ALGEBRA LINIOWA

Teresa Jurlewicz   Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA LINIOWA

Przykłady i zadania

Wydanie ósme zmienione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2022

Teresa Jurlewicz
Przedsiębiorstwo Informatyczne Yuma
Wrocław
teresa.jurlewicz@yuma.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–62780–98–3

Wydanie VIII zmienione, Wrocław 2022
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. Kom.

Spis treści

Wstęp **7**

1 Przestrzenie liniowe **9**
1.1. Podstawowe definicje . . . 9
1.2. Podprzestrzenie przestrzeni liniowej . . . 10
1.3 Liniowa niezależność wektorów . . . 16
1.4. Baza i wymiar przestrzeni liniowej . . . 22
1.5. Współrzędne wektora w bazie . . . 32

2 Układy równań liniowych **44**
2.1. Rząd macierzy . . . 44
2.2. Twierdzenie Kroneckera-Capellego . . . 54
2.3. Układy jednorodne i niejednorodne . . . 66

3 Przekształcenia liniowe **77**
3.1. Podstawowe określenia . . . 77
3.2. Obraz i jądro przekształcenia liniowego . . . 81
3.3. Macierz przekształcenia liniowego . . . 88
3.4. Działania na przekształceniach liniowych . . . 99
3.5. Wartości i wektory własne przekształceń liniowych . . . 104
3.6. Wartości i wektory własne macierzy . . . 116

4 Przestrzenie euklidesowe **122**
4.1 Iloczyn skalarny . . . 122
4.2. Norma wektora. Ortogonalność wektorów . . . 125
4.3. Bazy ortogonalne . . . 130
4.4. Inne metody ortogonalizacji . . . 138
4.5. Rzut ortogonalny . . . 140
Zadania różne . . . 148

Zbiory zadań **150**

Wstęp

Zbiór zadań *„Algebra liniowa. Przykłady i zadania”* jest drugą częścią zestawu podręczników do Algebry liniowej. Pozostałymi częściami zestawu są książki *„Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory”* oraz *„Algebra liniowa. Kolokwia i egzaminy”*. Podręczniki te przeznaczone są głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci wydziałów nauk ścisłych uniwersytetów.

Zbiór *„Algebra liniowa. Przykłady i zadania”* zawiera przykładowe zadania z rozwiązaniami przedstawionymi „krok po kroku” oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Przykłady i zadania obejmują przestrzenie i przekształcenia liniowe, układy równań liniowych oraz przestrzenie euklidesowe. Materiał teoretyczny niezbędny do rozwiązywania zadań można znaleźć w książce pt. *„Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory”*. Podpunkty przykładów i zadań oznaczone początkowymi literami alfabetu są z reguły najprostsze. Z kolei przykłady i zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze.

W obecnym wydaniu, aby ułatwić korzystanie ze zbioru, zadania przeznaczone do samodzielnej pracy umieszczono bezpośrednio po rozwiązanych przykładach. Ponadto poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy koleżankom i kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym studentom za uwagi o poprzednich wydaniach. Uprzejmie prosimy czytelników o przesyłanie uwag o podręczniku oraz informacji o zauważonych błędach.

Teresa Jurlewicz *Zbigniew Skoczylas*

1. Przestrzenie liniowe

1.1. Podstawowe definicje

► **Przykład 1.1.** Uzasadnić z definicji, że zbiór $\mathbb{R}_2[x]$ wszystkich wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż 2 z dodawaniem wielomianów i mnożeniem ich przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową.

Rozwiązanie. Niech wielomiany $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ należą do zbioru $\mathbb{R}_2[x]$, przy czym $\boldsymbol{p}(x) = ax^2+bx+c$, $\boldsymbol{q}(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$, gdzie $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Z definicji

$$(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})(x) = \boldsymbol{p}(x)+\boldsymbol{q}(x) = (a+a_1)\,x^2+(b+b_1)\,x+c+c_1,$$
$$(\alpha\boldsymbol{p})(x) = \alpha\boldsymbol{p}(x) = (\alpha a)\,x^2+(\alpha b)\,x+\alpha c$$

wynika, że funkcje $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ oraz $\alpha\boldsymbol{p}$ są także wielomianami ze zbioru $\mathbb{R}_2[x]$. Sprawdzimy teraz kolejno 6 aksjomatów, które muszą spełniać działania w przestrzeniach liniowych.

(1) Dodawanie wielomianów jest przemienne, bowiem dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})(x) = \boldsymbol{p}(x)+\boldsymbol{q}(x) = \boldsymbol{q}(x)+\boldsymbol{p}(x) = (\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p})(x).$$

(2) Niech dodatkowo $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}_2[x]$. Łączność dodawania wielomianów wynika z warunku

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})+\boldsymbol{r}]\,(x) &= (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\,(x)+\boldsymbol{r}(x) = (\boldsymbol{p}(x)+\boldsymbol{q}(x))+\boldsymbol{r}(x)\\ &= \boldsymbol{p}(x)+(\boldsymbol{q}(x)+\boldsymbol{r}(x)) = \boldsymbol{p}(x)+(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})\,(x)\\ &= [\boldsymbol{p}+(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})]\,(x).\end{aligned}$$

(3) Elementem neutralnym dodawania wielomianów jest wielomian $\boldsymbol{p}_0 \equiv 0$ także należący do zbioru $\mathbb{R}_2[x]$.

(4) Elementem przeciwnym do wielomianu $\boldsymbol{p}$ jest wielomian

$$(-\boldsymbol{p})(x) = -\boldsymbol{p}(x).$$

(5) Załóżmy, że $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory

$$(1 \cdot \boldsymbol{p})(x) = 1 \cdot \boldsymbol{p}(x) = \boldsymbol{p}(x),$$

$$[\alpha(\beta\boldsymbol{p})](x) = \alpha(\beta\boldsymbol{p})(x) = \alpha(\beta\boldsymbol{p}(x)) = (\alpha\beta)\boldsymbol{p}(x) = [(\alpha\beta)\,\boldsymbol{p}](x),$$

a więc rzeczywiście $1 \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$ oraz $\alpha(\beta\boldsymbol{p}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{p}$.

(6) Ponadto prawdziwe są związki $(\alpha+\beta)\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{p}$ oraz $\alpha(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = \alpha\boldsymbol{p}+\alpha\boldsymbol{q}$, bowiem dla $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$[(\alpha+\beta)\,\boldsymbol{p}](x) = (\alpha+\beta)\boldsymbol{p}(x) = \alpha\boldsymbol{p}(x) + \beta\boldsymbol{p}(x) = (\alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{p})(x)$$

oraz

$$\begin{aligned}[\alpha(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})](x) &= \alpha\,[(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})(x)] = \alpha\,[\boldsymbol{p}(x) + \boldsymbol{q}(x)] \\ &= \alpha\boldsymbol{p}(x) + \alpha\boldsymbol{q}(x) = (\alpha\boldsymbol{p} + \alpha\boldsymbol{q})(x).\end{aligned}$$

Zauważmy, że własności (1) – (6) wynikały bezpośrednio z odpowiednich własności dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych.

▷ **Zadanie 1.1.** Uzasadnić z definicji, że zbiór wszystkich rzeczywistych macierzy trójkątnych górnych stopnia 2 wraz z dodawaniem macierzy i mnożeniem macierzy przez liczby rzeczywiste stanowi przestrzeń liniową.

1.2. Podprzestrzenie przestrzeni liniowej

▶ **Przykład 1.2.** Uzasadnić, że podane zbiory $\mathbb{W}$ są podprzestrzeniami liniowymi wskazanych przestrzeni liniowych $\mathbb{V}$:

(a) $\mathbb{W} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x = 3y\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$;

(b) $\mathbb{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = y+z = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$;

(c) $\mathbb{W} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_3[x] : \boldsymbol{p}(x) = \boldsymbol{p}(-x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$;

(d) $\mathbb{W} = \{\boldsymbol{f} \in \mathbb{C}([0,2]) : \boldsymbol{f}'(1) = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{C}([0,2])$;

(e) $\mathbb{W} = \left\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{3\times3} : \boldsymbol{A}^T = 2\boldsymbol{A}\right\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{3\times3}$.

Rozwiązanie. Zbiór $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{W}$ oraz dla dowolnych α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ mamy $\alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{W}$.

(a) Niech $\boldsymbol{w}_1 = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (x_2, y_2)$ oraz niech $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2).$$

Ponieważ $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{W}$, więc $2x_1 = 3y_1$, $2x_2 = 3y_2$. Stąd

$$2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 2x_1 + \alpha_2 2x_2 = \alpha_1 3y_1 + \alpha_2 3y_2 = 3(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2).$$

To oznacza, że $\alpha_1\boldsymbol{w}_1+\alpha_2\boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{W}$. Zatem $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{V}$.

(b) Warunek $x+y = y+z = 0$ oznacza, że $x = -y = z$, więc

$$\mathbb{W} = \{(x, -x, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Niech $\boldsymbol{w}_1 = (x_1, -x_1, x_1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (x_2, -x_2, x_2)$, gdzie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ oraz niech $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Wtedy wektor

$$\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 (-x_1) + \alpha_2 (-x_2), \ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

ma postać $(x, -x, x)$ dla $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, więc należy do zbioru $\mathbb{W}$. Zbiór $\mathbb{W}$ jest zatem podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{V}$.

(c) Niech $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{W}$ oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Funkcja $\alpha_1 \boldsymbol{p} + \alpha_2 \boldsymbol{q}$ jest oczywiście wielomianem stopnia mniejszego lub równego 3. Zachodzi też warunek

$$\begin{aligned}(\alpha_1 \boldsymbol{p} + \alpha_2 \boldsymbol{q})(x) &= \alpha_1 \boldsymbol{p}(x) + \alpha_2 \boldsymbol{q}(x) = \alpha_1 \boldsymbol{p}(-x) + \alpha_2 \boldsymbol{q}(-x) \\ &= (\alpha_1 \boldsymbol{p} + \alpha_2 \boldsymbol{q})(-x),\end{aligned}$$

więc $\alpha_1 \boldsymbol{p} + \alpha_2 \boldsymbol{q} \in \mathbb{W}$. Zbiór $\mathbb{W}$ jest zatem podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{V}$.

(d) Niech $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \mathbb{W}$ oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Funkcja $\alpha_1 \boldsymbol{f} + \alpha_2 \boldsymbol{g}$ jest ciągła na przedziale $[0, 2]$, bo obie funkcje $\boldsymbol{f}$ i $\boldsymbol{g}$ są ciągłe. Ponadto istnieje pochodna tej funkcji w punkcie 1, bo istnieją $\boldsymbol{f}'(1)$ i $\boldsymbol{g}'(1)$ oraz

$$\begin{aligned}(\alpha_1 \boldsymbol{f} + \alpha_2 \boldsymbol{g})'(1) &= (\alpha_1 \boldsymbol{f}' + \alpha_2 \boldsymbol{g}')(1) = \alpha_1 \boldsymbol{f}'(1) + \alpha_2 \boldsymbol{g}'(1) \\ &= \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Otrzymana równość świadczy o tym, że zbiór $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{C}([0, 2])$.

(e) Niech $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{W}$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy spełnione są warunki: $\boldsymbol{A}^T = 2\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^T = 2\boldsymbol{B}$. Korzystając z własności transponowania macierzy mamy

$$\begin{aligned}(\alpha \boldsymbol{A} + \beta \boldsymbol{B})^T &= (\alpha \boldsymbol{A})^T + (\beta \boldsymbol{B})^T = \alpha \boldsymbol{A}^T + \beta \boldsymbol{B}^T \\ &= \alpha (2\boldsymbol{A}) + \beta (2\boldsymbol{B}) = 2 (\alpha \boldsymbol{A} + \beta \boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

To oznacza, że $\alpha \boldsymbol{A} + \beta \boldsymbol{B} \in \mathbb{W}$. Zatem $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$.

▷ **Zadanie 1.2.** Uzasadnić, że podane zbiory $\mathbb{W}$ są podprzestrzeniami liniowymi wskazanych przestrzeni liniowych $\mathbb{V}$:

(a) $\mathbb{W} = \{(2x - y, y + z) \in \mathbb{R}^2 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$;

(b) $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = z - t\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$;

(c) $\mathbb{W} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{p}'(0)\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$;

(d) $\mathbb{W} = \left\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{3\times 3} : \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T\right\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{3\times 3}$.

► **Przykład 1.3.** Opisać wszystkie podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Rozwiązanie. Niech $\mathbb{W}$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Posługując się interpretacją przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ jako zbioru punktów płaszczyzny możemy wyróżnić jedynie trzy wzajemnie wykluczające się przypadki:

(1) $\mathbb{W} = \{(0,0)\}$;

(2) zbiór $\mathbb{W}$ zawiera punkt $A \neq O = (0,0)$ i nie zawiera żadnego punktu niewspółliniowego z punktami O i A. Jeżeli $A = (a,b)$, to dla każdego $t \in \mathbb{R}$ punkt $(at, bt) \in \mathbb{W}$, czyli cała prosta $l : x = at, y = bt$ zawiera się w zbiorze $\mathbb{W}$. Jednocześnie z założenia żaden punkt spoza prostej l nie należy do zbioru $\mathbb{W}$, a więc zbiór $\mathbb{W}$ jest prostą l. Ze względu na dowolność wyboru punktu A możemy stwierdzić, że wszystkie proste przechodzące przez początek układu współrzędnych są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^2$;

(3) zbiór $\mathbb{W}$ zawiera dwa punkty $A = (a,b)$, $B = (c,d)$ niewspółliniowe z punktem O. Wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ nie są więc równoległe, czyli $ad - bc \neq 0$. W tym przypadku $\mathbb{W} = \mathbb{R}^2$. Niech bowiem $C = (x,y)$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny. Istnieją wtedy stałe α_1, α_2 takie, że $C = \alpha_1 A + \alpha_2 B$. Wynika to z faktu, że układ równań $a\alpha_1 + c\alpha_2 = x$, $b\alpha_1 + d\alpha_2 = y$ jest układem Cramera o niewiadomych α_1, α_2. Ostatecznie jedynymi podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^2$ są: $\{(0,0)\}$, wszystkie proste przechodzące przez początek układu współrzędnych oraz $\mathbb{R}^2$.

▷ **Zadanie 1.3.** Opisać wszystkie podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Odpowiedzi. $\{(0,0,0)\}$, wszystkie proste i wszystkie płaszczyzny przechodzące przez punkt $(0,0,0)$ oraz $\mathbb{R}^3$.

▶ **Przykład 1.4.** Określić, które z podanych zbiorów $\mathbb{U}$, $\mathbb{W}$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni liniowych $\mathbb{V}$:

(a) $\mathbb{U} = \{(x,y,z) : yz \leqslant 0\}$, $\mathbb{W} = \{(x,y,z) : x + y + z = x - y = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$;

(b) $\mathbb{U} = \{(2x, x+y, 0, 1) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{W} = \{(x, x-y, z, y) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$;

(c) $\mathbb{U} = \left\{(x_n) : \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 0\right\}$, $\mathbb{W} = \{(x_n) : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony}\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^\infty$;

(d) $\mathbb{U} = \{\boldsymbol{p} : \text{stopień wielomianu } \boldsymbol{p} \text{ parzysty}\}$, $\mathbb{W} = \{\boldsymbol{p} : \boldsymbol{p}'(1) = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$;

(e) $\mathbb{U} = \{\boldsymbol{f} : \boldsymbol{f}(1) = \boldsymbol{f}(2)\}$, $\mathbb{W} = \{\boldsymbol{f} : \text{funkcja } \boldsymbol{f} \text{ jest monotoniczna}\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{C}(\mathbb{R})$;

(f) $\mathbb{U} = \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ x+y & 2x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\}$, $\mathbb{W} = \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{2\times 2} : \det \boldsymbol{A} = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. Aby uzasadnić, że zbiór nie jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej wystarczy wskazać dwa wektory należące do danego zbioru, których suma nie należy do tego zbioru lub też wektor, który po pomnożeniu przez pewną liczbę już nie należy do tego zbioru. Można też np. zauważyć, że wektor zerowy leży poza zbiorem, a to jest warunek konieczny dla podprzestrzeni liniowej. I tak w naszym przykładzie zbiór $\mathbb{U}$ zdefiniowany w podpunktach (a), (b), (c) i (d) oraz zbiór $\mathbb{W}$ określony w podpunktach (e), (f) nie są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednich przestrzeni liniowych, bowiem:

(a) $(0,3,-1),(0,-2,2) \in \mathbb{U}$, ale $(0,3,-1)+(0,-2,2)=(0,1,1) \notin \mathbb{U}$;
(b) $(0,0,0,0) \notin \mathbb{U}$;
(c) dla $x_n = 1+1/n$ ciąg $(x_n) \in \mathbb{U}$, ale ciąg $(-x_n) = -(x_n) \notin \mathbb{U}$;
(d) $x^4+x^3, x^4 \in \mathbb{U}$, ale $(x^4+x^3) - x^4 = x^3 \notin \mathbb{U}$;
(e) $\boldsymbol{f}(x) = \max(x,0), \boldsymbol{g}(x) = \min(x,0) \in \mathbb{W}$, ale $\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{g}(x) = |x| \notin \mathbb{W}$;
(f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{W}$, ale $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin \mathbb{W}$.

Pozostałe zbiory są podprzestrzeniami liniowymi, co uzasadnimy niżej. Niech zatem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Wówczas

(a) dla $\boldsymbol{w}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{W}$ wektor

$$\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)$$

należy do $\mathbb{W}$, bo

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \\ = \alpha_1 (x_1 + y_1 + z_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2 + z_2) = 0$$

oraz

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 (x_1 - y_1) + \alpha_2 (x_2 - y_2) = 0.$$

Inaczej można było napisać, że $\mathbb{W} = \{(x, x, -2x) : x \in \mathbb{R}\}$ i z tej postaci zbioru uzasadnić powyższe warunki;

(b) dla $\boldsymbol{w}_1 = (x_1, x_1 - y_1, z_1, y_1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (x_2, x_2 - y_2, z_2, y_2) \in \mathbb{W}$ wektor

$$\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 = \\ = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2), \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

należy do $\mathbb{W}$;

(c) dla ciągów ograniczonych (x_n), (y_n) ciąg

$$\alpha_1 (x_n) + \alpha_2 (y_n) = (\alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n)$$

jest też ograniczony, bowiem jeżeli $|x_n| \leqslant M_1 < \infty$ i $|y_n| \leqslant M_2 < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to

$$|\alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n| \leqslant |\alpha_1| |x_n| + |\alpha_2| |y_n| \leqslant |\alpha_1| M_1 + |\alpha_2| M_2 = M < \infty;$$

(d) dla $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{W}$ mamy

$$(\alpha_1 \boldsymbol{p} + \alpha_2 \boldsymbol{q})'(1) = \alpha_1 \boldsymbol{p}'(1) + \alpha_2 \boldsymbol{q}'(1) = 0,$$

przy czym $\alpha_1 \boldsymbol{p} + \alpha_2 \boldsymbol{q}$ jest też wielomianem, więc $\alpha_1 \boldsymbol{p} + \alpha_2 \boldsymbol{q} \in \mathbb{W}$;

(e) dla $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \mathbb{U}$ mamy

$$(\alpha_1 \boldsymbol{f} + \alpha_2 \boldsymbol{g})(1) = \alpha_1 \boldsymbol{f}(1) + \alpha_2 \boldsymbol{g}(1) = \alpha_1 \boldsymbol{f}(2) + \alpha_2 \boldsymbol{g}(2) = (\alpha_1 \boldsymbol{f} + \alpha_2 \boldsymbol{g})(2),$$

jednocześnie z własności funkcji ciągłych wynika, że funkcja $\alpha_1 \boldsymbol{f} + \alpha_2 \boldsymbol{g}$ jest ciągła, więc ostatecznie $\alpha_1 \boldsymbol{f} + \alpha_2 \boldsymbol{g} \in \mathbb{U}$;

(f) dla $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 + y_1 & 2x_1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_2 + y_2 & 2x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{U}$ macierz

$$\alpha_1 \boldsymbol{A} + \alpha_2 \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) & 2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \end{bmatrix} \in \mathbb{U}.$$

▷ **Zadanie 1.4.** Określić, które z podanych zbiorów $\mathbb{U}, \mathbb{W}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}$ są podprzestrzeniami liniowymi wskazanych przestrzeni liniowych $\mathbb{V}$:

(a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{U} = \{(x,y) : |x-y| \leqslant 1\}$, $\mathbb{W} = \left\{(x,y) : \ln\left(1 - x^2 - y^2\right) \geqslant 0\right\}$, $\mathbb{X} = \left\{(x,y) : 9x^2 + 12xy + 4y^2 = 0\right\}$, $\mathbb{Y} = \left\{(x,y) : 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 0\right\}$;

(b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $\mathbb{U} = \{(x,y,z,t) : 3|x| = 2|y|\}$, $\mathbb{W} = \{(xy, y, x, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{X} = \left\{(x,y,z,t) : x^2 + z^6 = 0\right\}$, $\mathbb{Y} = \{(x, x+y, -x, -y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^\infty$, $\mathbb{U} = \left\{(x_n) : \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty \text{ lub } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$,
$\mathbb{W} = \{(x_n) : \text{ istnieje } n_0 \in \mathbb{N} \text{ takie, że } x_n = 0 \text{ dla każdego } n \geqslant n_0\}$,
$\mathbb{X} = \{(x_n) : \text{ ciąg } (x_n) \text{ jest zbieżny lub stały}\}$,
$\mathbb{Y} = \{(x_n) : x_{n+2} = x_n + x_{n+1} \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}\}$;

(d) $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$, $\mathbb{U} = \{\boldsymbol{p} : \text{ stopień wielomianu } \boldsymbol{p} \text{ jest równy } 4\}$,
$\mathbb{W} = \{\boldsymbol{p} : 2\boldsymbol{p}(x) = \boldsymbol{p}(2x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{X} = \{\boldsymbol{p} : \boldsymbol{p}(0) = 0 \text{ lub } \boldsymbol{p}'(0) = 0\}$,
$\mathbb{Y} = \{\boldsymbol{p} : \text{ wielomian } \boldsymbol{p} \text{ jest funkcją parzystą}\}$;

(e) $\mathbb{V} = \mathbb{C}(\mathbb{R})$, $\mathbb{U} = \{\boldsymbol{f} : \text{ funkcja } \boldsymbol{f} \text{ jest niemalejąca}\}$,
$\mathbb{W} = \{\boldsymbol{f} : \text{ funkcja } \boldsymbol{f} \text{ jest różniczkowalna}\}$,
$\mathbb{X} = \{\boldsymbol{f} : \text{ funkcja } \boldsymbol{f} \text{ jest stała na zbiorze } \mathbb{N}\}$,
$\mathbb{Y} = \{\boldsymbol{f} : \boldsymbol{f}(x+y) = \boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{f}(y) \text{ dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R}\}$;

(f) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $\mathbb{U} = \left\{\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{W} = \{\boldsymbol{A} : \det \boldsymbol{A} \geqslant 0\}$,
$\mathbb{X} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : abcd = 0\right\}$, $\mathbb{Y} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + c = b\right\}$.

Odpowiedzi. Podprzestrzeniami liniowymi są zbiory: (a) $\mathbb{W}, \mathbb{X}$; (b) $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$; (c) $\mathbb{W}, \mathbb{X}, \mathbb{Y}$; (d) $\mathbb{W}, \mathbb{Y}$; (e) $\mathbb{W}, \mathbb{X}$; (f) $\mathbb{U}, \mathbb{Y}$. Pozostałe zbiory nie są podprzestrzeniami liniowymi.

▶ **Przykład 1.5.** Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{W}_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = z \text{ lub } y = t\right\}$,
$\mathbb{W}_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = z \text{ i } y = t\right\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$;

(b) $\mathbb{W}_1 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony i zbieżny}\}$,
$\mathbb{W}_2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony lub zbieżny}\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^\infty$?

Rozwiązanie. Wykorzystamy fakt, że część wspólna dwóch podprzestrzeni liniowych jest też podprzestrzenią liniową, zaś ich suma mnogościowa jest podprzestrzenią jedynie w przypadku, gdy jedna z nich zawiera się w drugiej.

(a) Niech $\mathbb{U}_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = z\right\}$ oraz $\mathbb{U}_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y = t\right\}$. Zbiory $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Ponadto $\mathbb{W}_1 = \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2$, $\mathbb{W}_2 = \mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$. Zbiór $\mathbb{U}_1$ nie zawiera się w $\mathbb{U}_2$ ani na odwrót, np. $\boldsymbol{w}_1 = (0,1,0,2) \in \mathbb{U}_1$, ale $\boldsymbol{w}_1 \notin \mathbb{U}_2$ oraz $\boldsymbol{w}_2 = (1,0,2,0) \in \mathbb{U}_2$, ale $\boldsymbol{w}_2 \notin \mathbb{U}_1$. Zatem zbiór $\mathbb{W}_1$ nie jest, a zbiór $\mathbb{W}_2$ jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^4$.

(b) Niech

$$\mathbb{U}_1 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest ograniczony}\}$$

oraz

$$\mathbb{U}_2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \text{ciąg } (x_n) \text{ jest zbieżny}\}.$$

Zbiory $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$. Wynika to z własności sum ciągów zbieżnych, ograniczonych i iloczynów tych ciągów przez liczby. Zauważmy, że $\mathbb{W}_1 = \mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$, $\mathbb{W}_2 = \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2$, a ponadto $\mathbb{U}_2 \subset \mathbb{U}_1$, bo każdy ciąg zbieżny jest ograniczony. Stąd wynika, że oba zbiory $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$ są podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^\infty$.

$\triangleright$ **Zadanie 1.5.** Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{W}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0 \text{ lub } x = y\}$,
$\mathbb{W}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0 \text{ i } x = y\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$;

(b) $\mathbb{W}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \text{ i } x = 0\}$,
$\mathbb{W}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \text{ lub } x = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$;

(c) $\mathbb{W}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 4y = 0 \text{ i } 3x - z = 0\}$,
$\mathbb{W}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 4y = 0 \text{ lub } 3x - z = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$;

(d) $\mathbb{W}_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \text{ lub } x^2 = 4y^2\}$,
$\mathbb{W}_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \text{ i } x^2 = 4y^2\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$;

(e) $\mathbb{W}_1 = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} x_n \text{ istnieje i } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$,
$\mathbb{W}_2 = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} x_n \text{ istnieje lub } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^\infty$;

(f) $\mathbb{W}_1 = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}[x] : \boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}(1) = 0 \text{ lub } \boldsymbol{p} \text{ ma co najmniej dwa miejsca zerowe}\}$
$\mathbb{W}_2 = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}[x] : \boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}(1) = 0 \text{ i } \boldsymbol{p} \text{ ma co najmniej dwa miejsca zerowe}\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$;

(g) $\mathbb{W}_1 = \{\boldsymbol{f} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) : \text{ istnieje } \boldsymbol{f}' \text{ na } \mathbb{R} \text{ i } \boldsymbol{f} \text{ jest funkcją stałą}\}$;
$\mathbb{W}_2 = \{\boldsymbol{f} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) : \text{ istnieje } \boldsymbol{f}' \text{ na } \mathbb{R} \text{ lub } \boldsymbol{f} \text{ jest funkcją stałą}\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{C}(\mathbb{R})$?

Odpowiedzi. Podprzestrzeniami liniowymi są jedynie zbiory: (a) $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$; (b) $\mathbb{W}_1$; (c) $\mathbb{W}_1$; (d) $\mathbb{W}_2$; (e) $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$; (f) $\mathbb{W}_2$; (g) $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$.

1.3. Liniowa niezależność wektorów

► **Przykład 1.6.** Wektory $(1,2,3)$, $(1,3,5)$ przedstawić na wszystkie możliwe sposoby jako kombinacje liniowe wektorów:

(a) $(2,0,6),(0,1,0),(1,-1,3)$; (b) $(2,0,6),(0,1,0),(1,1,1)$.

Rozwiązanie. (a) Z równości $(1,2,3) = a(2,0,6)+b(0,1,0)+c(1,-1,3)$, gdzie $a,b,c \in \mathbb{R}$, wynika układ równań $2a+c = 1$, $b-c = 2$, $6a+3c = 3$. Rozwiązanie tego układu ma postać $a = (1-c)/2$, $b = 2+c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$. Istnieje więc nieskończenie wiele kombinacji liniowych, mianowicie

$$(1,2,3) = \frac{1-c}{2}(2,0,6) + (2+c)(0,1,0) + c(1,-1,3), \text{ gdzie } c \in \mathbb{R}.$$

Niech teraz $(1,3,5) = a(2,0,6)+b(0,1,0)+c(1,-1,3)$. Układ równań $2a+c = 1$, $b-c = 3$, $6a+3c = 5$ jest sprzeczny, a to oznacza, że wektora $(1,3,5)$ nie można przedstawić w postaci kombinacji liniowej danych wektorów.

(b) Postępując podobnie mamy $(1,2,3) = a(2,0,6)+b(0,1,0)+c(1,1,1)$, gdzie $a,b,c \in \mathbb{R}$. Stąd wynika, że $2a+c = 1$, $b+c = 2$, $6a+c = 3$. Otrzymany układ równań jest układem Cramera posiadającym jedyne rozwiązanie $a = 1/2$, $b = 2$, $c = 0$. Wektor $(1,2,3)$ ma więc tylko jedno przedstawienie, tzn.

$$(1,2,3) = \frac{1}{2}(2,0,6) + 2(0,1,0).$$

Dla wektora $(1,3,5)$ także istnieje tylko jedna kombinacja liniowa mająca postać $(1,3,5) = (2,0,6) + 4(0,1,0) - (1,1,1)$.

▷ **Zadanie 1.6.** Wektory $(3,-2,5)$, $(0,1,1)$ przedstawić na wszystkie możliwe sposoby jako kombinacje liniowe wektorów:

(a) $(3,-2,5)$, $(1,1,1)$; (b) $(3,-2,5)$, $(1,1,1)$, $(0,-5,2)$;

(c) $(1,-2,3)$, $(1,0,1)$, $(0,2,-1)$; (d) $(1,-2,3)$, $(1,0,1)$, $(-1,-2,1)$.

Odpowiedzi. (a) $(3,-2,5) = 1\cdot(3,-2,5) + 0\cdot(1,1,1)$, wektor $(0,1,1)$ nie jest kombinacją liniową; (b) $(3,-2,5) = a(3,-2,5) + (3-3a)(1,1,1) + (1-a)(0,-5,2)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, wektor $(0,1,1)$ nie jest kombinacją liniową; (c) $(3,-2,5) = 1\cdot(1,-2,3) + 2\cdot(1,0,1)$, $(0,1,1) = (3/2)\cdot(1,-2,3) - (3/2)\cdot(1,0,1) + 2\cdot(0,2,-1)$; (d) $(3,-2,5) = a(1,-2,3) + (4-2a)(1,0,1) + (1-a)(-1,-2,1)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, wektor $(0,1,1)$ nie jest kombinacją liniową.

► **Przykład 1.7.** Zbadać z definicji liniową niezależność podanych układów wektorów w odpowiednich przestrzeniach liniowych:

(a) $(2,0,6),(0,1,0),(1,-1,3)$; $(2,0,6),(0,1,0),(1,1,1)$, $\mathbb{R}^3$;

(b) $1+x^2, 1-x^2, 1+2x$; $1+x, 2-x, 3x-5$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(c) $1, \sin x, \cos x$; $1, \operatorname{arc\,tg} x, \operatorname{arc\,ctg} x$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Rozwiązanie. Wektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_n \in \mathbb{V}$ są liniowo niezależne, jeżeli dla dowolnych α_1, α_2, …, $\alpha_n \in \mathbb{R}$ z warunku $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$

wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Gdy tak nie jest, wektory są liniowo zależne.

(a) Warunek $\alpha_1(2,0,6) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(1,-1,3) = \mathbf{0} = (0,0,0)$ prowadzi do układu równań $2\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, $6\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0$. Rozwiązanie tego układu ma postać $\alpha_2 = \alpha_3 = -2\alpha_1$, gdzie $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Przyjmując np. $\alpha_1 = 1$ możemy napisać, że $(2,0,6) - 2(0,1,0) - 2(1,-1,3) = (0,0,0)$, a to oznacza liniową zależność danych wektorów. Dla wektorów $(2,0,6)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ z warunku $\alpha_1(2,0,6) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(1,1,1) = (0,0,0)$, otrzymamy układ równań Cramera $2\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $6\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ i jego jedyne rozwiązanie $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Wektory $(2,0,6)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ są więc liniowo niezależne.

(b) Załóżmy, że $\alpha_1\left(1+x^2\right) + \alpha_2\left(1-x^2\right) + \alpha_3(1+2x) = \mathbf{0} \equiv 0$. Wielomian $(\alpha_1 - \alpha_2)\,x^2 + 2\alpha_3 x + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ jest więc wielomianem zerowym. Stąd wynika, że $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, $2\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, a więc $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. To oznacza liniową niezależność pierwszej trójki wielomianów. Dla drugiej trójki z warunku $\alpha_1(1+x) + \alpha_2(2-x) + \alpha_3(3x-5) \equiv 0$ odczytujemy, że $\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$ i $\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0$. Ten jednorodny układ równań posiada niezerowe rozwiązania, bowiem $\alpha_2 = -8\alpha_1$, $\alpha_3 = -3\alpha_1$, gdzie $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Dla $\alpha_1 = 1$ otrzymujemy równość $(1+x) - 8(2-x) - 3(3x-5) \equiv 0$ oznaczającą liniową zależność danych wielomianów.

(c) Niech $\alpha_1 + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x = \mathbf{0} \equiv 0$. Funkcja występująca po lewej stronie równości w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ przyjmuje wartość 0. Dla $x = 0$ otrzymujemy równość $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, dla $x = \pi/2$ warunek $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, a dla $x = \pi$ mamy $\alpha_1 - \alpha_3 = 0$ Stąd wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, więc dane funkcje są liniowo niezależne. Zauważmy, że dobieraliśmy tu takie wartości x, aby otrzymać układ Cramera zmiennych $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Dla funkcji $1, \operatorname{arc\,tg} x, \operatorname{arc\,ctg} x$ wstawienie różnych wartości x do warunku $\alpha_1 + \alpha_2 \operatorname{arc\,tg} x + \alpha_3 \operatorname{arc\,ctg} x = 0$ nie prowadzi niestety do układu Cramera. Należy więc podejrzewać, że funkcje te są liniowo zależne. Aby to ściśle uzasadnić, wystarczy powołać się na znaną tożsamość dla funkcji cyklometrycznych:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x \equiv \frac{\pi}{2}$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Przepisując ten warunek w postaci

$$\frac{\pi}{2} \cdot 1 - \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,ctg} x \equiv 0$$

wnioskujemy, że dane funkcje są rzeczywiście liniowo zależne.

$\triangleright$ **Zadanie 1.7.** Zbadać z definicji liniową niezależność podanych układów wektorów w odpowiednich przestrzeniach liniowych:

(a) $(1,4), (2,3), (1,1), (5,6)$, $\mathbb{R}^2$;

(b) $(1,-2,3), (1,0,1), (0,2,-1)$; $(1,-2,3), (1,0,1), (-1,-2,1)$, $\mathbb{R}^3$;

(c) $3-x,\ 4+x,\ 2x+3;\ \ 2-x^3,\ 3x+2,\ x^2+x-1,\ \mathbb{R}[x];$

(d) $1, \cos x, \cos 2x, \cos^2 x;\ \ 1, x, \cos x, e^x,\ \mathbb{C}(\mathbb{R});$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbb{M}_{2\times 2};$

(f) $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2$ dla $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbb{M}_{2\times 2}.$

Odpowiedzi. Wektory są liniowo (a) zależne; (b) niezależne, zależne; (c) zależne, niezależne; (d) zależne, niezależne; (e) zależne; (f) zależne.

► **Przykład 1.8.** Uzasadnić liniową zależność podanych wektorów we wskazanych przestrzeniach liniowych przedstawiając jeden z tych wektorów jako kombinację liniową pozostałych:

(a) $(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ \mathbb{R}^2$; (b) $\sin x,\ \sin 2x,\ \sin^2 x,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos^2 x,\ \mathbb{C}(\mathbb{R})$;

(c) $(2x-3)^2,\ x^2,\ 3x,\ -1,\ \mathbb{R}_2[x]$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \mathbb{M}_{2\times 2}.$

Rozwiązanie. (a) Nietrudno zauważyć, że $(1,2)+(3,4)=(4,6)=2\cdot(2,3)$. Z tej równości wynika, że każdy z podanych wektorów jest kombinacją liniową pozostałych, np. $(1,2)=2(2,3)-(3,4)$. To oznacza liniową zależność tych wektorów, bowiem zgodnie z definicją

$$(1,2)-2\cdot(2,3)+(3,4)=\mathbf{0}.$$

(b) Tu wystarczy zastosować wzór $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ i wtedy

$$0\cdot\sin x + 0\cdot\sin 2x + 1\cdot\sin^2 x + 0\cdot\cos x + 1\cdot\cos 2x - 1\cdot\cos^2 x = \mathbf{0},$$

co tłumaczy liniową zależność danych funkcji.

(c) Korzystając ze wzoru na kwadrat sumy otrzymamy

$$(2x-3)^2 = 4x^2-12x+9 = 4\cdot x^2 + (-4)\cdot(3x) + (-9)\cdot(-1),$$

co oznacza liniową zależność podanych funkcji.

(d) Zachodzi łatwa do sprawdzenia równość

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 5\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

To oznacza liniową zależność podanych wektorów z przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

▷ **Zadanie 1.8.** Uzasadnić liniową zależność podanych wektorów we wskazanych przestrzeniach liniowych przedstawiając jeden z tych wektorów jako kombinację liniową pozostałych:

(a) $(1,2,3),\ (2,3,4),\ (1,1,1),\ \mathbb{R}^3$;

(b) $x^4-x^3+x^2-x+1,\ x^3+x^2+x,\ x^3-x^2+x,\ x^4+x^3+x^2+x+1,\ \mathbb{R}_4[x]$;

(c) $\sin x, \sin(\pi/2 - x), \sin(\pi/3 - x)$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$;

(d) $\arcsin x, \arccos x, 1$, $\mathbb{C}([-1,1])$.

Odpowiedzi. (a) $(1,1,1) = (2,3,4) - (1,2,3)$; (b) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (x^3 + x^2 + x) - (x^3 - x^2 + x)$; (c) $\sin(\pi/3 - x) = (\sqrt{3}/2)\sin(\pi/2 - x) - (1/2)\sin x$; (d) $1 = (2/\pi)\arcsin x + (2/\pi)\arccos x$.

► **Przykład 1.9.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ wektorami liniowo niezależnymi w tej przestrzeni. Zbadać z definicji liniową niezależność podanych układów wektorów:

(a) $\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} - 3\boldsymbol{w} + \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}$; (b) $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}$.

Rozwiązanie. (a) Niech $\alpha_1(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + \alpha_2(\boldsymbol{v} - 3\boldsymbol{w} + \boldsymbol{x}) + \alpha_3(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, gdzie α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Po uporządkowaniu wyrazów otrzymamy równość

$$(\alpha_1 + \alpha_3)\boldsymbol{u} + (2\alpha_1 + \alpha_2)\boldsymbol{v} + (\alpha_1 - 3\alpha_2)\boldsymbol{w} + (\alpha_2 - \alpha_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Z liniowej niezależności wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ wynika, że

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 - 3\alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = 0.$$

Stąd $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Dane wektory są liniowo niezależne.

(b) Postępując podobnie załóżmy, że

$$\alpha_1(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}) + \alpha_2(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}) + \alpha_3(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}) + \alpha_4(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

Wtedy

$$(\alpha_1 + \alpha_4)\boldsymbol{u} + (\alpha_2 - \alpha_4)\boldsymbol{v} + (\alpha_3 + \alpha_4)\boldsymbol{w} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

zatem z liniowej niezależności wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ otrzymujemy układ równań

$$\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_4 = \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Rozwiązanie tego układu ma postać $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_3 = -\alpha_4$, gdzie $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Przyjmując np. $\alpha_1 = 1$ możemy napisać, że

$$(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

Badane wektory są więc liniowo zależne.

▷ **Zadanie 1.9.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ wektorami liniowo niezależnymi w tej przestrzeni. Zbadać z definicji liniową niezależność podanych układów wektorów:

(a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$; (b) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} + \boldsymbol{x}$;

(c) $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}$; (d) $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}$;

(e) $\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} + 5\boldsymbol{w}, 2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + 3\boldsymbol{w}, 3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + 4\boldsymbol{w}$;

(f) $2\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x}, 4\boldsymbol{u} + 7\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} + 2\boldsymbol{x}$.

Odpowiedzi. Wektory są liniowo (a), (b), (c) niezależne, (d), (e), (f) zależne.

► **Przykład 1.10.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ wektorami z tej przestrzeni. Uzasadnić, że jeżeli:

(a) wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, są liniowo niezależne, to wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ też;

(b) wśród wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ jest wektor zerowy, to wektory te są liniowo zależne.

Rozwiązanie. Wektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{V}$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy jedyną kombinacją liniową tych wektorów będącą wektorem zerowym jest kombinacja o wszystkich współczynnikach zerowych. W przeciwnym przypadku mówimy, że wektory te są liniowe zależne.

(a) Niech $\alpha_1\boldsymbol{u} + \alpha_2\boldsymbol{v} + \alpha_3\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Wówczas mamy

$$\alpha_1\boldsymbol{u} + \alpha_2\boldsymbol{v} + \alpha_3\boldsymbol{w} + 0 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Otrzymaliśmy liniową kombinacją wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, która jest wektorem zerowym. Z liniowej niezależności tych wektorów wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To oczywiście oznacza liniową niezależność wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.

(b) Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Wówczas mamy

$$0 \cdot \boldsymbol{u} + 0 \cdot \boldsymbol{v} + 0 \cdot \boldsymbol{w} + 1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

To oznacza, że wektor $\boldsymbol{0}$ jest kombinacją liniową wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, której nie wszystkie współczynniki są zerowe. Wektory te są więc liniowo zależne.

▷ **Zadanie 1.10.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ wektorami z tej przestrzeni. Uzasadnić, że jeżeli wektory:

(a) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ są liniowo zależne, to wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ też są liniowo zależne;

(b) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ są liniowo niezależne, a wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ liniowo zależne, to wektor $\boldsymbol{w}$ jest kombinacją liniową wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$;

(c) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ są liniowo niezależne i wektor $\boldsymbol{x}$ nie jest kombinacją liniową tych wektorów, to wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ są liniowo niezależne;

(d) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ są liniowo niezależne, a wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$ są liniowo zależne, to wektor $\boldsymbol{x}$ jest kombinacją liniową wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.

(e*) Co można powiedzieć o liniowej niezależności wektorów $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$, jeżeli wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ są liniowo zależne ?

Odpowiedzi. (e*) wektory są liniowo zależne.

► **Przykład 1.11*.** Uzasadnić, że funkcje $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\ldots$ są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Rozwiązanie. Nieskończony układ wektorów jest liniowo niezależny, jeżeli każdy jego skończony podzbiór jest liniowo niezależny. Z kolei każdy podzbiór układu liniowo niezależnego jest liniowo niezależny. Wykorzystując oba te stwierdzenia wystarczy uzasadnić liniową niezależność funkcji $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Niech zatem

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \ldots + \alpha_n \sin nx \equiv 0,$$

dla pewnych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Obliczając po obu stronach tej równości kolejne pochodne

$$\frac{d}{dx},\ \frac{d^2}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}$$

otrzymamy zależności:

$$\begin{array}{rcrcccrcl}
\alpha_1 \cos x & + & 2\alpha_2 \cos 2x & + & \ldots & + & n\alpha_n \cos nx & \equiv & 0, \\
-\alpha_1 \sin x & - & 2^2\alpha_2 \sin 2x & - & \ldots & - & n^2\alpha_n \sin nx & \equiv & 0, \\
-\alpha_1 \cos x & - & 2^3\alpha_2 \cos 2x & - & \ldots & - & n^3\alpha_n \cos nx & \equiv & 0, \\
\alpha_1 \sin x & + & 2^4\alpha_2 \sin 2x & + & \ldots & + & n^4\alpha_n \sin nx & \equiv & 0, \\
 & & & & \vdots & & & & \vdots \\
\pm\left(\alpha_1 \cos x\right. & + & 2^{2n-1}\alpha_2 \cos 2x & + & \ldots & + & \left.n^{2n-1}\alpha_n \cos nx\right) & \equiv & 0.
\end{array}$$

Wstawiając punkt $x = 0$ do wszystkich równości zawierających kosinusy (tzn. do wszystkich nieparzystych pochodnych wyjściowej równości) otrzymujemy układ równań postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \ldots & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & \ldots & n^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \ldots & n^{2n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tego układu jest równy

$$2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 4 & 9 & \ldots & n^2 \\ 1 & 4^2 & 9^2 & \ldots & n^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 4^{n-1} & 9^{n-1} & \ldots & n^{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Ostatni wyznacznik jest niezerowym wyznacznikiem Vandermonde'a, układ równań jest więc układem Cramera. To oznacza, że jedynym jego rozwiązaniem jest $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Stąd wynika, że badane funkcje są liniowo niezależne.

$\triangleright$ **Zadanie 1.11.** Uzasadnić liniową niezależność podanych nieskończonych układów wektorów z odpowiednich przestrzeni liniowych:

(a) $\{(1,0,0,\ldots),(1,1,0,\ldots),(1,1,1,\ldots),\ldots\}$, $\mathbb{R}^\infty$; (b) $\{1, x, x^2, \ldots\}$, $\mathbb{R}[x]$;

(c) $\left\{\boldsymbol{p}_n \in \mathbb{R}[x] : \boldsymbol{p}_n(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1} \text{ dla } x \neq 1, n \in \mathbb{N}\right\}$, $\mathbb{R}[x]$;

(d*) $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots\}$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$; (e*) $\{e^{tx} : t \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

► **Przykład 1.12.** Uzasadnić, że dwa wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy są niewspółliniowe.

Rozwiązanie. Niech $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ będą wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Prawdziwa jest zależność

$$|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\sin\sphericalangle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left|\begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix}\right| = |x_1y_2 - x_2y_1|\,.$$

Wektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ są zatem współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1y_2 = x_2y_1$. Załóżmy najpierw, że wektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ są liniowo niezależne oraz załóżmy nie wprost, że $x_1y_2 = x_2y_1$. Wtedy albo $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$, czyli $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, albo np. $x_1 \neq 0$ i wtedy $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$ dla $\alpha = y_1/x_1$, a to w obu przypadkach daje sprzeczność z liniową niezależnością wektorów $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$. Uzasadniliśmy zatem, że z liniowej niezależności wektorów $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ wynika ich niewspółliniowość. Załóżmy z drugiej strony, że wektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ są niewspółliniowe, tzn. że $x_1y_2 \neq x_2y_1$. Niech $\alpha_1\boldsymbol{x} + \alpha_2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Równość tę możemy zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z założenia wynika, że jest to układ Cramera, więc $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. To oznacza liniową niezależność wektorów $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$.

▷ **Zadanie 1.12.** Uzasadnić, że dowolne trzy niewspółpłaszczyznowe wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne.

1.4. Baza i wymiar przestrzeni liniowej

► **Przykład 1.13.** Opisać (geometrycznie lub słownie) zbiory $\operatorname{lin} A$, jeżeli:

(a) $A = \{(1,3,1), (0,5,2)\} \subset \mathbb{R}^3$; (b) $A = \{x, x^3, x^5, x^7\} \subset \mathbb{R}[x]$;

(c) $A = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. (a) Mamy

$$\operatorname{lin} A = \{s(1,3,1) + t(0,5,2) : s,t \in \mathbb{R}\} = \{(s, 3s+5t, s+2t) : s,t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Ponieważ wektory $(1,3,1)$, $(0,5,2)$ są niewspółliniowe, więc zbiór $\operatorname{lin} A$ jest płaszczyzną w $\mathbb{R}^3$ o równaniu parametrycznym $x = s$, $y = 3s + 5t$, $z = s + 2t$ (lub ogólnym $x - 2y + 5z = 0$).

(b) Tutaj

$$\operatorname{lin} A = \left\{ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 : a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}.$$

Niech wielomian $\boldsymbol{p} \in \operatorname{lin} A$. Wówczas $\boldsymbol{p}(-x) = -\boldsymbol{p}(x)$. Niech teraz $\boldsymbol{p}_1$ będzie wielomianem stopnia nie większego niż 7 o własności $\boldsymbol{p}_1(-x) = -\boldsymbol{p}_1(x)$, czyli

$$\boldsymbol{p}_1(x) = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \ a_i \in \mathbb{R},$$

gdzie $0 \leqslant i \leqslant 7$. Z warunku $\boldsymbol{p}_1(-x) + \boldsymbol{p}_1(x) \equiv 0$ wynika, że $a_6 = a_4 = a_2 = a_0 = 0$. Zatem $\boldsymbol{p}_1 \in \operatorname{lin} A$. Oznacza to, że zbiór $\operatorname{lin} A$ składa się ze wszystkich wielomianów stopnia nie większego niż 7 będących jednocześnie funkcjami nieparzystymi.

(c) W tym przykładzie

$$\operatorname{lin} A = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 3c \\ 3c & 2b \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Otrzymaliśmy zatem zbiór wszystkich macierzy symetrycznych stopnia 2.

▷ **Zadanie 1.13.** Opisać (geometrycznie lub słownie) zbiory $\operatorname{lin} A$, jeżeli:

(a) $A = \{(5, -1, 4), (-10, 2, -8)\} \subset \mathbb{R}^3$;

(b) $A = \{x + 3, x(x + 3), x^2(x + 3), x^3(x + 3)\} \subset \mathbb{R}[x]$;

(c) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{M}_{3\times 3}$;

(d*) $A = \{(1, 1, 1, 1, 1 \ldots), (0, 2, 2, 2, 2 \ldots), (0, 0, 3, 3, 3, \ldots), \ldots\} \subset \mathbb{R}^\infty$.

Odpowiedzi. (a) prosta $x = 5t$, $y = -t$, $z = 4t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$; (b) $\{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_4[x] : \boldsymbol{p}(-3) = 0\}$; (c) zbiór macierzy antysymetrycznych stopnia 3; (d*) zbiór wszystkich ciągów stałych od pewnego miejsca.

▶ **Przykład 1.14.** Wyznaczyć generatory podanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{V} = \{(x - 2y, x + y + 3z, y - 4z, 2x + z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\mathbb{V} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-1} \right\}$;

(c) $\mathbb{V} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_4[x] : \boldsymbol{p}(1) + \boldsymbol{p}'(0) = \boldsymbol{p}'(1) + \boldsymbol{p}''(0) = 0\}$;

(d) $\mathbb{V} = \left\{ \boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{3\times 3} : \boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \right\}$.

Rozwiązanie. (a) Dowolny wektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ można zapisać w postaci

$$\boldsymbol{v} = x(1, 1, 0, 2) + y(-2, 1, 1, 0) + z(0, 3, -4, 1),$$

gdzie $x, y, z \in \mathbb{R}$, zatem $\mathbb{V} = \operatorname{lin}\{(1, 1, 0, 2), (-2, 1, 1, 0), (0, 3, -4, 1)\}$.

(b) Warunek definiujący zbiór $\mathbb{V}$ jest równaniem kierunkowym prostej o równaniu parametrycznym $x = 2s$, $y = 3s$, $z = -s$, a więc

$$\mathbb{V} = \{(2s, 3s, -s) : s \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{(2, 3, -1)\}.$$

(c) Niech $\boldsymbol{p} \in \mathbb{V}$. Wówczas $\boldsymbol{p}(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Z warunków

$$\boldsymbol{p}(1) + \boldsymbol{p}'(0) = a + b + c + 2d + e = 0,$$
$$\boldsymbol{p}'(1) + \boldsymbol{p}''(0) = 4a + 3b + 4c + d = 0$$

wynikają równości $d = -4a - 3b - 4c$, $e = 7a + 5b + 7c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\boldsymbol{p}(x) = a\left(x^4 - 4x + 7\right) + b\left(x^3 - 3x + 5\right) + c\left(x^2 - 4x + 7\right).$$

Oznacza to, że $\mathbb{V} = \operatorname{lin}\left\{x^4 - 4x + 7, x^3 - 3x + 5, x^2 - 4x + 7\right\}$.

(d) Niech $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ x & y & z \end{bmatrix}$ będzie dowolną macierzą z przestrzeni $\mathbb{M}_{3\times 3}$. Warunek

$$\boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

jest równoważny układowi równań:

$$\begin{cases} r = p, \\ q = q, \\ p = r, \\ u = s, \\ t = t, \\ s = u, \\ z = x, \\ y = y, \\ x = z, \end{cases}$$

który z kolei jest równoważny układowi:

$$\begin{cases} r = p, \\ u = s, \\ z = x. \end{cases}$$

Przyjmując, że p, q, s, t, x, y są parametrami, otrzymamy szukaną macierz w postaci

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} p & q & p \\ s & t & s \\ x & y & x \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\begin{bmatrix} p & q & p \\ s & t & s \\ x & y & x \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$
$$+x\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

więc można przyjąć, że macierze

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

generują przestrzeń $\mathbb{V}$.

▷ **Zadanie 1.14.** Wyznaczyć generatory podanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x - y + 2z = 0\}$;

(b) $\mathbb{V} = \{(2r + s - t, t - u, r + 3s + u, s + u, t - u) : r, s, t, u \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\mathbb{V} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = y - z = z - t\}$;

(d) $\mathbb{V} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_3[x] : \boldsymbol{p}(1) + \boldsymbol{p}(2) = \boldsymbol{p}(3) + \boldsymbol{p}'(0)\}$.

Odpowiedzi. Przestrzenie są generowane np. przez wektory (a) $(1, 4, 0)$, $(0, 2, 1)$; (b) $(2, 0, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 3, 1, 0)$, $(-1, 1, 0, 0, 1)$, $(0, -1, 1, 1, -1)$; (c) $(1, 0, -1, -2)$, $(0, 1, 2, 3)$; (d) $x^3 + 18$, $x^2 + 4$, $x + 1$.

► **Przykład 1.15.** Sprawdzić z definicji, czy podane zbiory wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(b) $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2), (0, 1, 1)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(c) $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2), (2, 2, 3)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(d) $B = \{(1, 0, 1), (1, 2, 2), (0, 1, 1), (2, 3, 4)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(e) $B = \{x^2 + 1, x^2 + 2x + 2, x + 1\}$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(f) $B = \{x^2 + 1, x^2 + 2x + 2, 2x^2 + 2x + 3\}$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(g) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. Zbiór $B \subset \mathbb{V}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, gdy jest liniowo niezależny i generuje tę przestrzeń.

(a) Zbiór B jest liniowo niezależny, ale nie generuje przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdyż np. wektora $(0, 0, 1)$ nie da się przedstawić w postaci kombinacji liniowej danych wektorów. Nie jest to więc baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(b) Zbiór B jest liniowo niezależny. Niech $\boldsymbol{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Szukamy współczynników $a, b, c \in \mathbb{R}$ takich, że $\boldsymbol{v} = a(1, 0, 1) + b(1, 2, 2) + c(0, 1, 1)$. Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a + b \phantom{{}+c} = x, \\ \phantom{a+{}} 2b + c = y, \\ a + 2b + c = z, \end{cases}$$

który jest układem Cramera o niewiadomych a, b, c. Stąd wynika, że zbiór B

generuje przestrzeń $\mathbb{R}^3$, a zatem jest jej bazą.

(c) Zbiór B jest liniowo zależny, bo np. $(2,2,3) = (1,0,1) + (1,2,2)$. Nie jest on więc bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(d) Zbiór B generuje przestrzeń $\mathbb{R}^3$, bo zawiera on wszystkie wektory z przykładu (b). Jednak nie jest on bazą $\mathbb{R}^3$, bo np. zachodzi związek $(2,3,4) = (1,0,1) + (1,2,2) + (0,1,1)$ przeczący liniowej niezależności tego zbioru.

(e) Z równości

$$a\left(x^2+1\right) + b\left(x^2+2x+2\right) + c(x+1) \equiv 0$$

wynika, że $a+b = 2b+c = a+2b+c = 0$, więc $a=b=c=0$. Oznacza to liniową niezależność zbioru B. Niech teraz $\boldsymbol{p} = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \in \mathbb{R}_2[x]$. Wówczas dla $a = \gamma - \beta$, $b = \alpha + \beta - \gamma$, $c = -2\alpha - \beta + 2\gamma$ zachodzi równość

$$\boldsymbol{p}(x) = a\left(x^2+1\right) + b\left(x^2+2x+2\right) + c(x+1).$$

Zatem $\operatorname{lin} B = \mathbb{R}_2[x]$ i B jest bazą.

(f) Zauważmy, że

$$2x^2+2x+3 = \left(x^2+1\right) + \left(x^2+2x+2\right).$$

Zbiór B nie jest więc liniowo niezależny i nie jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.

(g) Najpierw pokażemy, że macierze

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne. Niech

$$a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} b \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0, \\ \phantom{a +{}} b + c + d = 0, \\ \phantom{a + b +{}} c + d = 0, \\ \phantom{a + b + c +{}} d = 0. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest $a=b=c=d=0$. Zatem rozważane macierze są liniowo niezależne. Pokażemy teraz, że

$$\mathbb{M}_{2\times 2} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Niech $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ będzie dowolną macierzą z przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$. Znajdziemy współczynniki a, b, c, d takie, że

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Powyższy warunek jest równoważny układowi równań

$$\begin{cases} a + b + c + d = \alpha, \\ \quad\; b + c + d = \beta, \\ \qquad\;\; c + d = \gamma, \\ \qquad\qquad d = \delta. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest $a = \alpha - \beta$, $b = \beta - \gamma$, $c = \gamma - \delta$, $d = \delta$. Zatem rozważane macierze generują przestrzeń $\mathbb{M}_{2\times 2}$. Ponieważ spełnione są oba warunki definicji bazy, więc macierze:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

▷ **Zadanie 1.15.** Sprawdzić z definicji, czy podane zbiory wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $B = \{(2,5),(3,1),(6,-7)\}$, $\mathbb{R}^2$; (b) $B = \{(2,3,-1),(1,-3,2)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(c) $B = \{(1,-1,4),(3,0,1),(2,1,-2)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(d) $B = \left\{2x+4, 3x-x^2, -2x^2+4x-4\right\}$, $\mathbb{R}_2[x]$.

Odpowiedzi. (a), (b), (d) nie; (c) tak.

► **Przykład 1.16.** Wektory $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Zbadać z definicji, czy podane zbiory wektorów też są bazami tej przestrzeni:

(a) $\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3, 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3$; (b) $\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3, 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2, 3\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$.

Rozwiązanie.

(a) Niech $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3$ oraz niech $a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$, przy czym $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$(a + 2b + c)\boldsymbol{b}_1 + (-2a - b + c)\boldsymbol{b}_2 + (a - c)\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}.$$

Z liniowej niezależności wektorów $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ wynika, że

$$a + 2b + c = -2a - b + c = a - c = 0.$$

Stąd $a = -b = c$. Biorąc np. $a = 1$ otrzymujemy równość $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$, z której wynika liniowa zależność wektorów $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$. Nie są więc one bazą przestrzeni $\mathbb{V}$.

(b) Niech $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ będą jak wyżej oraz niech $\boldsymbol{u}_3 = 3\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Z warunku $a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$ wnioskujemy, że $a + 2b = -2a - b + 3c = a + c = 0$, a więc $a = b = c = 0$. Oznacza to liniową niezależność danych wektorów. Sprawdzimy teraz, czy generują one przestrzeń $\mathbb{V}$, tzn., czy dla dowolnego wektora $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ istnieją takie liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$, że zachodzi równość $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3$. Niech więc $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2 + \alpha_3\boldsymbol{b}_3$, gdzie α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Z równości

$$a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3 = \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2 + \alpha_3\boldsymbol{b}_3$$

wynika, że

$$(a+2b-\alpha_1)\,\boldsymbol{b}_1+(-2a-b+3c-\alpha_2)\,\boldsymbol{b}_2+(a+c-\alpha_3)\,\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}.$$

Korzystamy ponownie z liniowej niezależności wektorów bazy $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ i otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} \;\;\,a+2b \qquad\;\;\, = \alpha_1, \\ -2a-\;\;b+3c = \alpha_2, \\ \;\;\,a \qquad\; +\;\;c = \alpha_3. \end{cases}$$

Jest to układ Cramera o niewiadomych a, b, c. Istnieje więc jednoznaczne rozwiązanie tego układu. Stąd wniosek, że $\mathbb{V} = \operatorname{lin}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, czyli wektory $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ tworzą bazę $\mathbb{V}$.

$\triangleright$ **Zadanie 1.16.** Wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Zbadać z definicji, czy podane zbiory wektorów też są bazami przestrzeni $\mathbb{V}$:

(a) $\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, 3\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}+4\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$; (b) $\boldsymbol{u}, 2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, 3\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}+4\boldsymbol{w}$.

Odpowiedzi. (a) nie; (b) tak.

► **Przykład 1.17.** Obliczając odpowiednie wyznaczniki sprawdzić, czy podane zbiory wektorów są bazami podanych przestrzeni:

(a) $\boldsymbol{v}_1=(3,2), \boldsymbol{v}_2=(-6,4),\ \mathbb{R}^2$;

(b) $\boldsymbol{v}_1=(3,2,0), \boldsymbol{v}_2=(4,2,-1), \boldsymbol{v}_3=(1,2,2),\ \mathbb{R}^3$;

(c) $\boldsymbol{v}_1=(1,0,0,1), \boldsymbol{v}_2=(1,2,2,1), \boldsymbol{v}_3=(5,4,4,5), \boldsymbol{v}_4=(0,0,1,1),\ \mathbb{R}^4$.

Rozwiązanie. Skorzystamy z faktu, że n wektorów tworzy bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy ich współrzędnych kartezjańskich jest różny od zera. Element w i-tym wierszu i j-tej kolumnie tej macierzy jest j-tą współrzędną i-tego wektora.

(a) Jest to baza, bowiem

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=24\neq 0.$$

(b) Z równości

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \boldsymbol{v}_2\\ \boldsymbol{v}_3\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2 & 0\\ 4 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=0$$

wynika, że rozważane wektory nie tworzą bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(c) Podobnie z równości

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \boldsymbol{v}_2\\ \boldsymbol{v}_3\\ \boldsymbol{v}_4\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&2&2&1\\5&4&4&5\\0&0&1&1\end{vmatrix}\overset{\|w_3-5w_1\|}{=}\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&2&2&0\\0&4&4&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}\overset{\|w_3-2w_2\|}{=}\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&2&2&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0$$

wynika, że dane wektory nie tworzą bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

▷ **Zadanie 1.17.** Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ podane zbiory wektorów stanowią bazy odpowiednich przestrzeni $\mathbb{R}^n$:
(a) $B = \{(p-2,-p),(3,2+p)\}$, $\mathbb{R}^2$;
(b) $B = \{(1,3,p),(p,0,-p),(1,2,1)\}$, $\mathbb{R}^3$;
(c) $B = \{(1,1,1,1),(1,p,2,3),\left(1,p^2,4,9\right),\left(1,p^3,8,27\right)\}$,, $\mathbb{R}^4$;
(d*) $B = \{(0,1,1,\ldots,1),(p,0,1,\ldots,1),(p,p,0,\ldots,1),\ldots,(p,p,p,\ldots,0)\}$, $\mathbb{R}^n$?

Odpowiedzi. (a) $p \in \mathbb{R}\setminus\{-4,1\}$; (b) $p \in \mathbb{R}\setminus\{0,2\}$; (c) $p \in \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$;
(d*) $p \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$ lub $p=-1$ i n jest liczbą parzystą.

► **Przykład 1.18.** Wskazać bazy i określić wymiary podanych przestrzeni liniowych:
(a) $\mathbb{V} = \{(2x, x+y, 3x-y, x-2y) : x,y \in \mathbb{R}\}$;
(b) $\mathbb{V} = \{(r-2s-t, 2r+s-3t, 3r+4s-5t) : r,s,t \in \mathbb{R}\}$;
(c) $\mathbb{V} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=z-y\}$;
(d) $\mathbb{V} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_4[x] : \boldsymbol{p}(1)+\boldsymbol{p}(-1)=\boldsymbol{p}'(0)\}$;
(e) $\mathbb{V} = \left\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{3\times3} : \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{O}\right\}$;
(f) $\mathbb{V} = \operatorname{lin}\{1, \sin^2 x, \cos 2x, \cos^2 x\}$, przy czym $\mathbb{V} \subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Rozwiązanie.
(a) Z zależności $(2x, x+y, 3x-y, x-2y) = x(2,1,3,1)+y(0,1,-1,-2)$ wynika, że wektory $\boldsymbol{v}_1=(2,1,3,1)$, $\boldsymbol{v}_2=(0,1,-1,-2)$ generują przestrzeń $\mathbb{V}$. Łatwo jest sprawdzić z definicji ich liniową niezależność. Oznacza to, że wektory te są bazą przestrzeni $\mathbb{V}$, ponadto $\dim\mathbb{V}=2$.

(b) Ponieważ

$$(r-2s-t, 2r+s-3t, 3r+4s-5t) = r(1,2,3)+s(-2,1,4)+t(-1,-3,-5),$$

więc przestrzeń $\mathbb{V}$ jest generowana przez wektory $\boldsymbol{v}_1=(1,2,3)$, $\boldsymbol{v}_2=(-2,1,4)$, $\boldsymbol{v}_3=(-1,-3,-5)$. Wyznacznik macierzy ich współrzędnych jest równy 0, co oznacza ich liniową zależność. Rzeczywiście $\boldsymbol{v}_3=-7\boldsymbol{v}_1/5-\boldsymbol{v}_2/5$. Wektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ są natomiast liniowo niezależne i generują $\mathbb{V}$. Jest to więc baza przestrzeni $\mathbb{V}$, $\dim\mathbb{V}=2$.

(c) Warunek $x+y=z-y$ zapiszemy w postaci $x=z-2y$. Mamy więc

$$\begin{aligned}\mathbb{V} &= \{(z-2y,y,z,t) : y,z,t \in \mathbb{R}\}\\ &= \{y(-2,1,0,0)+z(1,0,1,0)+t(0,0,0,1) : y,z,t \in \mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{lin}\{(-2,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)\}.\end{aligned}$$

Liniowa niezależność otrzymanych trzech generatorów przestrzeni $\mathbb{V}$ wynika z tego, że $(z-2y, y, z, t) = (0,0,0,0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = z = t = 0$. Generatory te są zarazem bazą $\mathbb{V}$ i $\dim \mathbb{V} = 3$.

(d) Niech $\boldsymbol{p} = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \in \mathbb{V}$. Z warunku $\boldsymbol{p}(1) + \boldsymbol{p}(-1) = \boldsymbol{p}'(0)$ wynika równość $(a+b+c+d+e)+(a-b+c-d+e) = d$, stąd $d = 2a+2c+2e$. Zatem $\boldsymbol{p} = a\left(x^4 + 2x\right)+bx^3+c\left(x^2 + 2x\right)+e(2x+1)$. Generatorami przestrzeni $\mathbb{V}$ są więc wielomiany $\boldsymbol{p}_1 = x^4 + 2x$, $\boldsymbol{p}_2 = x^3$, $\boldsymbol{p}_3 = x^2 + 2x$, $\boldsymbol{p}_4 = 2x + 1$. Są one liniowo niezależne, bo $\boldsymbol{p} \equiv 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b = c = e = 0$. Przestrzeń $\mathbb{V}$ ma wymiar 4, a jedną z jej baz jest zbiór $B = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4\}$.

(e) Niech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{V}$. Warunek $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{O}$ oznacza, że $\boldsymbol{A}$ jest macierzą antysymetryczną i ma postać

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Z tej postaci wynika, że $\dim \mathbb{V} = 3$, gdyż bazę przestrzeni $\mathbb{V}$ stanowią macierze

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(f) Ponieważ $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, więc $\mathbb{V} = \operatorname{lin}\left\{\sin^2 x, \cos 2x, \cos^2 x\right\}$. Korzystając teraz ze wzoru $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ mamy $\mathbb{V} = \operatorname{lin}\left\{\sin^2 x, \cos^2 x\right\}$. Funkcje $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ są liniowo niezależne. Niech bowiem $a\sin^2 x+b\cos^2 x = 0$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Wówczas przyjmując kolejno $x = 0$ i $x = \pi/2$ otrzymujemy $b = 0$, $a = 0$. Obie te funkcje tworzą więc bazę przestrzeni $\mathbb{V}$ i wymiar tej przestrzeni jest równy 2.

▷ **Zadanie 1.18.** Wskazać bazy i określić wymiary podanych przestrzeni liniowych:

(a) $\mathbb{V} = \{(x+y+z, x-y, x-z, y-z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\mathbb{V} = \{(a+2b+c, 3a-b+2c, 5a+3b+4(c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\mathbb{V} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y = z - t = 0\right\}$;

(d) $\mathbb{V} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_4[x] : \boldsymbol{p}(2x) = 4x\boldsymbol{p}'(x) + \boldsymbol{p}(0)\}$;

(e) $\mathbb{V} = \{\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{3\times 4} : a_{ij} = 0 \text{ dla } i \leqslant j\}$;

(f) $\mathbb{V} = \operatorname{lin}\{1, e^x, e^{-x}, \sinh x, \cosh x\}$, przy czym $\mathbb{V} \subset \mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Odpowiedzi. Jedną z baz jest np.
(a) $B = \{(1,1,1,0), (1,-1,0,1), (1,0,-1,-1)\}$; $\dim V = 3$;
(b) $B = \{(1,3,5), (2,-1,3)\}$; $\dim V = 2$; (c) $B = \{(1,2,0,0), (0,0,1,1)\}$, $\dim V = 2$;
(d) $B = \left\{x^4, 1\right\}$; $\dim V = 2$;

(e) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim V = 3$;

(f) $B = \left\{1, e^x, e^{-x}\right\}$, $\dim V = 3$.

► **Przykład 1.19.** Podane zbiory wektorów liniowo niezależnych uzupełnić do baz wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\{(2,1,0),(1,1,1)\}$, $\mathbb{R}^3$; (b) $\{(1,3,2,1),(5,-4,7,1)\}$, $\mathbb{R}^4$;

(c) $\{(x-1)^2, x^3-5x, 1-4x+2x^2\}$, $\mathbb{R}_3[x]$;

(d) $\{1+x, x^2+x^3, x^4+x^5\}$, $\mathbb{R}_5[x]$.

Rozwiązanie. Skorzystamy tu z faktu, że dowolny układ n liniowo niezależnych wektorów w przestrzeni liniowej wymiaru n stanowi bazę tej przestrzeni.
(a) Wymiar przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest równy 3. Zatem do wskazanych wektorów (liniowo niezależnych) wystarczy dobrać jeszcze jeden wektor liniowo niezależny z nimi. Z warunku

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

wynika, że może to być np. wektor $(0,0,1)$. Zauważmy jeszcze, że dowolny wektor $\boldsymbol{v} = (a,b,c)$, dla którego $a - 2b + c \neq 0$ także tworzy z danymi wektorami bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
(b) Przestrzeń $\mathbb{R}^4$ jest czterowymiarowa. Dobierzemy więc jeszcze dwa wektory tak, aby odpowiedni wyznacznik był różny od zera. Ze względów rachunkowych najłatwiej jest je wybrać spośród wektorów bazy standardowej, np. $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ i wtedy rzeczywiście

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -19 \neq 0.$$

(c) Ponieważ rozważana przestrzeń ma wymiar 4, a dane trzy wektory są liniowo niezależne, więc w bazie brakuje jednego wektora. Wektor ten wystarczy wybrać spośród wektorów innej bazy przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$, najłatwiej spośród bazy standardowej. Będziemy więc próbowali dołączyć do naszego zbioru wektorów kolejne wektory bazy $\{1, x, x^2, x^3\}$ sprawdzając za każdym razem liniową niezależność całego zbioru. Oznaczmy $\boldsymbol{p}_1 = (x-1)^2$, $\boldsymbol{p}_2 = x^3 - 5x$, $\boldsymbol{p}_3 = 1 - 4x + 2x^2$. Niech najpierw $\boldsymbol{p}_4 = 1$ oraz niech $\alpha_1\boldsymbol{p}_1 + \alpha_2\boldsymbol{p}_2 + \alpha_3\boldsymbol{p}_3 + \alpha_4\boldsymbol{p}_4 \equiv 0$ dla α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \in \mathbb{R}$. Wówczas z warunku

$$\alpha_1\left(x^2 - 2x + 1\right) + \alpha_2\left(x^3 - 5x\right) + \alpha_3\left(1 - 4x + 2x^2\right) + \alpha_4 \equiv 0,$$

wynika, że $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$, $-2\alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Stąd $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = -2\alpha_3$, $\alpha_4 = \alpha_3$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Układ funkcji $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ jest liniowo zależny, bo np. $-2\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4\equiv 0$ i nie jest bazą. Niech teraz $\boldsymbol{p}_4=x$. Z zależności

$$\alpha_1\left(x^2-2x+1\right)+\alpha_2\left(x^3-5x\right)+\alpha_3\left(1-4x+2x^2\right)+\alpha_4 x\equiv 0$$

wynika, że $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$, bowiem

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Ostatecznie dany zbiór wektorów można uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ dodając np. wektor $\boldsymbol{p}_4=x$.

(d) W tym przykładzie podobnie jak w przykładzie (c) możemy brakujące trzy wektory dobrać spośród wektorów bazy standardowej $\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5\}$ przestrzeni $\mathbb{R}_5[x]$. Łatwo sprawdzić, że zbiór wektorów

$$\begin{array}{ll} \{1+x,x^2+x^3,x^4+x^5,1\} & \text{jest liniowo niezależny,} \\ \{1+x,x^2+x^3,x^4+x^5,1,x\} & \text{jest liniowo zależny,} \\ \{1+x,x^2+x^3,x^4+x^5,1,x^2\} & \text{jest liniowo niezależny,} \\ \{1+x,x^2+x^3,x^4+x^5,1,x^2,x^3\} & \text{jest liniowo zależny,} \\ \{1+x,x^2+x^3,x^4+x^5,1,x^2,x^4\} & \text{jest liniowo niezależny,} \end{array}$$

więc ostatni z rozważanych zbiorów jest już szukaną bazą.

Uwaga. W przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$ układ $n+1$ wielomianów zawierający po jednym wielomianie stopnia k dla $k=0,1,2,\ldots,n$ stanowi jej bazę. Dlatego w przykładzie (d) od razu można zauważyć, że w bazie brakuje wielomianów stopnia 0, 2 oraz 4.

▷ **Zadanie 1.19.** Podane zbiory wektorów liniowo niezależnych uzupełnić do baz wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $\{(-1,5,3)\}$, $\mathbb{R}^3$; (b) $\{(1,0,1,-1),(2,3,-1,2),(3,3,2,1)\}$, $\mathbb{R}^4$;

(c) $\{2x-3,x^3+4x-1\}$, $\mathbb{R}_3[x]$; (d) $\{x^2+5,x^2-3x,x^4-2x^3\}$, $\mathbb{R}_4[x]$;

(e*) $\{1,1+x^2,1+x^2+x^4,1+x^2+x^4+x^6,\ldots,\}$, $\mathbb{R}[x]$.

Odpowiedzi. Można uzupełnić np. o wektory (a) $(0,1,0)$, $(0,0,1)$; (b) $(1,0,0,0)$; (c) $1,x^2$; (d) $1,x^3$; (e*) x, x^3, x^5, $x^7,\ldots$

1.5. Współrzędne wektora w bazie

▶ **Przykład 1.20.** Znaleźć współrzędne podanych wektorów we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych:

(a) $\boldsymbol{v}=(-2,5,6)$, $B=\{(1,1,0),(2,1,0),(3,3,1)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(b) $\boldsymbol{v} = (1,0,1,0)$, $B = \{(1,2,3,4),(0,1,2,3),(0,0,1,2),(0,0,0,1)\}$, $\mathbb{R}^4$;

(c) $\boldsymbol{p} = 2x^2 + 3x$, $B = \{2+x, 3-x, x^2+4\}$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. (a) Współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ wektora $\boldsymbol{v}$ znajdziemy z warunku

$$(-2,5,6) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(2,1,0) + \alpha_3(3,3,1),$$

który prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -2, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 5, \\ \alpha_3 = 6. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $\alpha_1 = -6$, $\alpha_2 = -7$, $\alpha_3 = 6$. Zatem współrzędnymi wektora $\boldsymbol{v}$ są $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [-6, -7, 6]$.

(b) Współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ wektora $\boldsymbol{v}$ spełniają zależność

$$(1,0,1,0) = \alpha_1(1,2,3,4) + \alpha_2(0,1,2,3) + \alpha_3(0,0,1,2) + \alpha_4(0,0,0,1).$$

Otrzymujemy więc układ równań

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1, \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0, \end{cases}$$

z którego wynika, że $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = [1, -2, 2, -2]$.

(c) Wektor $\boldsymbol{p}$ przedstawiamy w postaci

$$2x^2 + 3x = \alpha_1(2+x) + \alpha_2(3-x) + \alpha_3\left(x^2+4\right).$$

Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy równość

$$2x^2 + 3x = \alpha_3 x^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\,x + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3.$$

Z równości wielomianów wynika równość współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej x, co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \alpha_3 = 2, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 3, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Współrzędne wektora p w danej bazie są więc równe $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [1/5, -14/5, 2]$.

(d) Podobnie jak poprzednio zachodzi równość

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

z której wynika, że

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 & -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Po rozwiązaniu układu równań

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \\ \alpha_4 = 3, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

otrzymamy współrzędne rozważanego wektora $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = [1/2, 1, 1/2, 3]$.

▷ **Zadanie 1.20.** Znaleźć współrzędne podanych wektorów we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych:

(a) $\boldsymbol{v} = (1,4),\ B = \{(1,5),(1,6)\}$, $\mathbb{R}^2$;

(b) $\boldsymbol{v} = (8,1,7,5),\ B = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$, $\mathbb{R}^4$;

(c) $\boldsymbol{p} = x^2 - 3x + 3,\ B = \{x^2 + 3x - 1, -x^2 + x + 3, 2x^2 - x - 2\}$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Odpowiedzi. (a) $[2,-1]$; (b) $[7,-6,2,5]$; (c) $[-1,2,2]$; (d) $[1,0,1,0]$.

► **Przykład 1.21.** Wyznaczyć współrzędne wektora $\boldsymbol{v}$ w bazie B' pewnej przestrzeni liniowej znając jego współrzędne w bazie B tej przestrzeni:

(a) $[0,1,-2],\ B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$, $B' = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_3\}$;

(b) $[2,0,1,1],\ B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\}$, $B' = \{-\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, 3\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4\}$;

(c) $[3,2,1],\ B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, $B' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$;

(d) $[1,2,\ldots,n],\ B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$, $B' = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \boldsymbol{b}_n\}$.

Rozwiązanie. (a) Z danych wynika, że

$$\boldsymbol{v} = 0 \cdot \boldsymbol{b}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{b}_2 + (-2) \cdot \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3.$$

Niech $\boldsymbol{b}_1' = \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3' = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_3$. Wtedy

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_1',\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_1' - \boldsymbol{b}_2',\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_1' - \boldsymbol{b}_3',$$

a zatem

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}_1' - \boldsymbol{b}_2' - 2\left(\boldsymbol{b}_1' - \boldsymbol{b}_3'\right) = -\boldsymbol{b}_1' - \boldsymbol{b}_2' + 2\boldsymbol{b}_3'.$$

Szukane współrzędne wynoszą więc $[-1,-1,2]$.

(b) W tym przypadku $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4$. Przyjmijmy $\boldsymbol{b}_1' = -\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3' = 3\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{b}_4' = \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4$. Podobnie jak poprzednio wektory bazy B przedstawiamy jako kombinacje liniowe wektorów bazy B' otrzymując

$$\boldsymbol{b}_1 = -\boldsymbol{b}_1',\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_1' + \boldsymbol{b}_2',\ \boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{3}\boldsymbol{b}_3',\ \boldsymbol{b}_4 = -\frac{1}{3}\boldsymbol{b}_3' + \boldsymbol{b}_4'.$$

Stąd wynika, że

$$\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{b}_1' + \frac{1}{3}\boldsymbol{b}_3' - \frac{1}{3}\boldsymbol{b}_3' + \boldsymbol{b}_4' = -2\boldsymbol{b}_1' + \boldsymbol{b}_4'.$$

Otrzymujemy więc współrzędne $[-2,0,0,1]$.

(c) Zauważmy, że $\boldsymbol{v}=3(1,1,1)+2(1,1,0)+(1,0,0)=(6,5,3)$. Nowe współrzędne $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ wektor $\boldsymbol{v}$ znajdziemy więc rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 6, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 5, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3. \end{cases}$$

Ostatecznie $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[4,2,1]$.

(d) Niech $\boldsymbol{b}_1'=\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2'=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{b}_n'=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\ldots+\boldsymbol{b}_n$. Łatwo zauważyć, że

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_1',\ \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{b}_2'-\boldsymbol{b}_1',\ \ldots,\ \boldsymbol{b}_n=\boldsymbol{b}_n'-\boldsymbol{b}_{n-1}'.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2+3\boldsymbol{b}_3+\ldots+n\boldsymbol{b}_n \\ &= \boldsymbol{b}_1'+2\left(\boldsymbol{b}_2'-\boldsymbol{b}_1'\right)+3\left(\boldsymbol{b}_3'-\boldsymbol{b}_2'\right)+\ldots+n\left(\boldsymbol{b}_n'-\boldsymbol{b}_{n-1}'\right) \\ &= -\boldsymbol{b}_1'-\boldsymbol{b}_2'-\ldots-\boldsymbol{b}_{n-1}'+n\boldsymbol{b}_n' \end{aligned}$$

Współrzędne wektora $\boldsymbol{v}$ w bazie B' mają postać $[-1,-1,\ldots,-1,n]$.

▷ **Zadanie 1.21.** Wyznaczyć współrzędne wektora $\boldsymbol{v}$ w podanej bazie B' pewnej przestrzeni liniowej znając jego współrzędne w bazie B tej przestrzeni:

(a) $[4,-3]$, $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\}$, $B'=\{2\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2\}$;

(b) $[1,1,-2]$, $B=\left\{x,x+1,x^2+1\right\}$, $B'=\left\{1,1+x^2,x+x^2\right\}$;

(c*) $[1,2\ldots,n]$, $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n\}$, $B'=\{\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_3,\ldots,\boldsymbol{b}_{n-1}-\boldsymbol{b}_n,\boldsymbol{b}_n\}$.

Odpowiedzi. (a) $\left[\frac{11}{5},-\frac{2}{5}\right]$; (b) $[3,-4,2]$; (c*) $\left[1,3,6,\ldots,\frac{n(n+1)}{2}\right]$.

► **Przykład 1.22.** Obliczyć współrzędne wskazanych wektorów w wybranych bazach podanych przestrzeni liniowych:

(a) $\boldsymbol{v}=(2,8,4)$, $\mathbb{V}=\{(x+y,3x+y,x-y):\ x,y\in\mathbb{R}\}$;

(b) $\boldsymbol{v}=(1,1,-2,1)$, $\mathbb{V}=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ 2x-y=z+3t\right\}$;

(c) $\boldsymbol{q}=4x^2-24x-3$, $\mathbb{V}=\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}_2[x]:\ \boldsymbol{p}'(3)=0\}$;

(d) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{V}=\left\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{M}_{2\times 2}:\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T\right\}$.

Rozwiązanie. (a) Zauważmy, że $\mathbb{V}=\operatorname{lin}\{(1,3,1),(1,1,-1)\}$. Otrzymane generatory przestrzeni $\mathbb{V}$ są liniowo niezależne, stanowią zatem bazę tej przestrzeni. Współrzędne $[\alpha_1,\alpha_2]$ wektora $\boldsymbol{v}$ wyznaczymy z warunku

$$(2,8,4)=\alpha_1(1,3,1)+\alpha_2(1,1,-1).$$

Stąd $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$, $3\alpha_1 + \alpha_2 = 8$, $\alpha_1 - \alpha_2 = 4$, a więc $[\alpha_1, \alpha_2] = [3, -1]$.
(b) Znajdziemy najpierw generatory przestrzeni $\mathbb{V}$. Mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{V} &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y = 2x - z - 3t\right\} \\ &= \left\{(x, 2x - z - 3t, z, t) : x, z, t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \text{lin}\left\{(1,2,0,0), (0,-1,1,0), (0,-3,0,1)\right\}.\end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że generatory te są liniowo niezależne. Przyjmując je za bazę przestrzeni $\mathbb{V}$ znajdujemy współrzędne $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ wektora $\boldsymbol{v}$. Z definicji wynika równość

$$(1,1,-2,1) = \alpha_1(1,2,0,0) + \alpha_2(0,-1,1,0) + \alpha_3(0,-3,0,1).$$

Stąd $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [1, -2, 1]$.
(c) Niech $\boldsymbol{p} \in \mathbb{V}$. Wówczas $\boldsymbol{p}(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, przy czym $\boldsymbol{p}'(3) = 2a \cdot 3 + b = 0$. Zatem $b = -6a$, a więc

$$\boldsymbol{p}(x) = ax^2 - 6ax + c = a\left(x^2 - 6x\right) + c.$$

Przestrzeń $\mathbb{V}$ jest zatem generowana przez wektory $\boldsymbol{p}_1 = x^2 - 6x$, $\boldsymbol{p}_2 = 1$, które są jej bazą. Współrzędne wektora $\boldsymbol{q} = 4x^2 - 24x - 3$ w tej bazie są równe $[4, -3]$.
(d) Mamy

$$\mathbb{V} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\right\} = \text{lin}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Również w tym przykładzie znalezione generatory tworzą bazę rozważanej przestrzeni. Wektor $\boldsymbol{B}$ ma w tej bazie współrzędne $[2, 3, -1]$.

▷ **Zadanie 1.22.** Obliczyć współrzędne wskazanych wektorów w wybranych bazach podanych przestrzeni liniowych:
(a) $\boldsymbol{v} = (-2, 4, 7, 4)$, $\mathbb{V} = \{(x - 5y, x + y, 2x + y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;
(b) $\boldsymbol{v} = (8, 4, 2, 9)$, $\mathbb{V} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y = y - 2z = 0\right\}$;
(c) $\boldsymbol{q} = 2x^3 - x^2 - x + 5$, $\mathbb{V} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_3[x] : \boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{p}(0)\}$;
(d) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbb{V} = \{\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{2\times 2} : a_{11} + a_{22} = 0\}$.

Odpowiedzi. Współrzędne (a) $[3, 1]$ w bazie $\{(1, 1, 2, 1), (-5, 1, 1, 1)\}$;
(b) $[2, 9]$ w bazie $\{(4, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$; (c) $[2, -1, 5]$ w bazie $\left\{x^3 - x, x^2 - x, 1\right\}$;
(d) $[3, 1, -2]$ w bazie $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$.

► **Przykład 1.23.** Zbadać, obliczając odpowiednie wyznaczniki, czy podane układy wektorów stanowią bazy odpowiednich przestrzeni liniowych.
(a) $\boldsymbol{u} = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (2, 1, 0)$, $\boldsymbol{w} = (3, 3, 1)$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$;

(b) $\boldsymbol{p} = 2 + x^2$, $\boldsymbol{q} = 1 - x$, $\boldsymbol{r} = 1 + x + x^2$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$;

(c) $\boldsymbol{p} = x^3 + 2$, $\boldsymbol{q} = x + 1$, $\boldsymbol{r} = 2x^2 + x + 1$, $\boldsymbol{s} = x^3 + x^2 + x + 2$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}_3[x]$;

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. Skorzystamy z faktu mówiącego, że zbiór n wektorów stanowi bazę przestrzeni liniowej wymiaru $n \geqslant 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy współrzędnych tych wektorów w pewnej bazie przestrzeni $\mathbb{V}$ jest różny od zera. We wszystkich przykładach będziemy wyznaczać współrzędne w bazach standardowych.

(a) Z warunku $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ wynika, że jest to baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(b) W bazie $\{1, x, x^2\}$ mamy $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, więc podane wektory nie tworzą bazy.

(c) W bazie $\{x^3, x^2, x, 1\}$ obliczamy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\|w_4 - w_1\|}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\|w_3 - 2w_4\|}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Stąd wniosek, że rozważane wektory tworzą bazę.

(d) W tym przykładzie wystarczy obliczyć wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \left\| \begin{matrix} w_3 - w_1 \\ w_4 - 3w_1 \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd wynika, że podane wektory nie tworzą bazy.

$\triangleright$ **Zadanie 1.23.** Zbadać, obliczając odpowiednie wyznaczniki, czy podane układy wektorów są bazami podanych przestrzeni liniowych:

(a) $\boldsymbol{u} = (2, 4, 5)$, $\boldsymbol{v} = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{w} = (-1, 7, 2)$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$;

(b) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 1)$, $\boldsymbol{v}_5 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^5$;

(c) $\boldsymbol{p} = x^3 + x^2 + x - 1$, $\boldsymbol{q} = x^3 + x^2 - x - 1$, $\boldsymbol{r} = x^3 - x^2 - x - 1$, $\boldsymbol{s} = x^3 + x^2 + x + 1$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}_3[x]$;

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$.

Odpowiedzi. (a) nie; (b) tak; (c) tak; (d) nie.

► **Przykład 1.24.** Wyznaczyć bazy przestrzeni liniowych, w których wskazane wektory mają podane współrzędne:

(a) $\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{v} = (3,-5),\ [5,-2]$; (b) $\mathbb{R}^4,\ \boldsymbol{v} = (1,0,1,0),\ [1,-2,4,-1]$;

(c) $\mathbb{R}_2[x],\ \boldsymbol{p} = x^2 - 2x,\ [-1,3,1]$; (d) $\mathbb{M}_{2\times 2},\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ [1,0,2,0]$.

(e) $\mathbb{V} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\right\},\ \boldsymbol{v} = (1,2,3,-6),\ [1,0,0]$;

Rozwiązanie. Baz takich jest na ogół nieskończenie wiele. W każdym przypadku podamy po jednym przykładzie bazy.
(a) Korzystając z bazy standardowej otrzymamy

$$(3,-5) = 3\cdot(1,0) + (-5)\cdot(0,1) = 5\left(\frac{3}{5},0\right) + (-2)\left(0,\frac{5}{2}\right).$$

Szukaną bazą jest więc np. $B = \left\{\left(\frac{3}{5},0\right),\left(0,\frac{5}{2}\right)\right\}$.
(b) Z równości

$$\begin{aligned}(1,0,1,0) &= (1,1,1,1) - (0,1,1,1) + (0,0,1,1) - (0,0,0,1) \\ &= (1,1,1,1) - 2\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + 4\left(0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) - (0,0,0,1)\end{aligned}$$

wynika, że za bazę można przyjąć np.

$$B = \left\{(1,1,1,1),\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),(0,0,0,1)\right\}.$$

(c) Zachodzą równości

$$\boldsymbol{p} = (-1)(2x) + x^2 = (-1)(2x) + 3\left(\frac{x^2}{3}+1\right) + 1(-3).$$

Po sprawdzeniu liniowej niezależności wektorów $2x,\ x^2/3+1,\ -3$ można je przyjąć za szukaną bazę.
(d) Zauważmy najpierw, że

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

przy czym macierze $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne. Zatem baza może zawierać te macierze. Ponieważ baza przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$ składa się z czterech liniowo niezależnych macierzy, więc do dwóch wybranych dołączymy jeszcze dwie, np. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ z bazy standardowej. Ponieważ macierze

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne, więc tworzą szukaną bazę przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

(e) Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\mathbb{V} &= \{(x,y,z,-x-y-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{lin}\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}\,.\end{aligned}$$

Znalezione generatory przestrzeni $\mathbb{V}$ są jednocześnie jej bazą. Oznaczmy wektory szukanej bazy B przez $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ Wtedy oczywiście $\boldsymbol{b}_1 = (1,2,3,-6)$. Stąd wyciągamy wniosek, że wystarczy wektor $\boldsymbol{b}_1$ dowolnie uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{V}$. Najłatwiej jest to zrobić wybierając wektory ze znanej już bazy. I tak przyjmując $\boldsymbol{b}_2 = (1,0,0,-1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (0,1,0,-1)$ otrzymamy trzy wektory liniowo niezależne $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, które będą szukaną bazą.

▷ **Zadanie 1.24.** Znaleźć bazy odpowiednich przestrzeni liniowych, w których wskazane wektory mają podane współrzędne:

(a) $\boldsymbol{v} = (2,-1,3) \in \mathbb{R}^3$, $[1,0,1]$;

(b) $\boldsymbol{v} = (1,1,1,1) \in \mathbb{V}$, $\mathbb{V} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = t, x - 3y + 2z = 0\right\}$, $[2,2]$;

(c*) $\boldsymbol{v} = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$, $[1,1,\ldots,1]$.

Odpowiedzi. Jedną z baz jest np. (a) $\{(2,-1,0),(0,1,0),(0,0,3)\}$;
(b) $\{(0,1/3,1/2,0),(1/2,1/6,0,1/2)\}$;
(c*) $\{(1,1,1,\ldots,1),(0,-1,0,\ldots,0),(0,0,-1,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,-1)\}$.

► **Przykład 1.25.** Wyznaczyć macierze przejścia z bazy B do bazy B' podanych przestrzeni liniowych.

(a) $B = \{(3,1),(2,1)\}$, $B' = \{(1,-1),(2,3)\}$, $\mathbb{R}^2$;

(b) $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $B' = \{(3,3,4),(-1,2,2),(1,1,1)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(c) $B = \left\{x+1, x+2, x^2+1\right\}$, $B' = \left\{x+3, x+4, x^2\right\}$, $\mathbb{R}_2[x]$;

(d) $B = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$, $B' = \left\{2x^2-3, x^3+x, 4-x, 1+x+x^2\right\}$, $\mathbb{R}_3[x]$;

(e) $B = \left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right\}, B' = \left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&2\\3&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. We wszystkich przypadkach musimy wyznaczyć współrzędne kolejnych wektorów bazy B' w bazie B i napisać je w kolejnych kolumnach macierzy przejścia P.

(a) Łatwy rachunek prowadzi do zależności

$$(1,-1) = 3(3,1) - 4(2,1), \qquad (2,3) = -4(3,1) + 7(2,1).$$

Macierz przejścia P ma zatem postać

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -4\\ -4 & 7\end{bmatrix}.$$

(b) Bez żadnych obliczeń można napisać, że

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Niech $\boldsymbol{p} = x+1$, $\boldsymbol{q} = x+2$, $\boldsymbol{r} = x^2+1$. Wówczas $1 = \boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$, $x = \boldsymbol{p}-1 = 2\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$. Zatem

$x+3 = 2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} + 3(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = -\boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q}$, $x+4 = 2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} + 4(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = -2\boldsymbol{p} + 3\boldsymbol{q}$. Ponadto $x^2 = \boldsymbol{r} - 1 = \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}$. Macierz przejścia P ma więc postać

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) B jest bazą standardową, więc macierz przejścia można napisać od razu

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(e) Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = (-3) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz przejścia z bazy B do bazy B' ma zatem postać

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

▷ **Zadanie 1.25.** Wyznaczyć macierze przejścia z bazy B do bazy B' podanych przestrzeni liniowych:

(a) $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$, $B' = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$, $\mathbb{R}^3$;

(b) $B = \{x^2, x, 1\}$, $B' = \{3x^2 - x, 2x^2 + x - 1, x^2 + 5x - 6\}$, $\mathbb{R}_2[x]$.

Odpowiedzi. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}$.

► **Przykład 1.26.** Wyznaczyć współrzędne wskazanych wektorów w podanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych wykorzystując macierze przejścia z baz standardowych do baz danych:

(a) $\boldsymbol{v} = (2, -1),\ B' = \{(5,3), (-2,7)\}\ ,\ \mathbb{V} = \mathbb{R}^2$;

(b) $\boldsymbol{v} = (0,1,0),\ B' = \{(1,1,0), (2,1,3), (0,2,1)\}\ ,\ \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$;

(c) $\boldsymbol{p} = x^2 + x + 2,\ B' = \left\{x^2 - 1, x^2 + 1, 2 - 2x\right\}\ ,\ \mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$;

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},\ B' = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right\},\ \mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie. Wykorzystamy fakt mówiący, że współrzędne $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ wektora $\boldsymbol{v}$ w bazie B oraz współrzędne $[\alpha_1', \ldots, \alpha_n']$ tego wektora w bazie B' związane są zależnością

$$P \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

gdzie P jest macierzą przejścia z bazy B do bazy B'. Wyznaczanie współrzędnych sprowadza się więc do rozwiązania odpowiedniego układu Cramera. W przykładach za bazę B będziemy przyjmować bazę standardową odpowiedniej przestrzeni.

(a) Współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2']$ wektora $\boldsymbol{v}$ spełniają układ równań

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Wynika stąd, że $\alpha_1' = 12/41$, $\alpha_2' = -11/41$.

(b) Współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3']$ wektora $\boldsymbol{v}$ wyznaczymy z zależności

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Po zastosowaniu np. metody eliminacji Gaussa otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} \end{array}\right],$$

więc $\alpha_1' = 2/7$, $\alpha_2' = -1/7$, $\alpha_3' = 3/7$.

(c) Układ równań, który spełniają współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3']$ wektora $\boldsymbol{p}$ rozwiążemy wykorzystując macierz P^{-1}. Mamy

$$\begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(d) Współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4']$ wektora $\boldsymbol{A}$ znajdziemy z układu równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \\ \alpha_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Po rozwiązaniu tego układu np. metodą eliminacji Gaussa

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

otrzymamy $\alpha_1' = 1$, $\alpha_2' = -2$, $\alpha_3' = 1$, $\alpha_4' = 1$.

▷ **Zadanie 1.26.** Wyznaczyć współrzędne wskazanych wektorów w podanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych wykorzystując macierze przejścia z baz standardowych do baz danych:

(a) $\boldsymbol{v} = (1,1)$, $B' = \{(4,1), (-2,3)\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$;

(b) $\boldsymbol{v} = (2,-4,7)$, $B' = \{(1,-2,3), (2,1,4), (-3,1,-6)\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$;

(c) $\boldsymbol{p} = 2x^3 - x^2 + 1$, $B' = \left\{2x^3+3x^2+2x+1,\ 2x^3+x+1,\ x^2+2x+1,\ 2x^2+x+1\right\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}_3[x]$.

Odpowiedzi. (a) $\left[\frac{5}{14}, \frac{3}{14}\right]$; (b) $[3,1,1]$; (c) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

► **Przykład 1.27.** Znaleźć współrzędne wektora $\boldsymbol{v}$ w bazie

$$\{\boldsymbol{b}_1, 2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3, 2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_4\},$$

jeżeli w bazie $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\}$ ma on współrzędne $[1,2,3,4]$. Wykorzystać macierz przejścia z bazy do bazy.

Rozwiązanie. W przestrzeni $\operatorname{lin}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\}$ przyjmujemy, że

$$B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\}, \quad B' = \{\boldsymbol{b}_1, 2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3, 2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_4\}.$$

Szukane współrzędne $[\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4']$ wektora $\boldsymbol{v}$ wyznaczymy z układu równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \\ \alpha_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem tego układu jest $\alpha_1' = -14$, $\alpha_2' = 2$, $\alpha_3' = 3$, $\alpha_4' = 4$.

$\triangleright$ **Zadanie 1.27.** Wektor $\boldsymbol{v}$ ma w bazie $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ współrzędne $[0, 1, -2]$. Stosując macierz przejścia z bazy do bazy obliczyć współrzędne tego wektora w bazie:

(a) $\{\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3,\ \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3\}$;

(b) $\{2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 - 3\boldsymbol{b}_3,\ 3\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 - 5\boldsymbol{b}_3,\ \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3\}$.

Odpowiedzi. (a) $\left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right]$; (b) $[2, -1, -1]$.