x)=x^2,\quad(-\infty,0];$ **(b)** $g(x)=x^3,\quad\mathbb{R};$ **(c)** $h(x)=\dfrac{x+2}{x},\quad\mathbb{R}\setminus\{0\}.$

**Rozwiązanie.** Funkcja $f$ jest różnowartościowa na zbiorze $A\subset D_f$, gdy dla dowolnych punktów $x_1$, $x_2$ z tego zbioru z warunku $x_1\neq x_2$ wynika, że $f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)$. Jednak przy badaniu różnowartościowości funkcji wygodnie jest korzystać z równoważnej definicji: funkcja $f$ jest różnowartościowa na zbiorze $A$, jeżeli dla dowolnych $x_1$, $x_2$ z warunku $f(x_1) = f(x_2)$ wynika, że $x_1 = x_2$.

**(a)** Mamy pokazać, że dla dowolnych $x_1$, $x_2 \leqslant 0$ z warunku $x_1^2 = x_2^2$ wynika, iż $x_1 = x_2$. Niech liczby $x_1, x_2 \leqslant 0$ będą dowolne. Wtedy

$$x_1^2 = x_2^2 \iff x_1^2 - x_2^2 = 0 \iff (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Zatem $x_1 - x_2 = 0$ lub $x_1 + x_2 = 0$. Z pierwszej równości wynika, że $x_1 = x_2$. Z kolei z drugiej równości, w połączeniu z warunkiem $x_1$, $x_2 \leqslant 0$, wynika, że $x_1 = x_2 = 0$. Zatem w obu przypadkach $x_1 = x_2$. To oznacza, że funkcja $f(x) = x^2$ jest różnowartościowa na przedziale $(-\infty, 0]$.

**(b)** Mamy pokazać, że dla dowolnych $x_1$, $x_2 \in \mathbb{R}$ z warunku $x_1^3 = x_2^3$ wynika, iż $x_1 = x_2$. Niech $x_1, x_2$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy

$$x_1^3 = x_2^3 \iff x_1^3 - x_2^3 = 0 \iff (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) = 0.$$

Zatem $x_1 - x_2 = 0$ lub $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$. Z pierwszej równości wynika, że $x_1 = x_2$. Drugą równość można przekształcić do równoważnej postaci

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right)^2 = 0.$$

Ponieważ oba składniki w równości są nieujemne, więc ich suma może być równa 0 tylko wtedy, gdy $x_1 + (x_2/2) = 0$ oraz $\sqrt{3}x_2/2 = 0$, czyli gdy $x_1 = 0$ oraz $x_2 = 0$. W obu przypadkach otrzymaliśmy $x_1 = x_2$, zatem funkcja $g(x) = x^3$ jest różnowartościowa na $\mathbb{R}$.

**(c)** Mamy pokazać, że dla dowolnych $x_1$, $x_2 \neq 0$ z warunku $(x_1 + 2)/x_1 = (x_2 + 2)/x_2$ wynika, iż $x_1 = x_2$. Niech liczby $x_1, x_2 \neq 0$ będą dowolne. Wtedy

$$\frac{x_1 + 2}{x_1} = \frac{x_2 + 2}{x_2} \iff (x_1 + 2)\,x_2 = (x_2 + 2)\,x_1 \iff 2x_1 = 2x_2 \iff x_1 = x_2.$$

Zatem funkcja $h(x) = (x + 2)/x$ jest różnowartościowa na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

**Zadanie 1.4.** Uzasadnić z definicji, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

**(a)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; **(b)** $g(x) = x^4$, $[0, \infty)$;

**(c)** $h(x) = \sqrt{x} - 3$, $[0, \infty)$; **(d)** $p(x) = x - \sqrt{x}$, $[1/4, \infty)$.

**Przykład 1.5.** Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

**(a)** $h(x) = \dfrac{2x}{x-3}$; **(b)** $p(x) = 1 - \sqrt{x-4}$; **(c)** $f(x) = 2 - \log_5 x$; **(d)** $g(x) = \dfrac{1}{2^x + 4}$.

**Rozwiązanie.** Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa. Funkcją odwrotną do $f$ nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ określoną warunkiem

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x),$$

gdzie $x \in X$ oraz $y \in Y$. W szczególności funkcja ściśle monotoniczna ma funkcję odwrotną, gdyż jest różnowartościowa.

**(a)** Mamy

$$y = h(x) = \frac{2x}{x-3} = 2 + \frac{6}{x-3}.$$

Zatem dziedziną funkcji $h$ jest $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a zbiorem wartości $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Funkcja odwrotna do $h$ istnieje, bo funkcja $6/(x-3)$ jest malejąca na przedziałach $(-\infty, 3)$, $(3, \infty)$. Z równości $y = 2 + 6/(x-3)$ mamy kolejno

$$y - 2 = \frac{6}{x-3}, \quad x - 3 = \frac{6}{y-2}, \quad x = 3 + \frac{6}{y-2} = \frac{3y}{y-2}.$$

Zatem

$$x = h^{-1}(y) = \frac{3y}{y-2}, \quad \text{gdzie } y \neq 2.$$

**(b)** Dziedziną funkcji $p(x) = 1 - \sqrt{x-4}$ jest przedział $[4, \infty)$, a zbiorem wartości przedział $(-\infty, 1]$. Funkcja odwrotna do $p$ istnieje, bo funkcja jest malejąca. Z równości $y = 1 - \sqrt{x-4}$ wynika, że $x = (y-1)^2 + 4$. Zatem

$$x = p^{-1}(y) = (y-1)^2 + 4, \text{ gdzie } y \in (-\infty, 1].$$

**(c)** Dziedziną funkcji $y = f(x) = 2 - \log_5 x$ jest przedział $(0, \infty)$, a zbiorem wartości $\mathbb{R}$. Funkcja odwrotna do $f$ istnieje, bo funkcja jest malejąca. Z równości $y = 2 - \log_5 x$ mamy $x = 5^{2-y}$. Stąd

$$x = f^{-1}(y) = 5^{2-y}, \quad \text{gdzie } y \in \mathbb{R}.$$

**(d)** Dziedziną funkcji $y = g(x) = 1/(2^x + 4)$ jest $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości przedział $(0, 1/4)$. Funkcja odwrotna $g^{-1}$ istnieje, gdyż funkcja $g$ jest malejąca. Z równości $y = 1/(2^x + 4)$ mamy $x = \log_2(1/y - 4)$. Stąd

$$x = g^{-1}(y) = \log_2\left(\frac{1}{y} - 4\right), \text{ gdzie } y \in \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

**Zadanie 1.5.** Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

**(a)** $f(x) = \dfrac{3x}{x+5}$; **(b)** $g(x) = x^5 + \sqrt{3}$; **(c)** $h(x) = 4 - \log_2(x+1)$;

**(d)** $p(x) = 3 - \sqrt[3]{x+2}$; **(e)** $q(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \leqslant 0$; **(f*)** $r(x) = 2^x - \dfrac{1}{2^x}$.

**Odpowiedzi.** **(a)** $f^{-1}(y) = 5y/(3-y)$, $y \neq 3$; **(b)** $g^{-1}(y) = \sqrt[5]{y - \sqrt{3}}$, $y \in \mathbb{R}$; **(c)** $h^{-1}(y) = 2^{4-y} - 1$, $y \in \mathbb{R}$; **(d)** $p^{-1}(y) = (3-y)^3 - 2$, $y \in \mathbb{R}$; **(e)** $q^{-1}(y) = -\sqrt{1/y - 1}$, $y \in (0, 1]$; **(f*)** $r^{-1}(y) = \ln \dfrac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}$, $y \in \mathbb{R}$.

## 1.5. Funkcje elementarne i inne

**Przykład 1.6*.** Naszkicować wykresy funkcji:

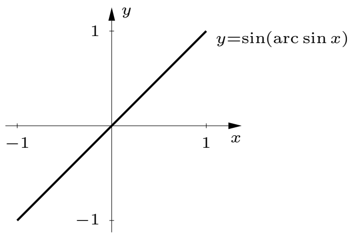
**(a)** $f(x) = \sin(\arcsin x)$; **(b)** $g(x) = \arcsin(\sin x)$.

**Rozwiązanie.**

**(a)** Dziedziną funkcji $f(x) = \sin(\arcsin x)$ jest przedział $[-1, 1]$. Dla $x \in [-1, 1]$ mamy

$$f(x) = \sin(\arcsin x) = x.$$

Równość ta wynika bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej. Wykres funkcji $f$ przedstawiono na rysunku.



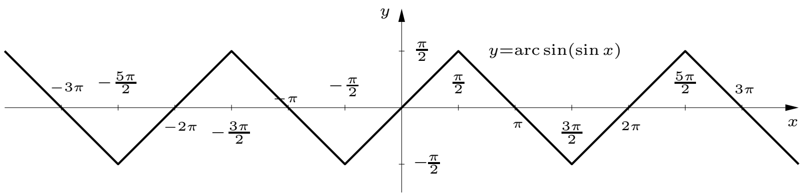

**(b)** Dziedziną funkcji $g(x) = \arcsin(\sin x)$ jest $\mathbb{R}$. Funkcja ta jest okresowa i ma okres $T = 2\pi$. Wykres funkcji $g$ wystarczy zatem sporządzić np. na przedziale $[-\pi/2, 3\pi/2]$ . Dla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ mamy $g(x) = x$. Równość ta wynika bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej. Dla $x \in (\pi/2, 3\pi/2]$ mamy $x = \pi + u$, gdzie $u \in (-\pi/2, \pi/2]$. Stąd

$$g(x) = \arcsin(\sin x) = \arcsin\left[\sin(\pi + u)\right] = \arcsin(-\sin u) = -\arcsin(\sin u) = -u = \pi - x.$$

Na przedziale $[-\pi/2, 3\pi/2]$ funkcja $g$ jest określona wzorem:

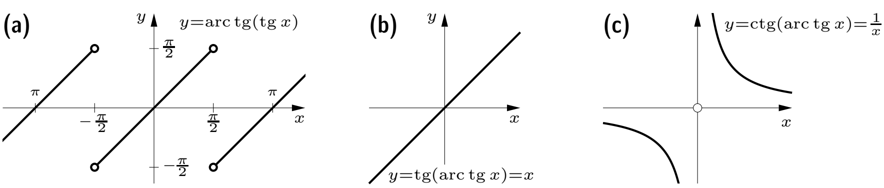
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]\,, \\ \pi - x & \text{dla} \quad x \in (\pi/2, 3\pi/2]\,. \end{cases}$$

Korzystając teraz z okresowości funkcji $g$ możemy sporządzić jej wykres na $\mathbb{R}$.




**Zadanie 1.6*.** Naszkicować wykresy funkcji:
**(a)** $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$; **(b)** $g(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)$; **(c)** $h(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x)$ .

**Odpowiedzi.**




**Przykład 1.7*.**

**(a)** Na parterze wielopiętrowego budynku z windą jest $m$ mieszkań, a na każdym piętrze jest po $r$ mieszkań. Znaleźć funkcję określającą numer przycisku w windzie, który trzeba nacisnąć, aby dojechać do piętra z mieszkaniem o numerze $n$. Narysować wykres tej funkcji dla $m = 4$ oraz $r = 3$.

**(b)** Podać wzór określający ilość cyfr liczby naturalnej $n$ w jej zapisie dwójkowym.

**(c)** Za wezwanie taxi pasażer płaci 6 zł, a za każde przejechane 500 m trasy 3 zł. Znaleźć funkcję wskazującą opłatę za przejazd taksówką $x$ metrów.

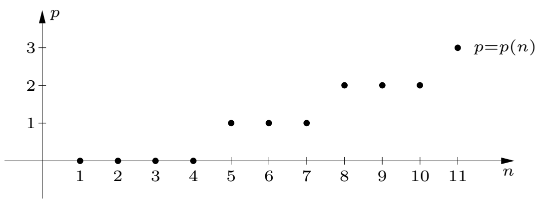
**Rozwiązanie.**
**(a)** Funkcja $p$ wskazująca numer piętra, na którym jest mieszkanie o numerze $n$, ma postać

$$p(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant m, \\ \left\lfloor \dfrac{n-m-1}{r} \right\rfloor + 1 & \text{dla } n > m, \end{cases}$$

gdzie $\lfloor u \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby $u$. Dla danych z zadania funkcja ta ma postać

$$p(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant 4, \\ \left\lfloor \frac{n-5}{3} \right\rfloor + 1 & \text{dla } n > 4 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Wykres funkcji $p$ przedstawiono na rysunku.




**(b)** Niech $k$ oznacza ilość cyfr liczby naturalnej $n$ w układzie dwójkowym. Wtedy

$$2^{k-1} \leqslant n < 2^k.$$

Stąd $k - 1 \leqslant \log_2 n < k$. Zatem $k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

**(c)** Najpierw określimy liczbę odcinków 500 m na trasie długości $x$ metrów. Pełnych odcinków jest $\lfloor x/500 \rfloor$ . Po uwzględnieniu kwoty 6 zł za wezwanie taxi otrzymamy, że opłata za przejazd $x$ metrów wyniesie $6 + 3 \lfloor x/500 \rfloor$ złotych.

**Zadanie 1.7*.** **(a)** Znaleźć wzór na zaokrąglanie liczb rzeczywistych dodatnich do najbliższych całkowitych (np. $1.02 \approx 1$, $4.5 \approx 5$, $7.83 \approx 8$, $0.29 \approx 0$).

**(b)** Nowy Rok wypadł w poniedziałek. Znaleźć wzór wskazujący, który dzień tygodnia wypada $n$–tego dnia tego roku.

**(c)** Bankomat wypłaca pieniądze w banknotach o nominałach 200, 100, 50, 20 oraz 10 zł, przy czym zawsze wydaje minimalną liczbę banknotów. Znaleźć wzory określające liczbę banknotów o nominałach 200 i 100 zł w zależności od wypłacanej kwoty.

**(d)** W zegarku elektronicznym impuls jest generowany co sekundę. Korzystając z funkcji część całkowita zapisać aktualny czas w postaci $gg : mm : ss$ w zależności od liczby $x$ impulsów. Rozważyć dwie możliwości (i) $00 \leqslant gg \leqslant 23$ oraz (ii) $00 \leqslant gg < 12$. Przyjąć, że generowanie impulsów rozpoczęto o północy.

**(e)** Znaleźć wzór określający przedostatnią cyfrę w zapisie dziesiętnym liczby naturalnej $n \geqslant 10$.

**(f)** Drukarka drukuje jednostronnie na jednej kartce 4 strony tekstu. Ile kartek należy przygotować, aby wydrukować $n$ stron tekstu?

**Odpowiedzi.** **(a)** $\lfloor x+1/2 \rfloor$; **(b)** $n-7\lfloor (n-1)/7 \rfloor$, 1 oznacza, że jest to poniedziałek, 2 - wtorek, …, 7 - niedziela; **(c)** $b_{200} = \lfloor x/200 \rfloor$, $b_{100} = \left\lfloor \dfrac{x-200\lfloor x/200 \rfloor}{100} \right\rfloor$, gdzie $x$ jest wybieraną kwotą;

**(d)** (i) $\begin{cases} ss = x - \lfloor x/60 \rfloor \cdot 60, \\ mm = \lfloor x/60 \rfloor - \lfloor x/3600 \rfloor \cdot 60, \\ gg = \lfloor x/3600 \rfloor - \lfloor x/86400 \rfloor \cdot 24; \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} ss = x - \lfloor x/60 \rfloor \cdot 60, \\ mm = \lfloor x/60 \rfloor - \lfloor x/3600 \rfloor \cdot 60, \\ gg = \lfloor x/3600 \rfloor - \lfloor x/43200 \rfloor \cdot 12; \end{cases}$

**(e)** $c(n) = \lfloor n/10 \rfloor - 10 \left\lfloor \dfrac{\lfloor n/10 \rfloor}{10} \right\rfloor$; **(f)** $\lfloor (n+3)/4 \rfloor$.