ALGEBRA LINIOWA

Teresa Jurlewicz

ALGEBRA LINIOWA

Kolokwia i egzaminy

Wydanie siódme uzupełnione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2013

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 2000 – 2013 by Teresa Jurlewicz
Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład książki wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978-83–62780–21–1

Wydanie VII uzupełnione 2013
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: I-BiS Usługi Komputerowe, Wydawnictwo s.c.

Spis treści

Wstęp **7**

Zestawy zadań z kolokwiów **9**
Pierwsze kolokwium 9
Drugie kolokwium 24

Zestawy zadań z egzaminów **37**
Egzamin podstawowy 37
Egzamin poprawkowy 52
Egzamin na ocenę celującą 64

Odpowiedzi i wskazówki **75**
Pierwsze kolokwium 75
Drugie kolokwium 82
Egzamin podstawowy 90
Egzamin poprawkowy 97
Egzamin na ocenę celującą 103

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań jest przeznaczony dla słuchaczy wykładów z algebry liniowej prowadzonych w uczelniach technicznych. Jest on trzecią częścią zestawu podręczników do tego przedmiotu. Dwie pierwsze części zestawu tworzą *„Definicje, twierdzenia, wzory”* oraz *„Przykłady i zadania”*. W opracowaniu umieściłam zestawy zadań, które od roku akademickiego 1993/94 przygotowywałam na kolokwia i egzaminy. Zadania ze sprawdzianów obejmują przestrzenie i przekształcenia liniowe, układy równań liniowych oraz przestrzenie euklidesowe. Zbiór jest powiększoną i poprawioną wersją mojego wcześniejszego opracowania pt. *„Powtórka od A do Z z algebry liniowej 2”*.

Pierwszy rozdział książki zawiera zestawy zadań z kolokwiów. W drugim rozdziale znajdują się zestawy zadań z egzaminów podstawowego i poprawkowego. Ponadto umieściłam tam zadania z egzaminów na ocenę celującą, które opracowałam wspólnie z dr. Zbigniewem Skoczylasem. W kolejnym rozdziale podałam odpowiedzi lub wskazówki do wszystkich zadań.

Sądzę, że opracowanie pozwoli studentom zapoznać się z rodzajami oraz stopniem trudności zadań kolokwialnych i egzaminacyjnych. Może być także dodatkowym materiałem do samodzielnej nauki. Mam nadzieję, że podręcznik pomoże osobom wykładającym algebrę liniową przy opracowywaniu zestawów zadań na kolokwia i egzaminy.

Do aktualnego wydania dołączyłam zestaw zadań z egzaminu na ocenę celującą z roku 2013. Ponadto poprawiłam zauważone błędy i usterki.

Teresa Jurlewicz

2. Jaki jest wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez funkcje $\ln x$, $\ln 2x$, $\ln x^2$?

3. Niech $P = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ oraz $Q = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ będą macierzami przejścia odpowiednio z bazy B_1 do bazy B_2 oraz z bazy B_2 do bazy B_3 pewnej przestrzeni liniowej. Znaleźć macierz przejścia z bazy B_3 do bazy B_1 tej przestrzeni.

4. Zbadać, w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$, rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} p & p & p & 2 \\ p & p & 2 & p \\ p & 2 & p & p \\ 2 & p & p & p \end{bmatrix}.$$

5. Uzasadnić, że jądro przekształcenia liniowego $L : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{U}$.

6. Wektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ są ortogonalne w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{E}$, przy czym $\|\boldsymbol{v}_1\| = \dfrac{1}{2}$ oraz $\|\boldsymbol{v}_2\| = 1$. Podać przykład wektorów unormowanych $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{E}$ tworzących kąt $\dfrac{\pi}{6}$.

Wektory $2x + 1$, $x - 3$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}_1[x]$ z pewnym iloczynem skalarnym. Znaleźć współrzędne wektora $5x + 6$ w tej bazie oraz podać normę tego wektora.

Egzamin poprawkowy

Zestaw 1. *odp. str. 97*

1. Wektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ są liniowo niezależne. Zbadać z definicji liniową niezależność wektorów: $3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{z}$, $7\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y}$.

2. Wskazać wielomiany $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}[x]$ takie, że

$$\dim\left(\operatorname{lin}\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}''\}\right) = 3 \text{ oraz } \dim\left(\operatorname{lin}\{\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}', \boldsymbol{q}''\}\right) = 2.$$

Odpowiedź uzasadnić.

3. Wyznaczyć współrzędne wektora $(0, 3, 8, 1)$ w bazie

$$\{(1, 2, 2, 0),\ (2, 1, -4, 0),\ (0, 0, 3, 6),\ (0, 0, 0, 1)\}.$$

4. Spośród generatorów:

$$(1, -2, 0, 1, 1),\ \ (1, -1, 1, 0, 2),\ \ (3, -4, 2, 1, 5),\ \ (1, -3, -1, 2, 0)$$

przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ wybrać dwie bazy tej przestrzeni.

5. Podać macierz przekształcenia liniowego $(L\boldsymbol{q})(x) = (3 + x)\boldsymbol{q}'(x)$ w bazie

$$\left\{1 + x,\ 1 - x,\ x^2\right\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.

6. Wyznaczyć rzut ortogonalny $\boldsymbol{v}$ wektora $\boldsymbol{u} = (5, 6, 1, 3)$ na podprzestrzeń

$$\mathbb{V} = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{E}^4 : a - d = a + b = b - c\right\}.$$

Zestaw 2. *odp. str. 97*

1. Uzasadnić, że macierze nieodwracalne stopnia 3 nie tworzą podprzestrzeni liniowej przestrzeni $\mathbb{M}_{3\times 3}$ wszystkich macierzy rzeczywistych stopnia 3.

2. Uzasadnić z definicji, że wielomiany $2x+5$, x^2-3x+1, x^2+x tworzą bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_2[x]$.

3. Znaleźć wymiar i bazę przestrzeni liniowej

$$\mathbb{U} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z + t = x + y = x - y + t\right\}.$$

4. Obliczyć rząd macierzy $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

5. Czy wektory własne przekształcenia liniowego

$$S(x, y, z) = (x + 4z, 2y, x + z)$$

tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Jeżeli tak, to napisać macierz przekształcenia S w tej bazie.

6. Wyznaczyć bazę ortonormalną przestrzeni

$$\text{lin}\,\{(2, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 2), (0, 1, 0, 1)\}$$

i następnie podać współrzędne wektora $(3, 0, 1, 0)$ w tej bazie.

Zestaw 3. *odp. str. 98*

1. Czy macierze stopnia 2, których rząd jest mniejszy od 2, stanowią podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$? Odpowiedź uzasadnić.

2. Zbadać wymiar przestrzeni liniowej

$$\mathbb{U} = \text{lin}\,\{(p, 2, -p), (1, p, -1), (p, 3, -p)\}$$

w zależności od parametru p.

3. Wektory $(1, 2, 3)$, $(0, 2, 1)$ uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ tak, aby wektor $(1, 0, 0)$ miał w niej współrzędne $[1, 2, 1]$.

4. Czy wektory $(1, 1, -1, 0, -3)$, $(2, 1, 0, 0, -5)$ tworzą bazę przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + 3y + z + s = 0 \\ 2x + y + t + s = 0 \\ 5y + 2z - 2t + s = 0 \end{cases} ?$$

5. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im przestrzenie wektorów własnych przekształcenia liniowego $T(x, y, z) = (x + 2y - 3z, x + 2y - 3z, x + 2y - 3z)$.

6. Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni

$$\mathbb{U} = \left\{(x+2y+3z, 2x+2z, x+y+2z, y+z) \in \mathbb{E}^4 : x, y, z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Zestaw 4. *odp. str. 98*

1. Czy wielomiany, które są funkcjami:

a) parzystymi; **b)** niemalejącymi,

tworzą podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}[x]$? Odpowiedź uzasadnić.

2. Dla jakiej wartości parametru q wektory: $(1, -q, 2)$, $(q, 3, -1)$, $(3q, 5, -4)$ są bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Czy może to być baza ortogonalna przestrzeni $\mathbb{E}^3$?

3. Wskazać bazę przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$, w której wektor $x+3$ ma wszystkie współrzędne równe 1.

4. Podać wymiar i bazę przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + y + 3z + 4t = 0 \\ 3x + 5y + 13z + 10t = 0 \\ x + 4y + 9z + t = 0 \end{cases}.$$

5. Znaleźć wartości i wektory własne przekształcenia liniowego

$$L(x, y, z) = (x - z, x - z, x - z).$$

6. Wektory $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ uzupełnić do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{E}^4$ i następnie podać współrzędne wektora $(0, 1, 0, 0)$ w tej bazie.

Zestaw 5. *odp. str. 98*

1. Uzasadnić, że zbiór $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{M}_{2\times 2}$, gdzie

$$\mathbb{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + 2d = 3b - c \right\}.$$

2. Jaki jest wymiar przestrzeni liniowej $\operatorname{lin}\left\{1, \sin^2 x, \cos 2x, \cos^2 x\right\}$?

3. Czy wektor $(1, 0, 0, 0)$ należy do przestrzeni liniowej

$$\operatorname{lin}\left\{(1, -1, 0, 1), (1, 0, 2, 1), (1, -1, 1, 3), (0, 2, 3, -2)\right\}?$$

4. Znaleźć współrzędne wektora $\boldsymbol{f} = x^3 - 2x^2 - x + 4$ w wybranej bazie przestrzeni liniowej $\mathbb{U} = \{\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}_3[x] : \boldsymbol{f}(1) = \boldsymbol{f}(2)\}$.

5. Napisać macierz obrotu o kąt $\dfrac{\pi}{2}$ wokół osi Oz w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w bazie

$$\{(0, 1, -1),\ (0, 0, 1),\ (1, -1, 0)\}.$$

6. W przestrzeni $\mathbb{E}^4$ znaleźć rzut ortogonalny $\boldsymbol{w}$ wektora $\boldsymbol{v} = (1, 0, 2, 1)$ na podprzestrzeń $\mathbb{W} = \operatorname{lin}\{(2, 1, 0, -1), (1, 0, 1, -1)\}$.

Zestaw 6. *odp. str. 98*

1. Uzasadnić, że jeżeli wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ są liniowo niezależne, a wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ są liniowo zależne, to $\boldsymbol{w} \in \operatorname{lin}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$.

2. Uzasadnić, że wielomiany rzeczywiste stopnia mniejszego od 5, które są funkcjami parzystymi, tworzą przestrzeń liniową. Podać wymiar tej przestrzeni.

3. Znaleźć współrzędne wektora $(4,-4,2,5)$ w wybranej bazie przestrzeni liniowej

$$\mathbb{W} = \{(a,b,c,d) : \ 2a - c = 2b + 7c = a - b - c\}\,.$$

4. Określić wymiar i wyznaczyć bazę przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + 2z - u + v = 0 \\ x + y + 2u - v = 0 \\ 3x + 2y + 2z + 3u - v = 0 \\ x - y + 4z - 4u + 3v = 0 \end{cases}.$$

5. Znaleźć wartości i wektory własne przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ spełniającego zależności: $L(2,1) = (4,3)$, $L(4,-1) = (2,-3)$.

6. Podać przykład unormowanego wektora $\boldsymbol{u} \in \mathbb{E}^4$ tworzącego z wektorem $\boldsymbol{v} = (1,-1,1,-1)$ kąt $\dfrac{\pi}{3}$.

Zestaw 7. *odp. str. 99*

1. Dla jakich wartości parametru p podany zbiór jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{W} = \{(px + y, y, x + p) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$?

2. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]$ zbadać z definicji liniową niezależność wektorów:

$$x^3 + x, \ \ 2x^3 + x + 1, \ \ 3x^2 + x, \ \ x + 1.$$

3. Wskazać bazę przestrzeni liniowej

$$\mathbb{U} = \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{M}_{2\times 2} : \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. Sprawdzić, czy wektory $(1,1,-2,0,1)$, $(-2,0,0,1,1)$ generują przestrzeń rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x - 2y + u + v = 0 \\ x - y + z + 2v = 0 \\ 3x - 4y + 2z + u + 5v = 0 \\ x - 3y - z + 2u = 0 \end{cases}.$$

5. W bazie $\{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,3)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ znaleźć macierz przekształcenia liniowego $L(x,y,z) = (z - x, z - y, x + y)$.

6. Wektory $\boldsymbol{u} = (1,3,-2)$, $\boldsymbol{v} = (-1,1,1)$ uzupełnić do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{E}^3$ i następnie znaleźć współrzędne wektora $\boldsymbol{x} = (12,-4,7)$ w tej bazie.

Zestaw 8. *odp. str. 99*

1. Uzasadnić, że jeżeli wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ należące do przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ są liniowo zależne oraz $\boldsymbol{d} \in \mathbb{V}$, to wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ są też liniowo zależne.

2. Uzasadnić, że zbiór $\mathbb{U} = \{(a - b, a + b, 3b, 2a) : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wskazać bazę tej przestrzeni, w której wszystkie współrzędne wektora $(1,5,6,6)$ są równe 5.

3. Sprawdzić, że generatory przestrzeni lin $\left\{\sin^2 x, \cos 2x\right\}$ są jej bazą i następnie obliczyć współrzędne wektora $5 - \cos^2 x$ w tej bazie.

4. Dla jakich wartości parametru p zachodzi równość

$$\dim\left(\operatorname{lin}\left\{(1,3,p,1),(p,-1,1,1),(4,5,5,3)\right\}\right) = p?$$

5. Wskazać bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Zortogonalizować i następnie unormować w przestrzeni $\mathbb{E}^4$ wektory:

$$(1,0,0,1), \quad (1,2,0,1), \quad (1,4,2,3).$$

Zestaw 9. *odp. str. 99*

1. Uzasadnić, że zbiór $\mathbb{U}$ wszystkich wielomianów $\boldsymbol{p}$ spełniających warunek

$$\boldsymbol{p}(1)\boldsymbol{p}'(2) = 0$$

nie jest przestrzenią liniową.

2. Co można powiedzieć o liniowej niezależności funkcji $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ spełniających nierówność

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{f}(1) & \boldsymbol{f}(2) & \boldsymbol{f}(3) \\ \boldsymbol{g}(1) & \boldsymbol{g}(2) & \boldsymbol{g}(3) \\ \boldsymbol{h}(1) & \boldsymbol{h}(2) & \boldsymbol{h}(3) \end{vmatrix} > 0?$$

3. Czy spośród wektorów: $x^2+x+2,\ 1-x^2,\ x^2+2x+5,\ x+3,\ 2x+3$ można wybrać bazę przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$?

4. Określić, w zależności od parametru m, liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} 6x + my + 4z = 4m \\ 3x + y + 2z = m \\ 6mx + y + 4z = 4 \end{cases}.$$

5. Korzystając z interpretacji geometrycznej wyznaczyć jądro, obraz oraz podać ich bazy przekształcenia liniowego K przestrzeni $\mathbb{R}^3$, które jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę $\pi:\ x + 2y + 3z = 0$.

6. Sprawdzić, że wektory $(2,-1,3)$, $(-1,4,2)$, $(2,1,-1)$ tworzą bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{E}^3$ i następnie podać współrzędne wektora $(0,1,-1)$ w tej bazie.

Zestaw 10. *odp. str. 99*

1. Zbadać liniową niezależność wektorów $\boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^2$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{M}_{2\times 2}$ dla

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Które z wektorów bazy standardowej przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ stanowią uzupełnienie wektorów $x^3 + 2x$, $1 - x^3$ do bazy tej przestrzeni? Podać wszystkie możliwości.

3. Znaleźć współrzędne wektora $(1,-1,2)$ w bazie $\{(3,2,1)\,,\ (0,5,-1),\ (1,-1,1)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

4. Jaki jest wymiar przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3s + t = 0 \\ -x + 3y + z + 2s + 2t = 0 \\ 5x - 7y + z - 4t = 0 \end{cases} ?$$

5. Podać wartości i wektory własne symetrii $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ względem osi Oz.

6. Wyznaczyć rzut ortogonalny $\boldsymbol{v}$ wektora $\boldsymbol{u} = (2,0,1) \in \mathbb{E}^3$ na podprzestrzeń

$$\operatorname{lin}\{(1,2,0),(2,3,1)\}\,.$$

Zestaw 11. *odp. str. 100*

1. Czy funkcje okresowe o okresie T, który jest dodatnią liczbą parzystą, tworzą podprzestrzeń liniową przestrzeni wszystkich funkcji na $\mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

2. Czy któraś z podanych macierzy jest kombinacją liniową pozostałych:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}?$$

Odpowiedź uzasadnić.

3. Wektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$ ma w bazie $\{\boldsymbol{b}_1,\, \boldsymbol{b}_2,\, \boldsymbol{b}_3\}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{U}$ współrzędne $[3,1,3]$. Znaleźć współrzędne wektora $\boldsymbol{u}$ w bazie $\{\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2,\, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3,\, \boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_3\}$.

4. Znaleźć wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez wektory:

$$(1,-2,0,1,3),\quad (2,0,2,1,0),\quad (1,0,1,0,4),\quad (1,-4,-1,1,10)$$

5. Wyznaczyć wartości i wektory własne macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni

$$\operatorname{lin}\{(1,0,1,0),(1,0,1,1,),(1,1,1,1)\}$$

i następnie podać współrzędne wektora $(6,3,6,5)$ w tej bazie.

Zestaw 12. *odp. str. 100*

1. Uzasadnić z definicji liniową niezależność funkcji $\sin x$, $\sin 3x$, $\sin 8x$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

2. Uzasadnić, że zbiór $\mathbb{U}$ jest przestrzenią liniową i określić jej wymiar, jeżeli

$$\mathbb{U} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_4[x] :\ 2\boldsymbol{p}(x) = \boldsymbol{p}(2x)\}\,.$$

3. Znaleźć współrzędne wektora $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ w bazie

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

przestrzeni liniowej rzeczywistych macierzy symetrycznych stopnia 2.

4. Określić, w zależności od parametru q, wymiar przestrzeni liniowej
$$\operatorname{lin}\{(q,q,3,4),(1,1,1,1),(q,2,q,2)\}.$$

5. Napisać macierz przekształcenia liniowego
$$L(x,y,z)=(x,x+y,x+z,x+y+z)$$
w bazie $\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz w bazie
$$\{(1,1,0,0),\ (1,-1,0,0),\ (0,0,1,1),\ (0,0,1,-1)\}$$
przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

6. Zortogonalizować wektory 1, $\sin x$, $x+1$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{C}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ z iloczynem skalarnym
$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{g}(x)\,dx.$$

Zestaw 13. *odp. str. 100*

1. Uzasadnić, że zbiór $\mathbb{U}=\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{M}_{3\times 3}:\ \det(-\boldsymbol{A})=-\det(\boldsymbol{A})\}$ jest przestrzenią liniową.

2. Napisać macierz przejścia z bazy $\{(1,2,1),(2,3,1),(1,1,1)\}$ do bazy standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

3. Dla jakich wartości parametru a wielomian x^2+ax+a^2 jest uzupełnieniem wielomianów x^2-2x+3, $2x^2-x+1$ do bazy przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$?

4. Znaleźć współrzędne wektora $(x,y,z,s,t)=(1,4,4,1,0)$ w wybranej bazie przestrzeni rozwiązań układu równań $x-y+z-s+t=x-y+z-s-t=0$.

5. Wyznaczyć wartości i wektory własne przekształcenia liniowego
$$K(x,y,z)=(x+2y+3z,2y,-z).$$

6. Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni
$$\mathbb{E}=\left\{(2x,y,y-x,2x+y)\in\mathbb{E}^4:\ x,y\in\mathbb{R}\right\}$$
i następnie współrzędne wektora $(2,1,0,3)$ w tej bazie.

Zestaw 14. *odp. str. 100*

1. Niech $\mathbb{W}=\{(x,y,x+|y|):\ x,y\in\mathbb{R}\}$. Który z podanych zbiorów jest przestrzenią liniową:
$$\mathbb{W}_1=\mathbb{W}\cap\text{płaszczyzna}\,yOz,\quad \mathbb{W}_2=\mathbb{W}\cap\text{płaszczyzna}\,xOz?$$
Odpowiedź uzasadnić.

2. Baza $\mathbb{B}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_2[x]$ zawiera wektory $1-x$, $2x+1$. Jakie mogą być współrzędne wektora $3x+6$ w tej bazie? Wypisać wszystkie możliwości.

3. Znaleźć wymiar i bazę przestrzeni liniowej

$$\mathbb{U} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x + z)^2 = 2\left(x^2 + z^2\right)\right\}.$$

4. Zbadać macierzowo liniową niezależność wektorów:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1, \quad 2x^4 + x^3 - x^2 + x - 1, \quad 4x^4 + 5x^3 + x^2 - x$$

w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}_4[x]$.

5. Wyznaczyć bazy jądra oraz obrazu przekształcenia liniowego

$$K(x, y, z) = (x + y + 2z, x - 2y + 2z, 2x - y + 4z, x + 2y + 2z).$$

6. Znaleźć wektor unormowany $\boldsymbol{f}$ ortogonalny do wektora $\boldsymbol{h} = x - 1$ w przestrzeni $\mathbb{R}_1[x]$ z iloczynem skalarnym danym wzorem

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{f}(1)\,\boldsymbol{g}(1) + \boldsymbol{f}(2)\,\boldsymbol{g}(2) \ \text{ dla } \ \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}_1[x].$$

Zestaw 15. *odp. str. 101*

1. Czy zbiór $\mathbb{D} = \{\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}[x] : \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}_2[x] \text{ lub } \boldsymbol{q}'(1) = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}[x]$? Odpowiedź uzasadnić.

2. Uzasadnić z definicji, że wektory $(4, 1, 3)$, $(8, 2, 1)$, $(1, 0, 2)$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$.

3. Wektor $(7, 2, 3, 0, 1)$ uzupełnić do bazy przestrzeni liniowej

$$\mathbb{U} = \left\{(x, y, z, s, t) \in \mathbb{R}^5 : y + s = z - t = x - y - z\right\}.$$

4. Znaleźć wymiar przestrzeni liniowej generowanej przez kolumny macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ przeprowadza wektor $(1, 0)$ na wektor $(3, -2)$, a wektor $(1, 1)$ na wektor $(4, -1)$. Znaleźć obraz wektora $(1, -2)$ po trzykrotnym złożeniu tego przekształcenia.

6. Napisać współrzędne wektora $(2, 3, 1, 0)$ w wybranej bazie ortogonalnej przestrzeni $\operatorname{lin}\{(1, 1, -1, -1), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0)\}$.

Zestaw 16. *odp. str. 101*

1. Wskazać przykład nieskończonego liniowo niezależnego podzbioru przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ nie zawierającego wielokrotności wektorów: $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots$. Odpowiedź uzasadnić

2. Wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ są liniowo niezależne. Dla jakich wartości parametru p podane niżej wektory są liniowo niezależne:

$$2p\boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v} + p\boldsymbol{w}, \quad 2\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \quad p\boldsymbol{u} + p\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}?$$

3. Znaleźć wymiar i bazę przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2t = 6x \\ x + 2y + z + 2t = 6y \\ x + 2y + z + 2t = 6z \\ x + 2y + z + 2t = 6t \end{cases}.$$

4. Napisać wzór przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, którego jądrem i obrazem jest oś Ox.

5. Przekształcenie $L : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ jest określone wzorem

$$(L\boldsymbol{p})(x) = (2-x)\boldsymbol{p}'(x) \text{ dla } \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_2[x].$$

Pokazać liniowość tego przekształcenia i podać jego macierz w bazie $\{1,\, x,\, x^2\}$.

6. Znaleźć bazę ortogonalną przestrzeni $\mathbb{E}^4$ zawierającą wektory:

$$(1,1,0,-1), \quad (1,0,-1,1).$$

Zestaw 17. *odp. str. 101*

1. Czy zbiór $\mathbb{W} = \{(x,y,z) : xy = 0 \text{ i } yz = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Odpowiedź uzasadnić.

2. Dla jakich wartości parametru p podane wektory są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$: $x^2 + px + p^2$, $x^2 + p^2x + p^4$, $x^2 + p^3x + p^6$?

3. Obliczyć rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

4. Niech L będzie liniowym przekształceniem przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ określonym wzorem $(L\boldsymbol{p})(x) = \boldsymbol{p}(x) + \boldsymbol{p}'(x)$. Uzasadnić macierzowo, że przekształcenie L^{-1} istnieje i następnie wyznaczyć $L^{-1}\left(x + x^2\right)$.

5. Znaleźć wartości własne i odpowiadające im przestrzenie wektorów własnych przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ określonego wzorem

$$L(x,y,z) = (y,y,y).$$

6. Wyznaczyć bazę ortonormalną przestrzeni

$$\mathbb{W} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{E}^4 : 4x - z = 2y - 3z + 2t = 0\right\}.$$

Zestaw 18. *odp. str. 101*

1. Uzasadnić, że funkcje 2^x, x^2, $\sin \pi x$, $x - 3$ są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ wszystkich funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$.

2. Sprawdzić, że wektor $(5, 1, 2, -3)$ należy do przestrzeni liniowej

$$\mathbb{U} = \{(x + 2y + 4z, x + 2z, y + z, x - 2y) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

i następnie uzupełnić go do bazy tej przestrzeni.

3. Podać geometryczny opis zbioru rozwiązań podanego układu równań w zależności od parametru p :

$$\begin{cases} px + 2y + pz = 0 \\ x + py + z = 0 \\ px + 3y + pz = 0 \end{cases}.$$

4. Znaleźć bazy przestrzeni liniowych $\operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L$ dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ określonego wzorem

$$L(a, b, c, d) = (a - b - c + 3d, a + b - c - d, a - b - c + 2d).$$

5. Macierz przekształcenia liniowego $L : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ ma w bazie $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ postać

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć wektor $L^3(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$.

6. Znaleźć rzut ortogonalny $\boldsymbol{v}$ wektora $\boldsymbol{u} = (1, 1, 3, -1)$ na podprzestrzeń

$$\mathbb{V} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{E}^4 : x + z + 2t = y - 2t = x + y - z = 0\right\}.$$

Zestaw 19. *odp. str. 102*

1. Co można powiedzieć o liniowej zależności funkcji $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mających pochodne rzędu 2 i spełniających nierówność

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{f}(1) & \boldsymbol{f}'(1) & \boldsymbol{f}''(1) \\ \boldsymbol{g}(1) & \boldsymbol{g}'(1) & \boldsymbol{g}''(1) \\ \boldsymbol{h}(1) & \boldsymbol{h}'(1) & \boldsymbol{h}''(1) \end{vmatrix} > 0?$$

2. Wskazać bazę przestrzeni liniowej $\operatorname{lin}\{(1, 2, 3, 4, 5), (1, 1, 0, 1, 1), (2, 3, 3, 5, 7)\}$ zawierającą wektor $(0, 1, 3, 3, 4)$.

3. Określić wymiar przestrzeni rozwiązań układu równań

$$x + y + z = z + 2y + t = x - y + 3z - t = t.$$

4. Dany jest czworokąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(4, 2)$, $(1, 2)$ oraz przekształcenie płaszczyzny $L(x, y) = (x + 2y, x - y)$. Wyznaczyć pole figury będącej obrazem tego czworokąta w przekształceniu L.

5. Czy jest możliwe, aby w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}_1[x]$ z pewnym iloczynem skalarnym wielomiany 1, $x - 1$ tworzyły kąt $\frac{\pi}{4}$, a wielomiany 1, x były ortogonalne? Odpowiedź uzasadnić.

6. Wektory $(1, 1, 1, -1)$, $(1, -1, 1, 1)$, $(4, 2, -4, 2)$ uzupełnić do bazy ortogonalnej przestrzeni $\mathbb{E}^4$ i podać współrzędne wektora $(0, 1, 0, 0)$ w tej bazie.

Zestaw 20. *odp. str. 102*

1. Rozważmy zbiór $\mathbb{U}$ wszystkich funkcji dwóch zmiennych $\boldsymbol{z} = g(x, y)$, których wykresy są płaszczyznami przechodzącymi przez punkt $(3, -1, 0)$. Uzasadnić, że ten zbiór jest przestrzenią liniową.

2. Wykorzystując macierz przejścia z bazy do bazy podać współrzędne wektora $4\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2$ w bazie $\{4\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2, 6\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2\}$.

3. Znaleźć wszystkie rozwiązania niejednorodnego układu równań z niewiadomymi x, y, z, t, jeżeli wiadomo, że $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$, $t = 3$ jest jednym z rozwiązań tego układu, a jego macierz główna ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Znaleźć obraz wektora $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$ po obrocie o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół osi Ox i następnie o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół osi Oz.

5. Czy jest możliwe, aby wektor $(1, 1, 1)$ miał w pewnej bazie ortonormalnej przestrzeni $\mathbb{E}^3$ współrzędne $[1, 1, 0]$? Odpowiedź uzasadnić.

6. Wektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ są unormowane. Znaleźć rzut ortogonalny wektora $\boldsymbol{u}$ na podprzestrzeń $\operatorname{lin}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ jeżeli wiadomo, że wektor $\boldsymbol{u}$ jest ortogonalny do $\boldsymbol{v}_1$, z wektorem $\boldsymbol{v}_2$ tworzy kąt $\frac{\pi}{3}$, zaś $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$ tworzą kąt $\frac{\pi}{6}$.

Zestaw 21. *odp. str. 102*

1. Czy zbiór wszystkich macierzy rzeczywistych stopnia 2 o wyznacznikach niedodatnich tworzy przestrzeń liniową? Odpowiedź uzasadnić.

2. Zbadać liniową niezależność funkcji $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt{x}$, x w przestrzeni liniowej funkcji ciągłych na przedziale $(0, \infty)$.

3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ znaleźć macierz przejścia z bazy $\{(2, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ do bazy $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$.

4. Znaleźć jądro i obraz przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ określonego wzorem

$$L(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Czy liczby $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 9$ są wartościami własnymi przekształcenia liniowego

$$(L\boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{f}(3x)$$

w przestrzeni liniowej funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.