

ALGEBRA LINIOWA

Teresa Jurlewicz Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA LINIOWA

Przykłady i zadania

Wydanie siódme poprawione



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2017

Teresa Jurlewicz

Przedsiębiorstwo Informatyczne Yuma
Wrocław
teresa.jurlewicz@yuma.pl

Zbigniew Skoczylas

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:

IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1995, 1997, 1999, 2000, 2005, 2014, 2017

by Teresa Jurlewicz and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich. Skład wykonano w systemie L^AT_EX.

ISBN 978-83-62780-46-4

Wydanie VII poprawione, Wrocław 2017
Oficina Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Oficyna Wydawnicza ATUT

Spis treści

Wstęp	7
1 Przestrzenie liniowe	9
Przykłady	9
Podstawowe definicje	9
Podprzestrzenie przestrzeni liniowej	10
Liniowa niezależność wektorów	14
Baza i wymiar przestrzeni liniowej	19
Współrzędne wektora w bazie	27
Zadania	36
2 Układy równań liniowych	42
Przykłady	42
Rząd macierzy	42
Twierdzenie Kroneckera-Capellego	50
Układy jednorodne i niejednorodne	60
Zadania	68
3 Przekształcenia liniowe	73
Przykłady	73
Podstawowe określenia	73
Obraz i jądro przekształcenia liniowego	77
Macierz przekształcenia liniowego	82
Działania na przekształceniach liniowych	91
Wartości i wektory własne przekształceń liniowych	94
Wartości i wektory własne macierzy	105
Zadania	109
4 Przestrzenie euklidesowe	116
Przykłady	116
Iloczyn skalarny	116
Norma wektora. Ortogonalność wektorów	118
Bazy ortogonalne	122

Inne metody ortogonalizacji	127
Rzut ortogonalny	129
Zadania	135
Odpowiedzi i wskazówki	142
Zbiory zadań	150

Wstęp

Zbiór zadań „*Algebra liniowa. Przykłady i zadania*” jest drugą częścią zestawu podręczników do Algebry liniowej. Pozostałymi częściami zestawu są książki „*Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory*” oraz „*Algebra liniowa. Kolokwia i egzaminy*”. Podręczniki te przeznaczone są głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci wydziałów nauk ścisłych uniwersytetów.

Materiał zawarty w zbiorze obejmuje przestrzenie i przekształcenia liniowe, układy równań liniowych oraz przestrzenie euklidesowe. Opracowanie zawiera zadania rozwiązywane „krok po kroku” oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Zadania te powinny być przerabiane przez studentów równoległe do materiału prezentowanego na wykładach. Odpowiedzi i wskazówki do wszystkich zadań podane są na końcu zbioru. Materiał teoretyczny niezbędny do rozwiązywania zadań można znaleźć w pierwszej części zestawu pt. „*Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory*”.

W obecnym wydaniu poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy koleżankom i kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym studentom za uwagi o poprzednich wydaniach. Uprzejmie prosimy czytelników o przesyłanie uwag o podręczniku oraz informacji o zauważonych błędach.

Teresa Jurlawicz

Zbigniew Skoczylas

1

Przestrzenie liniowe

Przykłady

Podstawowe definicje

► **Przykład 1.1.** Uzasadnić z definicji, że zbiór $\mathbb{R}_2[x]$ wszystkich wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż 2 z dodawaniem wielomianów i mnożeniem ich przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową.

Rozwiązanie. Niech wielomiany $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ należą do zbioru $\mathbb{R}_2[x]$, przy czym $\mathbf{p}(x) = ax^2 + bx + c$, $\mathbf{q}(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, gdzie $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Z definicji

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})(x) = \mathbf{p}(x) + \mathbf{q}(x) = (a + a_1)x^2 + (b + b_1)x + c + c_1,$$

$$(\alpha \mathbf{p})(x) = \alpha \mathbf{p}(x) = (\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + \alpha c$$

wynika, że funkcje $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ oraz $\alpha \mathbf{p}$ są także wielomianami ze zbioru $\mathbb{R}_2[x]$. Sprawdzimy teraz kolejno 6 aksjomatów, które muszą spełniać działania w przestrzeniach liniowych.

(1) Dodawanie wielomianów jest przemienne, bowiem dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})(x) = \mathbf{p}(x) + \mathbf{q}(x) = \mathbf{q}(x) + \mathbf{p}(x) = (\mathbf{q} + \mathbf{p})(x).$$

(2) Niech dodatkowo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}_2[x]$. Łączność dodawania wielomianów wynika z warunku

$$\begin{aligned} [(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \mathbf{r}](x) &= (\mathbf{p} + \mathbf{q})(x) + \mathbf{r}(x) \\ &= (\mathbf{p}(x) + \mathbf{q}(x)) + \mathbf{r}(x) \\ &= \mathbf{p}(x) + (\mathbf{q}(x) + \mathbf{r}(x)) = \mathbf{p}(x) + (\mathbf{q} + \mathbf{r})(x) = [\mathbf{p} + (\mathbf{q} + \mathbf{r})](x). \end{aligned}$$

(3) Elementem neutralnym dodawania wielomianów jest wielomian $\mathbf{p}_0 \equiv 0$ także należący do zbioru $\mathbb{R}_2[x]$.

(4) Elementem przeciwnym do wielomianu $\mathbf{p}$ jest wielomian

$$(-\mathbf{p})(x) = -\mathbf{p}(x).$$

(5) Załóżmy, że $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory

$$(1 \cdot \mathbf{p})(x) = 1 \cdot \mathbf{p}(x) = \mathbf{p}(x),$$

$$[\alpha(\beta \mathbf{p})](x) = \alpha(\beta \mathbf{p})(x) = \alpha(\beta \mathbf{p}(x)) = (\alpha\beta)\mathbf{p}(x) = [(\alpha\beta)\mathbf{p}](x),$$

a więc rzeczywiście $1 \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}$ oraz $\alpha(\beta \mathbf{p}) = (\alpha\beta)\mathbf{p}$.

(6) Ponadto prawdziwe są związki $(\alpha + \beta)\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{p}$ oraz $\alpha(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \alpha\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q}$, bowiem dla $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$[(\alpha + \beta)\mathbf{p}](x) = (\alpha + \beta)\mathbf{p}(x) = \alpha\mathbf{p}(x) + \beta\mathbf{p}(x) = (\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{p})(x)$$

oraz

$$[\alpha(\mathbf{p} + \mathbf{q})](x) = \alpha[(\mathbf{p} + \mathbf{q})(x)] = \alpha[\mathbf{p}(x) + \mathbf{q}(x)] = \alpha\mathbf{p}(x) + \alpha\mathbf{q}(x) = (\alpha\mathbf{p} + \alpha\mathbf{q})(x).$$

Zauważmy, że własności (1) – (6) wynikały bezpośrednio z odpowiednich własności dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych.

Podprzestrzenie przestrzeni liniowej

► **Przykład 1.2.** Uzasadnić, że podane zbiory $\mathbb{W}$ są podprzestrzeniami liniowymi wskazanych przestrzeni liniowych $\mathbb{V}$:

(a) $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x = 3y\}, \mathbb{V} = \mathbb{R}^2;$

(b) $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = y + z = 0\}, \mathbb{V} = \mathbb{R}^3;$

(c) $\mathbb{W} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_3[x] : \mathbf{p}(x) = \mathbf{p}(-x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}\}, \mathbb{V} = \mathbb{R}[x];$

(d) $\mathbb{W} = \{\mathbf{f} \in \mathbb{C}([0, 2]) : \mathbf{f}'(1) = 0\}, \mathbb{V} = \mathbb{C}([0, 2]);$

(e) $\mathbb{W} = \{\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{3 \times 3} : \mathbf{A}^T = 2\mathbf{A}\}, \mathbb{V} = \mathbb{M}_{3 \times 3}.$

Rozwiązanie. Zbiór $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{W}$ oraz dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mamy $\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 \in \mathbb{W}$.

(a) Niech $\mathbf{w}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{w}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{W}$ oraz niech $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 = (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2, \alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) = (x, y).$$

Mamy

$$2x = 2(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) = \alpha_12x_1 + \alpha_22x_2 = \alpha_13y_1 + \alpha_23y_2 = 3(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) = 3y,$$

stąd $\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 \in \mathbb{W}$. Zatem $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{V}$.

(b) Warunek $x + y = y + z = 0$ oznacza, że $x = -y = z$, więc

$$\mathbb{W} = \{(x, -x, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Niech $\mathbf{w}_1 = (x_1, -x_1, x_1)$, $\mathbf{w}_2 = (x_2, -x_2, x_2)$, gdzie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ oraz niech $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Wtedy wektor

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 (-x_1) + \alpha_2 (-x_2), \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

ma postać $(x, -x, x)$ dla $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, więc należy do zbioru $\mathbb{W}$. Zbiór $\mathbb{W}$ jest zatem podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{V}$.

(c) Niech $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{W}$ oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Funkcja $\alpha_1 \mathbf{p} + \alpha_2 \mathbf{q}$ jest oczywiście wielomianem stopnia mniejszego lub równego 3. Zachodzi też warunek

$$(\alpha_1 \mathbf{p} + \alpha_2 \mathbf{q})(x) = \alpha_1 \mathbf{p}(x) + \alpha_2 \mathbf{q}(x) = \alpha_1 \mathbf{p}(-x) + \alpha_2 \mathbf{q}(-x) = (\alpha_1 \mathbf{p} + \alpha_2 \mathbf{q})(-x),$$

więc $\alpha_1 \mathbf{p} + \alpha_2 \mathbf{q} \in \mathbb{W}$. Zbiór $\mathbb{W}$ jest zatem podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{V}$.

(d) Niech $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{W}$ oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Funkcja $\alpha_1 \mathbf{f} + \alpha_2 \mathbf{g}$ jest ciągła na przedziale $[0, 2]$, bo obie funkcje $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$ są ciągłe. Ponadto istnieje pochodna tej funkcji w punkcie 1, bo istnieją $\mathbf{f}'(1)$ i $\mathbf{g}'(1)$ oraz

$$(\alpha_1 \mathbf{f} + \alpha_2 \mathbf{g})'(1) = (\alpha_1 \mathbf{f}' + \alpha_2 \mathbf{g}')(1) = \alpha_1 \mathbf{f}'(1) + \alpha_2 \mathbf{g}'(1) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0.$$

Otrzymana równość świadczy o tym, że zbiór $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{C}([0, 2])$.

(e) Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{W}$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy spełnione są warunki: $\mathbf{A}^T = 2\mathbf{A}$, $\mathbf{B}^T = 2\mathbf{B}$. Korzystając z własności transponowania macierzy mamy

$$\begin{aligned} (\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B})^T &= (\alpha \mathbf{A})^T + (\beta \mathbf{B})^T \\ &= \alpha \mathbf{A}^T + \beta \mathbf{B}^T = \alpha (2\mathbf{A}) + \beta (2\mathbf{B}) = 2(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}). \end{aligned}$$

To oznacza, że $\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B} \in \mathbb{W}$. Zatem $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$.

► **Przykład 1.3.** Opisać wszystkie podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Rozwiązanie. Niech $\mathbb{W}$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Posługując się interpretacją przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ jako zbioru punktów płaszczyzny możemy wyróżnić jedynie trzy wzajemnie wykluczające się przypadki:

(1) $\mathbb{W} = \{(0, 0)\}$;

(2) zbiór $\mathbb{W}$ zawiera punkt $A \neq O = (0, 0)$ i nie zawiera żadnego punktu niewspółliniowego z punktami O i A . Jeżeli $A = (a, b)$, to dla każdego $t \in \mathbb{R}$ punkt $(at, bt) \in \mathbb{W}$, czyli cała prosta $l: x = at, y = bt$ zawiera się w zbiorze $\mathbb{W}$. Jednocześnie z założenia żaden punkt spoza prostej l nie należy do zbioru $\mathbb{W}$, a więc zbiór $\mathbb{W}$ jest prostą l . Ze względu na dowolność wyboru punktu A możemy stwierdzić, że wszystkie proste przechodzące przez początek układu współrzędnych są podprzestrzeniami liniowymi

przestrzeni $\mathbb{R}^2$;

(3) zbiór $\mathbb{W}$ zawiera dwa punkty $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ niewspółliniowe z punktem O . Wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ nie są więc równoległe, czyli $ad - bc \neq 0$. W tym przypadku $\mathbb{W} = \mathbb{R}^2$. Niech bowiem $C = (x, y)$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny. Istnieją wtedy stałe α_1, α_2 takie, że $C = \alpha_1 A + \alpha_2 B$. Wynika to z faktu, że układ równań $a\alpha_1 + c\alpha_2 = x$, $b\alpha_1 + d\alpha_2 = y$ jest układem Cramera o niewiadomych α_1, α_2 . Ostatecznie jedynymi podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^2$ są: $\{(0, 0)\}$, wszystkie proste przechodzące przez początek układu współrzędnych oraz $\mathbb{R}^2$.

► **Przykład 1.4.** Określić, które z podanych zbiorów $\mathbb{U}_i, \mathbb{W}_i$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni liniowych $\mathbb{V}_i$, gdzie $1 \leq i \leq 6$:

- (a) $\mathbb{U}_1 = \{(x, y, z) : yz \leq 0\}$, $\mathbb{W}_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = x - y = 0\}$, $\mathbb{V}_1 = \mathbb{R}^3$;
- (b) $\mathbb{U}_2 = \{(2x, x+y, 0, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{W}_2 = \{(x, x-y, z, y) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{V}_2 = \mathbb{R}^4$;
- (c) $\mathbb{U}_3 = \{(x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0\}$, $\mathbb{W}_3 = \{(x_n) : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony}\}$, $\mathbb{V}_3 = \mathbb{R}^\infty$;
- (d) $\mathbb{U}_4 = \{p : \text{stopień wielomianu } p \text{ parzysty}\}$, $\mathbb{W}_4 = \{p : p'(1) = 0\}$, $\mathbb{V}_4 = \mathbb{R}[x]$;
- (e) $\mathbb{U}_5 = \{f : f(1) = f(2)\}$, $\mathbb{W}_5 = \{f : \text{funkcja } f \text{ jest monotoniczna}\}$, $\mathbb{V}_5 = \mathbb{C}(\mathbb{R})$;
- (f) $\mathbb{U}_6 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ x+y & 2x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathbb{W}_6 = \{A \in \mathbb{M}_{2 \times 2} : \det A = 0\}$, $\mathbb{V}_6 = \mathbb{M}_{2 \times 2}$.

Rozwiązanie. Aby uzasadnić, że zbiór nie jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej wystarczy wskazać dwa wektory należące do danego zbioru, których suma nie należy do tego zbioru lub też wektor, który po pomnożeniu przez pewną liczbę już nie należy do tego zbioru. Można też np. zauważyć, że wektor zerowy leży poza zbiorem, a to jest warunek konieczny dla podprzestrzeni liniowej. I tak w naszym przykładzie zbiory $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4, \mathbb{W}_5, \mathbb{W}_6$ nie są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednich przestrzeni liniowych, bowiem:

$$\mathbb{U}_1: (0, 3, -1), (0, -2, 2) \in \mathbb{U}_1, \text{ ale } (0, 3, -1) + (0, -2, 2) = (0, 1, 1) \notin \mathbb{U}_1;$$

$$\mathbb{U}_2: (0, 0, 0, 0) \notin \mathbb{U}_2;$$

$$\mathbb{U}_3: \text{ dla } x_n = 1 + 1/n \text{ ciąg } (x_n) \in \mathbb{U}_3, \text{ ale ciąg } (-x_n) = -(x_n) \notin \mathbb{U}_3;$$

$$\mathbb{U}_4: x^4 + x^3, x^4 \in \mathbb{U}_4, \text{ ale } (x^4 + x^3) - x^4 = x^3 \notin \mathbb{U}_4;$$

$$\mathbb{W}_5: f(x) = \max(x, 0), g(x) = \min(x, 0) \in \mathbb{W}_5, \text{ ale } f(x) - g(x) = |x| \notin \mathbb{W}_5;$$

$$\mathbb{W}_6: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{W}_6, \text{ ale } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin \mathbb{W}_6.$$

Pozostałe zbiory są podprzestrzeniami liniowymi, co uzasadnimy niżej. Niech zatem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\mathbb{W}_1: \text{ dla } w_1 = (x_1, y_1, z_1), w_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{W}_1 \text{ wektor}$$

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)$$

należy do $\mathbb{W}_1$, bo

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 (x_1 + y_1 + z_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2 + z_2) = 0$$

oraz

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 (x_1 - y_1) + \alpha_2 (x_2 - y_2) = 0.$$

Inaczej można było napisać, że $\mathbb{W}_1 = \{(x, x, -2x) : x \in \mathbb{R}\}$ i z tej postaci zbioru uzasadnić powyższe warunki;

$\mathbb{W}_2$: dla $\mathbf{w}_1 = (x_1, x_1 - y_1, z_1, y_1)$, $\mathbf{w}_2 = (x_2, x_2 - y_2, z_2, y_2) \in \mathbb{W}_2$ wektor

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2), \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

należy do $\mathbb{W}_2$;

$\mathbb{W}_3$: dla ciągów ograniczonych (x_n) , (y_n) ciąg $\alpha_1 (x_n) + \alpha_2 (y_n) = (\alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n)$ jest też ograniczony, bowiem jeżeli $|x_n| \leq M_1 < \infty$ i $|y_n| \leq M_2 < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to

$$|\alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n| \leq |\alpha_1| |x_n| + |\alpha_2| |y_n| \leq |\alpha_1| M_1 + |\alpha_2| M_2 = M < \infty;$$

$\mathbb{W}_4$: dla $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{W}_4$ mamy $(\alpha_1 \mathbf{p} + \alpha_2 \mathbf{q})'(1) = \alpha_1 \mathbf{p}'(1) + \alpha_2 \mathbf{q}'(1) = 0$, przy czym $\alpha_1 \mathbf{p} + \alpha_2 \mathbf{q}$ jest też wielomianem, więc $\alpha_1 \mathbf{p} + \alpha_2 \mathbf{q} \in \mathbb{W}_4$;

$\mathbb{U}_5$: dla $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{U}_5$ mamy

$$(\alpha_1 \mathbf{f} + \alpha_2 \mathbf{g})(1) = \alpha_1 \mathbf{f}(1) + \alpha_2 \mathbf{g}(1) = \alpha_1 \mathbf{f}(2) + \alpha_2 \mathbf{g}(2) = (\alpha_1 \mathbf{f} + \alpha_2 \mathbf{g})(2),$$

jednocześnie z własności funkcji ciągłych wynika, że funkcja $\alpha_1 \mathbf{f} + \alpha_2 \mathbf{g}$ jest ciągła, więc ostatecznie $\alpha_1 \mathbf{f} + \alpha_2 \mathbf{g} \in \mathbb{U}_5$;

$\mathbb{U}_6$: dla $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 + y_1 & 2x_1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_2 + y_2 & 2x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{U}_6$ macierz

$$\alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) & 2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \end{bmatrix} \in \mathbb{U}_6.$$

► **Przykład 1.5.** Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{W}_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = z \text{ lub } y = t\}$,

$$\mathbb{W}_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = z \text{ i } y = t\}, \quad \mathbb{V} = \mathbb{R}^4;$$

(b) $\mathbb{W}_1 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony i zbieżny}\}$,

$$\mathbb{W}_2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony lub zbieżny}\}, \quad \mathbb{V} = \mathbb{R}^\infty?$$

Rozwiązanie. Wykorzystamy fakt, że część wspólna dwóch podprzestrzeni liniowych jest też podprzestrzenią liniową, zaś ich suma mnogościowa jest podprzestrzenią jedynie w przypadku, gdy jedna z nich zawiera się w drugiej.

(a) Niech $\mathbb{U}_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = z\}$ oraz $\mathbb{U}_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y = t\}$. Zbiory $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Ponadto $\mathbb{W}_1 = \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2$,

$\mathbb{W}_2 = \mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$. Zbiór $\mathbb{U}_1$ nie zawiera się w $\mathbb{U}_2$ ani na odwrót, np. $\mathbf{w}_1 = (0, 1, 0, 2) \in \mathbb{U}_1$, ale $\mathbf{w}_1 \notin \mathbb{U}_2$ oraz $\mathbf{w}_2 = (1, 0, 2, 0) \in \mathbb{U}_2$, ale $\mathbf{w}_2 \notin \mathbb{U}_1$. Zatem zbiór $\mathbb{W}_1$ nie jest, a zbiór $\mathbb{W}_2$ jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^4$.

(b) Niech

$$\mathbb{U}_1 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony}\}$$

oraz

$$\mathbb{U}_2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest zbieżny}\}.$$

Zbiory $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$. Wynika to z własności sum ciągów zbieżnych, ograniczonych i iloczynów tych ciągów przez liczby. Zauważmy, że $\mathbb{W}_1 = \mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$, $\mathbb{W}_2 = \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2$, a ponadto $\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_1$, bo każdy ciąg zbieżny jest ograniczony. Stąd wynika, że oba zbiory $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ są podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^\infty$.

Liniowa niezależność wektorów

► **Przykład 1.6.** Wektory $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 5)$ przedstawić na wszystkie możliwe sposoby jako kombinacje liniowe wektorów:

(a) $(2, 0, 6)$, $(0, 1, 0)$, $(1, -1, 3)$; (b) $(2, 0, 6)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$.

Rozwiązanie.

(a) Z równości $(1, 2, 3) = a(2, 0, 6) + b(0, 1, 0) + c(1, -1, 3)$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, wynika układ równań $2a + c = 1$, $b - c = 2$, $6a + 3c = 3$. Rozwiązanie tego układu ma postać $a = (1 - c)/2$, $b = 2 + c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$. Istnieje więc nieskończenie wiele kombinacji liniowych, mianowicie

$$(1, 2, 3) = \frac{1-c}{2}(2, 0, 6) + (2+c)(0, 1, 0) + c(1, -1, 3), \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}.$$

Niech teraz $(1, 3, 5) = a(2, 0, 6) + b(0, 1, 0) + c(1, -1, 3)$. Układ równań $2a + c = 1$, $b - c = 3$, $6a + 3c = 5$ jest sprzeczny, a to oznacza, że wektora $(1, 3, 5)$ nie można przedstawić w postaci kombinacji liniowej danych wektorów.

(b) Postępując podobnie mamy $(1, 2, 3) = a(2, 0, 6) + b(0, 1, 0) + c(1, 1, 1)$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Stąd wynika, że $2a + c = 1$, $b + c = 2$, $6a + c = 3$. Otrzymany układ równań jest układem Cramera posiadającym jedyne rozwiązanie $a = 1/2$, $b = 2$, $c = 0$. Wektor $(1, 2, 3)$ ma więc tylko jedno przedstawienie, tzn.

$$(1, 2, 3) = \frac{1}{2}(2, 0, 6) + 2(0, 1, 0).$$

Dla wektora $(1, 3, 5)$ także istnieje tylko jedna kombinacja liniowa mająca postać $(1, 3, 5) = (2, 0, 6) + 4(0, 1, 0) - (1, 1, 1)$.

► **Przykład 1.7.** Zbadać z definicji liniową niezależność podanych układów wektorów w odpowiednich przestrzeniach liniowych:

(a) $(2, 0, 6)$, $(0, 1, 0)$, $(1, -1, 3)$; $(2, 0, 6)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $\mathbb{R}^3$;

(b) $1 + x^2$, $1 - x^2$, $1 + 2x$; $1 + x$, $2 - x$, $3x - 5$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(c) $1, \sin x, \cos x$; $1, \arctg x, \operatorname{arccotg} x$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Rozwiązanie. Wektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ są liniowo niezależne, jeżeli dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ z warunku $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$ wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Gdy tak nie jest, wektory są liniowo zależne.

(a) Warunek $\alpha_1(2, 0, 6) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(1, -1, 3) = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$ prowadzi do układu równań $2\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, $6\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0$. Rozwiązanie tego układu ma postać $\alpha_2 = \alpha_3 = -2\alpha_1$, gdzie $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Przyjmując np. $\alpha_1 = 1$ możemy napisać, że $(2, 0, 6) - 2(0, 1, 0) - 2(1, -1, 3) = (0, 0, 0)$, a to oznacza liniową zależność danych wektorów. Dla wektorów $(2, 0, 6)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ z warunku $\alpha_1(2, 0, 6) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, otrzymamy układ równań Cramera $2\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $6\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ i jego jedyne rozwiązanie $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Wektory $(2, 0, 6)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ są więc liniowo niezależne.

(b) Załóżmy, że $\alpha_1(1+x^2) + \alpha_2(1-x^2) + \alpha_3(1+2x) = \mathbf{0} \equiv 0$. Wielomian $(\alpha_1 - \alpha_2)x^2 + 2\alpha_3x + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ jest więc wielomianem zerowym. Stąd wynika, że $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, $2\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, a więc $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. To oznacza liniową niezależność pierwszej trójki wielomianów. Dla drugiej trójki z warunku $\alpha_1(1+x) + \alpha_2(2-x) + \alpha_3(3x-5) \equiv 0$ odczytujemy, że $\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$ i $\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0$. Ten jednorodny układ równań posiada niezerowe rozwiązania, bowiem $\alpha_2 = -8\alpha_1$, $\alpha_3 = -3\alpha_1$, gdzie $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Dla $\alpha_1 = 1$ otrzymujemy równość $(1+x) - 8(2-x) - 3(3x-5) \equiv 0$ oznaczającą liniową zależność danych wielomianów.

(c) Niech $\alpha_1 + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x = \mathbf{0} \equiv 0$. Funkcja występująca po lewej stronie równości w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ przyjmuje wartość 0. Dla $x = 0$ otrzymujemy równość $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, dla $x = \pi/2$ warunek $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, a dla $x = \pi$ mamy $\alpha_1 - \alpha_3 = 0$. Stąd wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, więc dane funkcje są liniowo niezależne. Zauważmy, że dobieraliśmy tu takie wartości x , aby otrzymać układ Cramera zmiennych $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Dla funkcji $1, \arctg x, \operatorname{arccotg} x$ wstawienie różnych wartości x do warunku $\alpha_1 + \alpha_2 \arctg x + \alpha_3 \operatorname{arccotg} x = 0$ nie prowadzi niestety do układu Cramera. Należy więc podejrzewać, że funkcje te są liniowo zależne. Aby to ściśle uzasadnić, wystarczy powołać się na znaną tożsamość dla funkcji cyklotometrycznych:

$$\arctg x + \operatorname{arccotg} x \equiv \frac{\pi}{2}$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Przepisując ten warunek w postaci

$$\frac{\pi}{2} \cdot 1 - \arctg x - \operatorname{arccotg} x \equiv 0$$

wnioskujemy, że dane funkcje są rzeczywiście liniowo zależne.

► **Przykład 1.8.** Uzasadnić liniową zależność podanych wektorów we wskazanych przestrzeniach liniowych przedstawiając jeden z tych wektorów jako kombinację liniową pozostałych:

(a) $(1, 2), (2, 3), (3, 4), \mathbb{R}^2$; (b) $\sin x, \sin 2x, \sin^2 x, \cos x, \cos 2x, \cos^2 x, \mathbb{C}(\mathbb{R})$;

(c) $(2x-3)^2, x^2, 3x, -1, \mathbb{R}_2[x]$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbb{M}_{2 \times 2}$.

Rozwiązanie.

(a) Nietrudno zauważyć, że $(1, 2) + (3, 4) = (4, 6) = 2 \cdot (2, 3)$. Z tej równości wynika, że każdy z podanych wektorów jest kombinacją liniową pozostałych, np. $(1, 2) = 2(2, 3) - (3, 4)$. To oznacza liniową zależność tych wektorów, bowiem zgodnie z definicją

$$(1, 2) - 2 \cdot (2, 3) + (3, 4) = \mathbf{0}.$$

(b) Tu wystarczy zastosować wzór $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ i wtedy

$$0 \cdot \sin x + 0 \cdot \sin 2x + 1 \cdot \sin^2 x + 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \cos 2x - 1 \cdot \cos^2 x = \mathbf{0},$$

co tłumaczy liniową zależność danych funkcji.

(c) Korzystając ze wzoru na kwadrat sumy otrzymamy

$$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9 = 4 \cdot x^2 + (-4) \cdot (3x) + (-9) \cdot (-1),$$

co oznacza liniową zależność podanych funkcji.

(d) Zachodzi łatwa do sprawdzenia równość

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

To oznacza liniową zależność podanych wektorów z przestrzeni $M_{2 \times 2}$.

► **Przykład 1.9.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ wektorami liniowo niezależnymi w tej przestrzeni. Zbadaj z definicji liniową niezależność podanych układów wektorów:

(a) $\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} - 3\mathbf{w} + \mathbf{x}, \mathbf{u} - \mathbf{x}$; (b) $\mathbf{u} - \mathbf{x}, \mathbf{v} - \mathbf{x}, \mathbf{w} - \mathbf{x}, \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{x}$.

Rozwiązanie.

(a) Niech $\alpha_1(\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \alpha_2(\mathbf{v} - 3\mathbf{w} + \mathbf{x}) + \alpha_3(\mathbf{u} - \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Po uporządkowaniu wyrazów otrzymamy równość

$$(\alpha_1 + \alpha_3)\mathbf{u} + (2\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{v} + (\alpha_1 - 3\alpha_2)\mathbf{w} + (\alpha_2 - \alpha_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Z liniowej niezależności wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ wynika, że

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 - 3\alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = 0.$$

Stąd $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Dane wektory są liniowo niezależne.

(b) Postępując podobnie założymy, że

$$\alpha_1(\mathbf{u} - \mathbf{x}) + \alpha_2(\mathbf{v} - \mathbf{x}) + \alpha_3(\mathbf{w} - \mathbf{x}) + \alpha_4(\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Wtedy

$$(\alpha_1 + \alpha_4)\mathbf{u} + (\alpha_2 - \alpha_4)\mathbf{v} + (\alpha_3 + \alpha_4)\mathbf{w} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

zatem z liniowej niezależności wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ otrzymujemy układ równań

$$\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_4 = \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Rozwiązanie tego układu ma postać $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_3 = -\alpha_4$, gdzie $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Przyjmując np. $\alpha_1 = 1$ możemy napisać, że

$$(\mathbf{u} - \mathbf{x}) - (\mathbf{v} - \mathbf{x}) + (\mathbf{w} - \mathbf{x}) - (\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Badane wektory są więc liniowo zależne.

► **Przykład 1.10.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ wektorami z tej przestrzeni. Uzasadnić, że jeżeli:

- (a) wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ są liniowo niezależne, to wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ też;
- (b) wśród wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ jest wektor zerowy, to wektory te są liniowo zależne.

Rozwiązanie. Wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{V}$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy jedyną kombinacją liniową tych wektorów będącą wektorem zerowym jest kombinacja o wszystkich współczynnikach zerowych. W przeciwnym przypadku mówimy, że wektory te są liniowo zależne.

- (a) Niech $\alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} + \alpha_3 \mathbf{w} = \mathbf{0}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Wówczas mamy

$$\alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} + \alpha_3 \mathbf{w} + 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Otrzymaliśmy liniową kombinacją wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$, która jest wektorem zerowym. Z liniowej niezależności tych wektorów wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To oczywiście oznacza liniową niezależność wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

- (b) Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Wówczas mamy

$$0 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{w} + 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

To oznacza, że wektor $\mathbf{0}$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$, której nie wszystkie współczynniki są zerowe. Wektory te są więc liniowo zależne.

► **Przykład 1.11*.** Uzasadnić, że funkcje $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$ są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Rozwiązanie. nieskończony układ wektorów jest liniowo niezależny, jeżeli każdy jego skończony podzbiór jest liniowo niezależny. Z kolei każdy podzbiór układu liniowo niezależnego jest liniowo niezależny. Wykorzystując oba te stwierdzenia wystarczy uzasadnić liniową niezależność funkcji $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Niech zatem

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \dots + \alpha_n \sin nx \equiv 0,$$

dla pewnych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Obliczając po obu stronach tej równości kolejne pochodne

$$\frac{d}{dx}, \quad \frac{d^2}{dx^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}$$

otrzymamy zależności:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \cos x + 2\alpha_2 \cos 2x + \dots + n\alpha_n \cos nx &\equiv 0, \\
 -\alpha_1 \sin x - 2^2\alpha_2 \sin 2x - \dots - n^2\alpha_n \sin nx &\equiv 0, \\
 -\alpha_1 \cos x - 2^3\alpha_2 \cos 2x - \dots - n^3\alpha_n \cos nx &\equiv 0, \\
 \alpha_1 \sin x + 2^4\alpha_2 \sin 2x + \dots + n^4\alpha_n \sin nx &\equiv 0, \\
 &\vdots \\
 \pm (\alpha_1 \cos x + 2^{2n-1}\alpha_2 \cos 2x + \dots + n^{2n-1}\alpha_n \cos nx) &\equiv 0.
 \end{aligned}$$

Wstawiając punkt $x = 0$ do wszystkich równości zawierających kosinusy (tzn. do wszystkich nieparzystych pochodnych wyjściowej równości) otrzymujemy układ równań postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & \dots & n^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tego układu jest równy

$$2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 \\ 1 & 4^2 & 9^2 & \dots & n^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 4^{n-1} & 9^{n-1} & \dots & n^{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Ostatni wyznacznik jest niezerowym wyznacznikiem Vandermonde'a, układ równań jest więc układem Cramera. To oznacza, że jedynym jego rozwiązaniem jest $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Stąd wynika, że badane funkcje są liniowo niezależne.

► **Przykład 1.12.** Uzasadnić, że dwa wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy są niewspółliniowe.

Rozwiązanie. Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ będą wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Prawdziwa jest zależność

$$|\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

Wektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ są zatem współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 y_2 = x_2 y_1$. Załóżmy najpierw, że wektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ są liniowo niezależne oraz załóżmy nie wprost, że

$x_1y_2 = x_2y_1$. Wtedy albo $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$, czyli $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$, albo np. $x_1 \neq 0$ i wtedy $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ dla $\alpha = y_1/x_1$, a to w obu przypadkach daje sprzeczność z liniową niezależnością wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. Uzasadniliśmy zatem, że z liniowej niezależności wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ wynika ich niewspółliniowość. Załóżmy z drugiej strony, że wektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ są niewspółliniowe, tzn. że $x_1y_2 \neq x_2y_1$. Niech $\alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{y} = \mathbf{0}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Równość tę możemy zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z założenia wynika, że jest to układ Cramera, więc $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. To oznacza liniową niezależność wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Baza i wymiar przestrzeni liniowej

► **Przykład 1.13.** Opisać (geometrycznie lub słownie) zbiory lin A , jeżeli:

(a) $A = \{(1, 3, 1), (0, 5, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$; (b) $A = \{x, x^3, x^5, x^7\} \subset \mathbb{R}[x]$;

(c) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_{2 \times 2}$.

Rozwiązanie.

(a) Mamy

$$\text{lin } A = \{s(1, 3, 1) + t(0, 5, 2) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(s, 3s + 5t, s + 2t) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Ponieważ wektory $(1, 3, 1), (0, 5, 2)$ są niewspółliniowe, więc zbiór lin A jest płaszczyzną w $\mathbb{R}^3$ o równaniu parametrycznym $x = s, y = 3s + 5t, z = s + 2t$ (lub ogólnym $x - 2y + 5z = 0$).

(b) Tutaj

$$\text{lin } A = \{ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Niech wielomian $\mathbf{p} \in \text{lin } A$. Wówczas $\mathbf{p}(-x) = -\mathbf{p}(x)$. Niech teraz $\mathbf{p}_1$ będzie wielomianem stopnia nie większego niż 7 o własności $\mathbf{p}_1(-x) = -\mathbf{p}_1(x)$, czyli

$$\mathbf{p}_1(x) = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

gdzie $0 \leq i \leq 7$. Z warunku $\mathbf{p}_1(-x) + \mathbf{p}_1(x) \equiv 0$ wynika, że $a_6 = a_4 = a_2 = a_0 = 0$. Zatem $\mathbf{p}_1 \in \text{lin } A$. Oznacza to, że zbiór lin A składa się ze wszystkich wielomianów stopnia nie większego niż 7 będących jednocześnie funkcjami nieparzystymi.

(c) W tym przykładzie

$$\text{lin } A = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 3c \\ 3c & 2b \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Otrzymaliśmy zatem zbiór wszystkich macierzy symetrycznych stopnia 2.