ANALIZA
MATEMATYCZNA 1

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Przykłady i zadania

Wydanie dwudzieste dziewiąte powiększone

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2022

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1992 – 2022 by Marian Gewert and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–62780–94–5

Wydanie XXIX powiększone, Wrocław 2022
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy Sp. Kom.

Spis treści

1 Wstęp **7**

Wstęp **7**

1 Funkcje **9**
1.1. Podstawowe określenia 9
1.2. Funkcje monotoniczne 10
1.3. Złożenie funkcji 12
1.4. Funkcje odwrotne 13
1.5. Funkcje elementarne i inne 15

2 Ciągi liczbowe **18**
2.1. Podstawowe określenia 18
2.2. Granice ciągów 24
2.3. Twierdzenia o granicach ciągów 26

3 Granice i ciągłość funkcji **41**
3.1. Definicje granic funkcji 41
3.2. Twierdzenia o granicach funkcji 44
3.3. Asymptoty funkcji 59
3.4. Ciągłość funkcji 67
3.5. Twierdzenia o funkcjach ciągłych 73

4 Pochodne funkcji **80**
4.1. Podstawowe pojęcia 80
4.2. Pochodne jednostronne i pochodne niewłaściwe 83
4.3. Twierdzenia o pochodnej funkcji 88
4.4. Różniczka funkcji 101
4.5. Pochodne wyższych rzędów 104
4.6. Pochodne funkcji wektorowych 112

5 Zastosowania pochodnych **115**
5.1. Twierdzenia o wartości średniej 115
5.2. Twierdzenia o granicach nieoznaczonych 126
5.3. Wzory Taylora i Maclaurina 134
5.4. Ekstrema funkcji 142
5.5. Funkcje wypukłe i punkty przegięcia wykresu funkcji 151
5.6. Badanie funkcji 157

6 Całki nieoznaczone **175**
6.1. Całki nieoznaczone 175
6.2. Twierdzenia o całkach nieoznaczonych 177
6.3. Całkowanie funkcji wymiernych 188
6.4. Całkowanie funkcji trygonometrycznych 200
6.5. Całkowanie funkcji z niewymiernościami 208

7 Całki oznaczone **214**
7.1. Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego 214
7.2. Metody obliczania całek oznaczonych 221
7.3. Twierdzenia o całkach oznaczonych 225

8 Zastosowania całek oznaczonych **230**
8.1. Zastosowania w geometrii 230
8.2. Zastosowania w fizyce 245

Zbiory zadań **248**

Wstęp

Komplet podręczników do Analizy matematycznej 1 składa się z trzech części. Pierwszą z nich jest książka *„Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory”*, drugą – niniejszy zbiór zadań, a ostatnią – opracowanie *„Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy”*. Książki są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać również studenci wydziałów nauk ścisłych i przyrodniczych uniwersytetów, a także uczelni ekonomicznych, pedagogicznych, rolniczych oraz wojskowych.

Zbiór zawiera przykładowe zadania z rozwiązaniami przedstawionymi „krok po kroku” oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Bezpośrednio za zadaniami podano wskazówki do rozwiązań i odpowiedzi. Przykłady i zadania obejmują rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej wraz z zastosowaniami. Materiał teoretyczny, którego znajomość jest potrzebna do rozwiązywania zadań, można znaleźć w pierwszej części zestawu. Zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze i skierowane do ambitnych studentów. Zadania ze sprawdzianów przeprowadzonych w poprzednich latach w Politechnice Wrocławskiej zawiera trzecia część zestawu. Więcej trudnych i nietypowych zadań Czytelnik znajdzie w książce *„Studencki konkurs matematyczny”*.

Uzupełnieniem zestawu podręczników do Analizy matematycznej 1 jest książka pt. *„Przykłady i kontrprzykłady z analizy matematycznej”*. Publikacja ta przeznaczona dla ambitnych studentów zawiera m.in. przykłady ciągów, funkcji, granic, szeregów, całek itp. o nieoczekiwanych własnościach oraz kontrprzykłady świadczące, że nie można osłabić założeń klasycznych twierdzeń.

Obecne wydanie powiększono o kilka nowych przykładów, zadań oraz rysunków. Ponadto przeredagowano niektóre fragmenty książki oraz poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o zbiorze.

Marian Gewert *Zbigniew Skoczylas*

1. Funkcje

1.1. Podstawowe określenia

PRZYKŁAD 1.1. Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-4}$; (b) $g(x) = \sqrt{16-x^4}$; (c) $h(x) = \dfrac{1}{\log\left(2x^2-x\right)}$;

(d) $p(x) = \log_3 |\cos x|$; (e) $q(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}}$; (f) $r(x) = \operatorname{tg}\left[\pi\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]$.

Rozwiązanie. Dziedziną naturalną funkcji określonej wzorem $f(x)$ nazywamy zbiór D_f liczb rzeczywistych x, dla których można obliczyć $f(x)$.

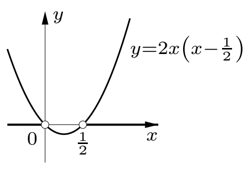
(a) Dziedzina funkcji f jest określona przez warunki $x \geqslant 0$ oraz $x^2 - 4 \neq 0$. Ponieważ $x^2-4 \neq 0 \iff x^2 \neq 4 \iff (x \neq -2) \wedge (x \neq 2)$. Zatem $D_f = [0,\infty) \setminus \{2\} = [0,2) \cup (2,\infty)$.

(b) Dziedzina funkcji g jest określona przez warunek $16 - x^4 \geqslant 0$. Ponieważ

$$16 - x^4 = \left(4 - x^2\right)\left(4 + x^2\right).$$

oraz $4 + x^2 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc nierówność $16 - x^4 \geqslant 0$ jest równoważna nierówności $4 - x^2 \geqslant 0$, czyli $x^2 \leqslant 4$. Zatem $D_g = [-2, 2]$.

(c) Dziedzina funkcji h jest określona przez warunki $2x^2 - x > 0$ oraz $\log\left(2x^2 - x\right) \neq 0$. Pierwsza nierówność jest równoważna nierówności $2x\,(x - 1/2) > 0$, której rozwiązaniem jest zbiór $(-\infty, 0) \cup (1/2, \infty)$ (rysunek). Z kolei drugi warunek można zapisać w postaci



$$2x^2 - x - 1 \neq 0 \iff 2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right) \neq 0 \iff (x \neq 1) \wedge \left(x \neq -\frac{1}{2}\right).$$

Zatem

$$D_h = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1,\infty).$$

(d) Dziedzina funkcji p jest zbiorem rozwiązań nierówności $|\cos x| > 0$, która jest równoważna warunkowi $\cos x \neq 0$. Zatem $D_p = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + n\pi : \ n \in \mathbb{Z}\}$.

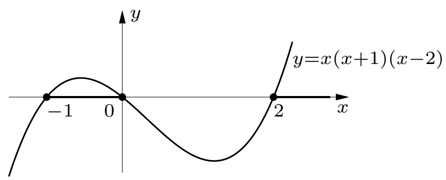
(e) Warunki określające dziedzinę funkcji q mają postać

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad (x+1)(x-2) \neq 0.$$

Są one równoważne warunkom

$$x(x+1)(x-2) \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad x \neq -1, \ x \neq 2$$

Rozwiązaniem pierwszego z nich jest zbiór $[-1, 0] \cup [2, \infty)$ (rysunek).



Uwzględniając dwa pozostałe warunki otrzymamy $D_q = (-1, 0] \cup (2, \infty)$.

(f) Funkcja $\operatorname{tg} u$ jest określona dla $u \neq \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Zatem funkcja r jest określona dla $\pi\,(x + 1/2) \neq \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Stąd otrzymamy $x \neq k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Dziedzina funkcji r ma postać $D_r = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

ZADANIE 1.1. Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x) = \sqrt{\sin x}$; (b) $g(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x}$; (c) $h(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$;

(d) $p(x) = \log_3 (2 - |x|)$; (e) $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; (f) $r(x) = \dfrac{2^x}{2^x - 4}$.

Odpowiedzi. (a) $D_f = \ldots \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \ldots$; (b) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$; (c) $D_h = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$; (d) $D_p = (-2, 2)$; (e) $D_q = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; (f) $D_r = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

1.2. Funkcje monotoniczne

PRZYKŁAD 1.2. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{5} - 3$, $\mathbb{R}$; (b) $g(x) = \sqrt{-2 - x}$, $(-\infty, -2]$;

(c) $q(x) = x^4 + x^2 + 1$, $(-\infty, 0]$; (d) $r(x) = x + \dfrac{4}{x}$, $[2, \infty)$.

Rozwiązanie. Funkcja f jest rosnąca (niemalejąca) na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla dowolnych punktów x_1, x_2 z tego zbioru z warunku $x_1 < x_2$ wynika nierówność

$$f(x_1) < f(x_2) \ \ (f(x_1) \leqslant f(x_2)).$$

Podobnie określa się funkcję malejącą oraz nierosnącą. Funkcja jest monotoniczna na zbiorze, gdy jest rosnąca, niemalejąca, malejąca lub nierosnąca na tym zbiorze.

(a) Pokażemy, że funkcja $f(x) = x/5 - 3$ jest rosnąca na $\mathbb{R}$. Niech x_1, x_2 będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi nierówność $x_1 < x_2$. Wtedy

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\frac{x_2}{5} - 3\right) - \left(\frac{x_1}{5} - 3\right) = \frac{x_2 - x_1}{5}.$$

Ponieważ licznik otrzymanego wyrażenia jest dodatni, więc $f(x_2) - f(x_1) > 0$. To oznacza, że funkcja f jest rosnąca.

(b) Pokażemy, że funkcja $g(x) = \sqrt{-2-x}$ jest malejąca na przedziale $(-\infty, -2]$. Niech x_1, x_2 będą dowolnymi liczbami spełniającymi nierówność $x_1 < x_2 \leqslant -2$. Wtedy

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= \sqrt{-2-x_2} - \sqrt{-2-x_1} \\ &= \frac{\left(\sqrt{-2-x_2} - \sqrt{-2-x_1}\right)\left(\sqrt{-2-x_2} + \sqrt{-2-x_1}\right)}{\sqrt{-2-x_2} + \sqrt{-2-x_1}} \\ &= \frac{(-2-x_2) - (-2-x_1)}{\sqrt{-2-x_2} + \sqrt{-2-x_1}} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{-2-x_2} + \sqrt{-2-x_1}}. \end{aligned}$$

Ponieważ licznik otrzymanego wyrażenia jest ujemny a mianownik dodatni, więc $g(x_2) - g(x_1) < 0$. To oznacza, że funkcja g jest malejąca na przedziale $(-\infty, -2]$.

(c) Pokażemy, że funkcja $q(x) = x^4 + x^2 + 1$ jest malejąca na przedziale $(-\infty, 0]$. Niech $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ oraz $x_1 < x_2$. Wtedy

$$\begin{aligned} q(x_2) - q(x_1) &= \left(x_2^4 - x_1^4\right) + \left(x_2^2 - x_1^2\right) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)\left(x_2^2 + x_1^2\right) + (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)\left(x_2^2 + x_1^2 + 1\right). \end{aligned}$$

Ponieważ dla dowolnych $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ czynniki pierwszy i trzeci są dodatnie, a drugi ujemny, więc $q(x_2) - q(x_1) < 0$. To oznacza, że funkcja q jest malejąca na rozważanym przedziale.

(d) Pokażemy, że funkcja $r(x) = x + 4/x$ jest rosnąca na przedziale $[2, \infty)$. Niech x_1, x_2 będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $2 \leqslant x_1 < x_2$. Wtedy

$$\begin{aligned} r(x_2) - r(x_1) &= \left(x_2 + \frac{4}{x_2}\right) - \left(x_1 + \frac{4}{x_1}\right) \\ &= (x_2 - x_1) + \frac{4(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 4)}{x_1 x_2}. \end{aligned}$$

Ponieważ $x_2 > x_1$ oraz $x_1 x_2 > 2^2 = 4$, więc $x_2 - x_1 > 0$ oraz $x_1 x_2 - 4 > 0$. Zatem $r(x_2) - r(x_1) > 0$. To oznacza, że funkcja r jest rosnąca na przedziale $[2, \infty)$.

ZADANIE 1.2. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

(a) $f(x) = -4x + 5$, $\mathbb{R}$; (b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $\mathbb{R}$;

(c) $h(x) = \frac{1}{x^2}$, $(-\infty, 0)$; (d) $p(x) = \frac{1}{2x+1}$, $[1, \infty)$;

(e) $q(x) = 4x - x^2$, $[2, \infty)$; (f) $r(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $[1, \infty)$.

1.3. Złożenia funkcji

PRZYKŁAD 1.3. Napisać wzory funkcji złożonych $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:

(a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$; (b) $f(x) = 2 + \cos x$, $g(x) = \sqrt{x}$;

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$; (d) $f(x) = -x$, $g(x) = \log x$.

Rozwiązanie. Złożeniem funkcji f i g nazywamy funkcję $g \circ f$ określoną wzorem

$$(g \circ f)(x) = g\left(f\left(x\right)\right).$$

Gdy znamy tylko wzory określające funkcje f i g, to za dziedzinę naturalną złożenia $g \circ f$ przyjmujemy zbiór $\{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$. Mamy kolejno:

(a) $(f \circ f)(x) = f\left(f(x)\right) = f\left(x^2\right) = \left(x^2\right)^2 = x^4$, $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$;

$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(2^x\right) = \left(2^x\right)^2 = 2^{2x}$, $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$;

$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(x^2\right) = 2^{\left(x^2\right)} = 2^{x^2}$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$;

$(g \circ g)(x) = g\left(g(x)\right) = g\left(2^x\right) = 2^{\left(2^x\right)} = 2^{2^x}$, $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$.

(b) $(f \circ f)(x) = f\left(f(x)\right) = f\left(2 + \cos x\right) = 2 + \cos(2 + \cos x)$, $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$;

$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(\sqrt{x}\right) = 2 + \cos\sqrt{x}$, $D_{f \circ g} = [0, \infty)$;

$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(2 + \cos x\right) = \sqrt{2 + \cos x}$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$;

$(g \circ g)(x) = g\left(g(x)\right) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$, $D_{g \circ g} = [0, \infty)$.

(c) $(f \circ f)(x) = f\left(f(x)\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$, $D_{f \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} = x^2$, $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = x^2$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$(g \circ g)(x) = g\left(g(x)\right) = g\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = x^4$, $D_{g \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(d) $(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=f\left(-x\right)=-(-x)=x,\quad D_{f\circ f}=\mathbb{R};$
$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\log x\right)=-\left(\log x\right)=-\log x,\quad D_{f\circ g}=(0,\infty);$
$(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(-x\right)=\log(-x),\quad D_{g\circ f}=(-\infty,0);$
$(g\circ g)(x)=g\left(g(x)\right)=g\left(\log x\right)=\log\left(\log x\right),\quad D_{g\circ g}=(1,\infty).$

ZADANIE 1.3. Napisać wzory funkcji złożonych $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f$, $g\circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad g(x)=x^2;$ (b) $f(x)=\log_2 x,\quad g(x)=2^x;$

(c) $f(x)=\sqrt{x},\quad g(x)=x^4;$ (d) $f(x)=\sin x,\quad g(x)=\dfrac{1}{x}.$

Odpowiedzi. (a) $(f\circ f)(x)=x$ dla $x\neq 0$, $(f\circ g)(x)=1/x^2$ dla $x\neq 0$, $(g\circ f)(x)=1/x^2$ dla $x\neq 0$, $(g\circ g)(x)=x^4$ dla $x\in\mathbb{R}$; (b) $(f\circ f)(x)=\log_2\left(\log_2 x\right)$ dla $x>1$, $(f\circ g)(x)=x$ dla $x\in\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=x$ dla $x>0$, $(g\circ g)(x)=2^{2^x}$ dla $x\in\mathbb{R}$; (c) $(f\circ f)(x)=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$ dla $x\geqslant 0$, $(f\circ g)(x)=\sqrt{x^4}=x^2$ dla $x\in\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=\left(\sqrt{x}\right)^4=x^2$ dla $x\geqslant 0$, $(g\circ g)(x)=\left(x^4\right)^4=x^{16}$ dla $x\in\mathbb{R}$; (d) $(f\circ f)(x)=\sin(\sin x)$ dla $x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=\sin(1/x)$ dla $x\neq 0$, $(g\circ f)(x)=1/\sin x$ dla $x\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, $(g\circ g)(x)=x$ dla $x\neq 0$.

1.4. Funkcje odwrotne

PRZYKŁAD 1.4. Uzasadnić z definicji, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

(a) $f(x)=x^2,\quad (-\infty,0];$ (b) $g(x)=x^3,\quad \mathbb{R};$ (c) $h(x)=\dfrac{x+2}{x},\quad \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

Rozwiązanie. Funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze $A\subset D_f$, gdy dla dowolnych punktów x_1, x_2 z tego zbioru z warunku $x_1\neq x_2$ wynika, że $f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)$. Jednak przy badaniu różnowartościowości funkcji wygodnie jest korzystać z równoważnej definicji: funkcja f jest różnowartościowa na zbiorze A, jeżeli dla dowolnych x_1, x_2 z warunku $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$ wynika, że $x_1=x_2$.

(a) Mamy pokazać, że dla dowolnych x_1, $x_2\leqslant 0$ z warunku $x_1^2=x_2^2$ wynika, iż $x_1=x_2$. Niech liczby $x_1,x_2\leqslant 0$ będą dowolne. Wtedy

$$x_1^2=x_2^2\iff x_1^2-x_2^2=0\iff \left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2\right)=0.$$

Zatem $x_1-x_2=0$ lub $x_1+x_2=0$. Z pierwszej równości wynika, że $x_1=x_2$. Z kolei z drugiej równości, w połączeniu z warunkiem x_1, $x_2\leqslant 0$, wynika, że $x_1=x_2=0$. Zatem w obu przypadkach $x_1=x_2$. To oznacza, że funkcja $f(x)=x^2$ jest różnowartościowa na przedziale $(-\infty,0]$.

(b) Mamy pokazać, że dla dowolnych x_1, $x_2\in\mathbb{R}$ z warunku $x_1^3=x_2^3$ wynika, iż $x_1=x_2$. Niech x_1,x_2 będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy

$$x_1^3=x_2^3\iff x_1^3-x_2^3=0\iff \left(x_1-x_2\right)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)=0.$$

Zatem $x_1 - x_2 = 0$ lub $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0$. Z pierwszej równości wynika, że $x_1 = x_2$. Drugą równość można przekształcić do postaci

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x_2\right)^2 = 0.$$

Ponieważ oba składniki w równości są nieujemne, więc ich suma może być równa 0 tylko wtedy, gdy $x_1 + (x_2/2) = 0$ oraz $\sqrt{3}x_2/2 = 0$, czyli gdy $x_1 = 0$ oraz $x_2 = 0$. W obu przypadkach otrzymaliśmy $x_1 = x_2$, zatem funkcja $g(x) = x^3$ jest różnowartościowa na $\mathbb{R}$.

(c) Mamy pokazać, że dla dowolnych $x_1,\ x_2 \neq 0$ z warunku $(x_1+2)/x_1 = (x_2+2)/x_2$ wynika, iż $x_1 = x_2$. Niech liczby $x_1, x_2 \neq 0$ będą dowolne. Wtedy

$$\frac{x_1+2}{x_1} = \frac{x_2+2}{x_2} \iff (x_1+2)\,x_2 = (x_2+2)\,x_1 \iff 2x_1 = 2x_2 \iff x_1 = x_2.$$

Zatem funkcja $h(x) = (x+2)/x$ jest różnowartościowa na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ZADANIE 1.4. Uzasadnić z definicji, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; (b) $g(x) = x^4$, $[0, \infty)$;

(c) $h(x) = \sqrt{x} - 3$, $[0, \infty)$; (d) $p(x) = x - \sqrt{x}$, $[1/4, \infty)$.

PRZYKŁAD 1.5. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

(a) $p(x) = 1 - \sqrt{x-4}$; (b) $f(x) = 2 - \log_5 x$; (c) $g(x) = \dfrac{1}{2^x + 4}$.

Rozwiązanie. Niech funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$ będzie różnowartościowa. Funkcją odwrotną do f nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ określoną warunkiem

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x),$$

gdzie $x \in X$ oraz $y \in Y$. Funkcja ściśle monotoniczna ma funkcję odwrotną, gdyż jest różnowartościowa. Aby uzyskć wzór określający funkcję odwrotną do funkcji f rozwiązujemy (jeżeli jest to możliwe) równanie $y = f(x)$ względem x. Wówczas mamy $x = f^{-1}(y)$.

(a) Dziedziną funkcji $p(x) = 1 - \sqrt{x-4}$ jest przedział $[4, \infty)$, a zbiorem wartości przedział $(-\infty, 1]$. Funkcja odwrotna do p istnieje, bo funkcja jest malejąca. Z równości $y = 1 - \sqrt{x-4}$ wynika, że $x = (y-1)^2 + 4$. Zatem

$$p^{-1}(y) = (y-1)^2 + 4, \quad \text{gdzie } y \in (-\infty, 1].$$

(b) Dziedziną funkcji $y = f(x) = 2 - \log_5 x$ jest przedział $(0, \infty)$, a zbiorem wartości $\mathbb{R}$. Funkcja odwrotna do f istnieje, bo funkcja jest malejąca. Z równości $y = 2 - \log_5 x$ mamy $x = 5^{2-y}$. Stąd

$$f^{-1}(y) = 5^{2-y}, \quad \text{gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

(c) Dziedziną funkcji $y = g(x) = 1/\left(2^x + 4\right)$ jest $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości przedział $(0, 1/4)$. Funkcja odwrotna g^{-1} istnieje, gdyż funkcja g jest malejąca. Z równości $y = 1/\left(2^x + 4\right)$ mamy $x = \log_2\left(1/y - 4\right)$. Stąd

$$g^{-1}(y) = \log_2\left(\frac{1}{y} - 4\right), \quad \text{gdzie } y \in \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

ZADANIE 1.5. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{3x}{x+5}$; (b) $g(x) = x^5 + \sqrt{3}$;

(c) $h(x) = 4 - \log_2(x+1)$; (d) $p(x) = 3 - \sqrt[3]{x+2}$;

(e) $q(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \leqslant 0$; (f*) $r(x) = 2^x - 2^{-x}$.

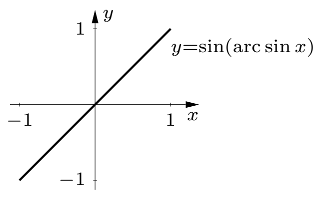
Odpowiedzi. (a) $f^{-1}(y) = 5y/(3-y)$, $y \neq 3$; (b) $g^{-1}(y) = \sqrt[5]{y - \sqrt{3}}$, $y \in \mathbb{R}$; (c) $h^{-1}(y) = 2^{4-y} - 1$, $y \in \mathbb{R}$; (d) $p^{-1}(y) = (3-y)^3 - 2$, $y \in \mathbb{R}$; (e) $q^{-1}(y) = -\sqrt{1/y - 1}$, $y \in (0, 1]$; (f*) $r^{-1}(y) = \log_2\left(y + \sqrt{y^2+4}\right) - 1$, $y \in \mathbb{R}$

1.5. Funkcje elementarne i inne

PRZYKŁAD 1.6. Naszkicować wykresy funkcji:

(a) $f(x) = \sin(\arcsin x)$; (b) $g(x) = \arcsin(\sin x)$.

Rozwiązanie.



(a) Dziedziną funkcji $f(x) = \sin(\arcsin x)$ jest przedział $[-1, 1]$. Dla $x \in [-1, 1]$ mamy

$$f(x) = \sin(\arcsin x) = x.$$

Równość ta wynika bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej. Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku.

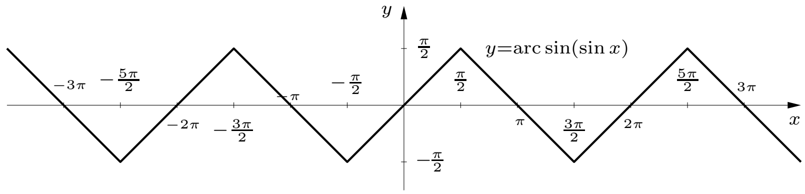
(b) Dziedziną funkcji $g(x) = \arcsin(\sin x)$ jest $\mathbb{R}$. Funkcja ta jest okresowa i ma okres $T = 2\pi$. Wykres funkcji g wystarczy sporządzić np. na przedziale $[-\pi/2, 3\pi/2]$. Dla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ mamy $g(x) = x$. Równość ta wynika bezpośrednio z definicji funkcji odwrotnej. Dla $x \in (\pi/2, 3\pi/2]$ mamy $x = \pi + u$, gdzie $u \in (-\pi/2, \pi/2]$. Stąd

$$\begin{aligned} g(x) &= \arcsin(\sin x) = \arcsin\left[\sin(\pi + u)\right] = \arcsin(-\sin u) \\ &= -\arcsin(\sin u) = -u = \pi - x. \end{aligned}$$

Na przedziale $[-\pi/2, 3\pi/2]$ funkcja g jest określona wzorem:

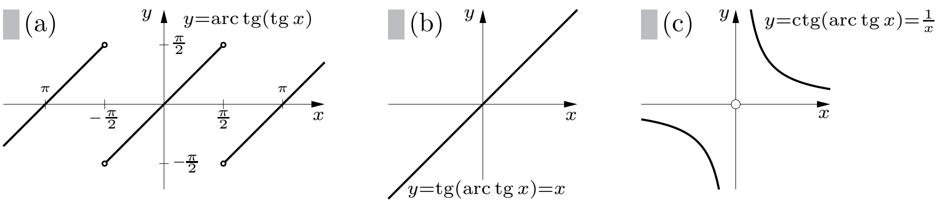
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [-\pi/2, \pi/2], \\ \pi - x & \text{dla } x \in (\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases}$$

Korzystając teraz z okresowości funkcji g możemy sporządzić jej wykres na $\mathbb{R}$.



ZADANIE 1.6. Naszkicować wykresy funkcji:
(a) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$; (b) $g(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)$; (c) $h(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x)$.

Odpowiedzi.



PRZYKŁAD 1.7.
(a) Na parterze wielopiętrowego budynku z windą jest m mieszkań, a na każdym piętrze jest po r mieszkań. Znaleźć funkcję określającą numer przycisku w windzie, który trzeba nacisnąć, aby dojechać do piętra z mieszkaniem o numerze n. Narysować wykres tej funkcji dla $m = 4$ oraz $r = 3$.

(b) Podać wzór określający ilość cyfr liczby naturalnej n w jej zapisie dwójkowym.

(c) Za wezwanie taxi pasażer płaci 6 zł, a za każde przejechane 500 m trasy 3 zł. Znaleźć funkcję wskazującą opłatę za przejazd taksówką x metrów.

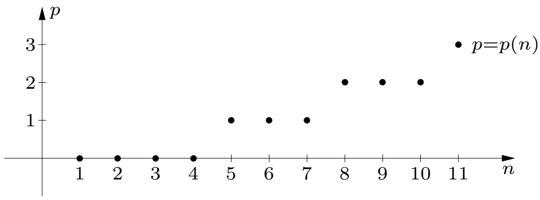
Rozwiązanie.
(a) Funkcja p wskazująca numer piętra, na którym jest mieszkanie o numerze n, ma postać

$$p(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant m, \\ \left\lfloor \dfrac{n-m-1}{r} \right\rfloor + 1 & \text{dla } n > m, \end{cases}$$

gdzie $\lfloor u \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby u. Dla danych z zadania funkcja ta ma postać

$$p(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 1 \leqslant n \leqslant 4, \\ \left\lfloor \dfrac{n-5}{3} \right\rfloor + 1 & \text{dla } n > 4 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Wykres funkcji p przedstawiono na rysunku.



(b) Niech k oznacza ilość cyfr liczby naturalnej n w układzie dwójkowym. Wtedy

$$2^{k-1} \leqslant n < 2^k.$$

Stąd $k-1 \leqslant \log_2 n < k$. Zatem $k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

(c) Najpierw określimy liczbę odcinków 500 m na trasie długości x metrów. Pełnych odcinków jest $\lfloor x/500 \rfloor$. Po uwzględnieniu kwoty 6 zł za wezwanie taxi otrzymamy, że opłata za przejazd x metrów wyniesie $6 + 3\lfloor x/500 \rfloor$ złotych.

ZADANIE 1.7. (a) Znaleźć wzór na zaokrąglanie liczb dodatnich do najbliższych całkowitych (np. $1.02 \approx 1$, $4.5 \approx 5$, $7.83 \approx 8$, $0.29 \approx 0$).

(b) Nowy Rok wypadł w poniedziałek. Znaleźć wzór wskazujący, który dzień tygodnia wypada n–tego dnia tego roku.

(c) Bankomat wypłaca pieniądze w banknotach o nominałach 200, 100, 50, 20 oraz 10 zł, przy czym zawsze wydaje minimalną liczbę banknotów. Znaleźć wzory określające liczbę banknotów o nominałach 200 i 100 zł w zależności od wypłacanej kwoty.

(d) W zegarku elektronicznym impuls jest generowany co sekundę. Korzystając z funkcji część całkowita zapisać aktualny czas w postaci $gg : mm : ss$ w zależności od liczby x impulsów. Rozważyć dwie możliwości (i) $00 \leqslant gg \leqslant 23$ oraz (ii) $00 \leqslant gg < 12$. Przyjąć, że generowanie impulsów rozpoczęto o północy.

(e) Znaleźć wzór określający przedostatnią cyfrę w zapisie dziesiętnym liczby naturalnej $n \geqslant 10$.

(f) Drukarka drukuje jednostronnie na jednej kartce 4 strony tekstu. Ile kartek należy przygotować, aby wydrukować n stron tekstu?

Odpowiedzi. (a) $\lfloor x + 1/2 \rfloor$; (b) $n - 7\lfloor (n-1)/7 \rfloor$, 1 oznacza, że jest to poniedziałek, 2 - wtorek, ..., 7 - niedziela; (c) $b_{200} = \lfloor x/200 \rfloor$, $b_{100} = \left\lfloor \dfrac{x - 200\lfloor x/200 \rfloor}{100} \right\rfloor$, gdzie x jest wybieraną kwotą;

(d) (i) $\begin{cases} ss = x - \lfloor x/60 \rfloor \cdot 60, \\ mm = \lfloor x/60 \rfloor - \lfloor x/3600 \rfloor \cdot 60, \\ gg = \lfloor x/3600 \rfloor - \lfloor x/86400 \rfloor \cdot 24; \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} ss = x - \lfloor x/60 \rfloor \cdot 60, \\ mm = \lfloor x/60 \rfloor - \lfloor x/3600 \rfloor \cdot 60, \\ gg = \lfloor x/3600 \rfloor - \lfloor x/43200 \rfloor \cdot 12; \end{cases}$

(e) $c(n) = \lfloor n/10 \rfloor - 10 \left\lfloor \dfrac{\lfloor n/10 \rfloor}{10} \right\rfloor$; (f) $\lfloor (n+3)/4 \rfloor$.