ALGEBRA LINIOWA

Teresa Jurlewicz Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA LINIOWA

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie dziesiąte poprawione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2023

Teresa Jurlewicz
Przedsiębiorstwo Informatyczne
YUMA
teresa.jurlewicz@yuma.com.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–67234–03–0

Wydanie X poprawione, Wrocław 2023
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BIS, Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp

Książka *„Algebra liniowa. Definicje, twierdzenia, wzory”* jest pierwszą częścią zestawu podręczników do przedmiotu Algebra liniowa. Pozostałymi częściami zestawu są zbiory zadań *„Przykłady i zadania”* oraz *„Kolokwia i egzaminy”*. Podręczniki te przeznaczone są głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci wydziałów nauk ścisłych uniwersytetów oraz uczelni ekonomicznych i pedagogicznych.

Opracowanie obejmuje przestrzenie i przekształcenia liniowe, układy równań liniowych oraz przestrzenie euklidesowe. Wszystkie zagadnienia teoretyczne zakończone są ćwiczeniami. Do większości twierdzeń podano dowody. Fragmenty materiału oznaczone gwiazdką nieznacznie wykraczają poza program przedmiotu. W ten sam sposób oznaczono trudniejsze ćwiczenia. Dodatkowy materiał oraz trudniejsze ćwiczenia dołączono z myślą o studentach, którzy chcą pogłębić swoje wiadomości. Równolegle do materiału omawianego na wykładzie studenci powinni rozwiązywać zadania. Metody rozwiązywania zadań oraz zadania przeznaczone do samodzielnej pracy można znaleźć w drugiej części zestawu „*Przykłady i zadania*”. Zadania, które w poprzednich latach studenci rozwiązywali na kolokwiach i egzaminach, są umieszczone w trzeciej części zestawu „*Kolokwia i egzaminy*”. Studentów zainteresowanych rozwiązywaniem trudnych i nietypowych zadań z tego przedmiotu zachęcamy do zapoznania się z książką „*Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami*”.

Do obecnego wydaniu dołączono szczegółowe omówienia zawartości rozdziałów. Ponadto poprawiono zauważone błędy i usterki.

Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej dziękujemy za uwagi o wcześniejszych wydaniach. Uprzejmie prosimy Wykładowców i Studentów o przesyłanie uwag o podręczniku oraz informacji o zauważonych błędach i usterkach.

Teresa Jurlewicz *Zbigniew Skoczylas*

1. Przestrzenie liniowe

W pierwszym paragrafie wprowadzamy podstawowe pojęcia związane z przestrzeniami liniowymi oraz omawiamy własności działań na wektorach z tych przestrzeni. Następnie podajemy najważniejsze przykłady takich przestrzeni (przestrzenie $\mathbb{R}^n$, przestrzenie wielomianów, funkcji ciągłych oraz macierzy ustalonego wymiaru). W drugim paragrafie wprowadzamy podprzestrzenie przestrzeni liniowych i omawiamy ich własności. W kolejnym wprowadzamy najważniejsze pojęcie algebry liniowej: liniową niezależność wektorów. Podajemy tam warunki gwarantujące liniową niezależność układu wektorów w różnych przestrzeniach liniowych. W następnych paragrafach wprowadzamy bazę przestrzeni liniowej i korzystając z tego pojęcia określamy wymiar przestrzeni oraz współrzędne wektora w bazie. Na końcu rozdziału definiujemy pojęcie sumy prostej podprzestrzeni oraz podajemy jej własności.

1.1. Podstawowe definicje

Definicja 1.1. *(przestrzeń liniowa)*

Niepusty zbiór $\mathbb{V}$ nazywamy *rzeczywistą przestrzenią liniową*, jeżeli dla dowolnych elementów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ określona jest suma $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ oraz dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ i dla każdego $\boldsymbol{u} \in \mathbb{V}$ określony jest iloczyn $\alpha\boldsymbol{u} \in \mathbb{V}$ przy czym oraz dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i dla dowolnych $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{V}$ działania te spełniają warunki:

(**1**) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (przemienność dodawania);

(**2**) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (łączność dodawania);

(**3**) istnieje element $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ taki, że dla każdego $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ mamy $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$ (istnienie elementu neutralnego);

(**4**) dla każdego $\boldsymbol{w} \in \mathbb{V}$ istnieje element $-\boldsymbol{w} \in \mathbb{V}$ taki, że $\boldsymbol{w} + (-\boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$ (istnienie elementu przeciwnego);

(**5**) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ oraz $\alpha\,(\beta\boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\,(\boldsymbol{u})$;

(**6**) $(\alpha + \beta)\,\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}$ oraz $\alpha\,(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$.

Uwaga. Elementy przestrzeni $\mathbb{V}$ nazywamy *wektorami*, a element $\mathbf{0}$ — *wektorem zerowym*. Rzeczywistą przestrzeń liniową nazywamy krótko przestrzenią liniową lub wektorową. Dopuszczając w definicji $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, otrzymamy określenie *zespolonej przestrzeni liniowej*. Elementami przestrzeni liniowych mogą być: wektory na prostej, płaszczyźnie lub w przestrzeni, ciągi liczbowe skończone lub nieskończone, macierze, funkcje, zbiory itp. Dla podkreślenia faktu, że funkcje i macierze są wektorami będziemy pisali je pogrubionymi literami np. $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}$ itp. Różnicę wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ przestrzeni liniowej definiujemy wzorem:

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}) \, .$$

Ćwiczenie 1.2. Sprawdzić, czy zbiory ze wskazanymi działaniami są przestrzeniami liniowymi:

(a) zbiór wektorów na płaszczyźnie ze zwykłymi działaniami: dodawaniem wektorów i mnożeniem wektora przez liczbę;

(b) zbiór wielomianów stopnia 5 ze zwykłymi działaniami: dodawaniem wielomianów i mnożeniem wielomianu przez liczbę;

(c) zbiór macierzy wymiaru 3×4 ze zwykłymi działaniami: dodawaniem macierzy i mnożeniem macierzy przez liczbę;

(d) zbiór ciągów nieskończonych z działaniami $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$ oraz $\alpha \boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots)$, gdzie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(e) zbiór funkcji okresowych o okresie $T = 2\pi$ ze zwykłymi działaniami na funkcjach.

Ćwiczenie 1.3. *(własności przestrzeni liniowej)*

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. Pokazać, że prawdziwe są stwierdzenia:

(a) $0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ dla każdego $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$;

(b) $\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $\alpha \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \implies (\alpha = 0 \text{ lub } \boldsymbol{v} = \mathbf{0})$;

(d) $(\alpha \boldsymbol{v} = \beta \boldsymbol{v} \text{ oraz } \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}) \implies \alpha = \beta$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oraz $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$;

(e) $(-\alpha)\boldsymbol{v} = -(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha(-\boldsymbol{v})$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz każdego $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$;

(f) $(\alpha \boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{v} \text{ oraz } \alpha \neq 0) \implies \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ dla dowolnych $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$;

(g) $(\alpha - \beta)\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{v} - \beta \boldsymbol{v}$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oraz każdego $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$.

FAKT 1.4. *(podstawowe przestrzenie liniowe)*

1. $\mathbb{R}^n$. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz niech

$$\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \, x_k \in \mathbb{R} \text{ dla } 1 \leqslant k \leqslant n\} \, .$$

Równość i działania w zbiorze $\mathbb{R}^n$ określamy w następujący sposób:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \iff x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \ldots,\ x_n = y_n,$$
$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)\,, \qquad \alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)\,,$$

gdzie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{R}^n$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

2. $\mathbb{R}^\infty$. Niech

$$\mathbb{R}^\infty = \{\boldsymbol{x}\,(x_1, x_2, \ldots) : \, x_n \in \mathbb{R} \text{ dla } n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Równość i działania w zbiorze $\mathbb{R}^\infty$ określamy w następujący sposób:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \iff x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots,$$
$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)\,, \qquad \alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots)\,,$$

gdzie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{R}^\infty$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

3. $\mathbb{R}[x]$. Niech $\mathbb{R}[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów rzeczywistych. Równość i działania w zbiorze $\mathbb{R}[x]$ wprowadzamy w naturalny sposób, tzn.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} \iff \iff \boldsymbol{p}(x) = \boldsymbol{q}(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R},$$
$$(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})\,(x) = \boldsymbol{p}(x) + \boldsymbol{q}(x), \qquad (\alpha\boldsymbol{p})\,(x) = \alpha\boldsymbol{p}(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

gdzie $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ są dowolnymi wielomianami, natomiast $\alpha \in \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{R}[x]$ z tak wprowadzonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

4. $\mathbb{R}_n[x]$. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $\mathbb{R}_n[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż n. Równość i działania w zbiorze $\mathbb{R}_n[x]$ wprowadzamy w naturalny sposób, tzn.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} \iff \boldsymbol{p}(x) = \boldsymbol{q}(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R},$$
$$(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})\,(x) = \boldsymbol{p}(x) + \boldsymbol{q}(x), \qquad (\alpha\boldsymbol{p})\,(x) = \alpha\boldsymbol{p}(x), \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

gdzie $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ są dowolnymi wielomianami, natomiast $\alpha \in \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{R}_n[x]$ z tak wprowadzonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

5. $\mathbb{C}\,(I)$. Niech $\mathbb{C}\,(I)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych na przedziale $I \subset \mathbb{R}$. Równość i działania w zbiorze $\mathbb{C}\,(I)$ wprowadzamy w naturalny sposób, tzn.

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} \iff \boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{g}(x) \text{ dla każdego } x \in I,$$
$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})\,(x) = \boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{g}(x), \qquad (\alpha\boldsymbol{f})\,(x) = \alpha\boldsymbol{f}(x) \text{ dla każdego } x \in I,$$

gdzie $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g} \in \mathbb{C}(I)$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{C}\,(I)$ z tak wprowadzonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

6. $\mathbb{M}_{m\times n}$. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ oraz niech $\mathbb{M}_{m\times n}$ oznacza zbiór wszystkich macierzy rzeczywistych o m wierszach i n kolumnach. Równość i działania w przestrzeni $\mathbb{M}_{m\times n}$ wprowadzamy w sposób naturalny, tzn.:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \iff a_{ij} = b_{ij} \text{ dla każdego } 1 \leqslant i \leqslant m \text{ oraz dla każdego } 1 \leqslant j \leqslant n,$$
$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [a_{ij} + b_{ij}]\,, \qquad \alpha\boldsymbol{A} = [\alpha a_{ij}]\,,$$

gdzie $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]\,, \boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{m\times n}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{M}_{m\times n}$ z tak wprowadzonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

Uwaga. Rozważa się także zespolone odpowiedniki wprowadzonych wyżej rzeczywistych przestrzeni liniowych.

1.2. Podprzestrzenie przestrzeni liniowej

Definicja 1.5. *(podprzestrzeń przestrzeni liniowej)*
Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. Niepusty zbiór $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ nazywamy *podprzestrzenią liniową* przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, jeżeli spełnia warunki:

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{W} \text{ dla dowolnych } \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{W};$$
$$\alpha\boldsymbol{w} \in \mathbb{W} \text{ dla każdego } \alpha \in \mathbb{R} \text{ oraz każdego } \boldsymbol{w} \in \mathbb{W}.$$

Uwaga. Warunki powyższej definicji można zastąpić jednym:

$$\alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{W} \text{ dla dowolnych } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ oraz dowolnych } \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{W}.$$

Zbior $\{\boldsymbol{0}\}$ oraz przestrzeń $\mathbb{V}$ są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Zbiory te nazywamy *podprzestrzeniami niewłaściwymi.* Pozostałe podprzestrzenie przestrzeni $\mathbb{V}$ nazywamy *podprzestrzeniami właściwymi.* Można pokazać, że każda podprzestrzeń liniowa przestrzeni liniowej jest przestrzenią liniową.

Ćwiczenie 1.6. Korzystając z definicji zbadać, czy zbiór $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, jeżeli:

(a) $\mathbb{W} = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) : x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$;

(b) $\mathbb{W} = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 = 0,\ x_2 + 3x_3 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$;

(c) $\mathbb{W} = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$;

(d) $\mathbb{W} = \Big\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots) : \text{granica } \lim\limits_{n\to\infty} x_n \text{ jest skończona}\Big\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^\infty$;

(e) $\mathbb{W}$ – zbiór wszystkich wielomianów stopnia parzystego, $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$;

(f) $\mathbb{W}$ – zbiór funkcji parzystych i ciągłych na przedziale $[-1, 1]$, $\mathbb{V} = \mathbb{C}\,([-1, 1])$;

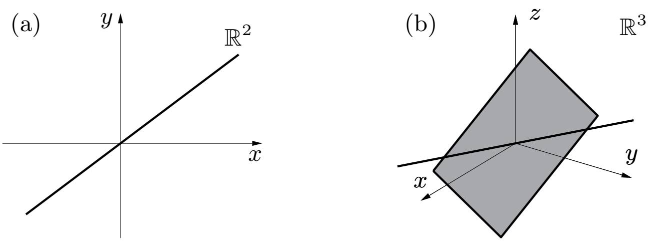
(g) $\mathbb{W}$ – zbiór macierzy diagonalnych stopnia 3, $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{3\times 3}$;

(h) $\mathbb{W} = \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{4\times 4} : \det \boldsymbol{A} = 0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{4\times 4}$.

Ćwiczenie 1.7. Uzasadnić, że jedynymi podprzestrzeniami właściwymi przestrzeni:

(a) $\mathbb{R}^2$ są proste przechodzące przez początek układu współrzędnych;

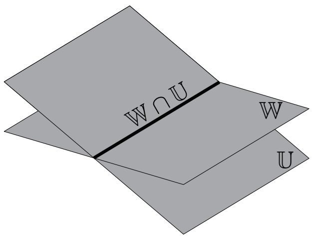
(b) $\mathbb{R}^3$ są proste i płaszczyzny przechodzące przez początek układu współrzędnych.



Rys. 1.1. Podprzestrzenie właściwe przestrzeni (a) $\mathbb{R}^2$; (b) $\mathbb{R}^3$

FAKT 1.8. *(o iloczynie i sumie podprzestrzeni liniowych)*
Niech $\mathbb{U}$ i $\mathbb{W}$ będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Wówczas

1. zbiór $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{V}$;



Rys. 1.2. Część wspólna podprzestrzeni jest podprzestrzenią

2. zbiór $\mathbb{U} \cup \mathbb{W}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{V}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{U} \subset \mathbb{W}$ lub $\mathbb{W} \subset \mathbb{U}$.

Dowód. **1**. Niech $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{U} \cap \mathbb{W}$ oraz niech α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. Wówczas $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{U}$ oraz $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{W}$. Ponieważ zbiory $\mathbb{U}$, $\mathbb{W}$ są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$, więc $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{U}$ i $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{W}$. Stąd wynika, że $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{U} \cap \mathbb{W}$.
2. Najpierw udowodnimy implikację w prawo $(\Longrightarrow)$. Załóżmy, że zbiór $\mathbb{U} \cup \mathbb{W}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że nie zachodzi żaden z warunków: $\mathbb{U} \subset \mathbb{W}$, $\mathbb{W} \subset \mathbb{U}$. To oznacza, że istnieją wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{V}$ takie, że $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$ i $\boldsymbol{u} \notin \mathbb{W}$ oraz $\boldsymbol{w} \in \mathbb{W}$ i $\boldsymbol{w} \notin \mathbb{U}$. Ponieważ $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U} \cup \mathbb{W}$ i $\boldsymbol{w} \in \mathbb{U} \cup \mathbb{W}$, więc $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \in \mathbb{U} \cup \mathbb{W}$, bo $\mathbb{U} \cup \mathbb{W}$ jest podprzestrzenią liniową. Stąd wynika,

że $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \in \mathbb{U}$ lub $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \in \mathbb{W}$. Gdyby $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \in \mathbb{U}$, to $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$, co przeczy warunkowi $\boldsymbol{w} \notin \mathbb{U}$. Podobie, gdyby $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \in \mathbb{W}$, to $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{w} \in \mathbb{W}$, a to jest sprzeczne z warunkiem $\boldsymbol{u} \notin \mathbb{W}$. Z otrzymanych sprzeczności wynika, że $\mathbb{U} \subset \mathbb{W}$ lub $\mathbb{W} \subset \mathbb{U}$.
Przechodzimy teraz do dowodu implikacji w lewo $(\Longleftarrow)$. Załóżmy, że $\mathbb{U} \subset \mathbb{W}$ lub $\mathbb{W} \subset \mathbb{U}$. Wówczas $\mathbb{U} \cup \mathbb{W} = \mathbb{W}$ lub $\mathbb{U} \cup \mathbb{W} = \mathbb{U}$. W obu przypadkach to oznacza, że zbiór $\mathbb{U} \cup \mathbb{W}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$.

Ćwiczenie 1.9. Które ze zbiorów $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$ są podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{V}$:

(a) $\mathbb{W}_1 = \{(x,y,z) : x+y-2z=0 \text{ i } 3x-2y+z=0\}$,
$\mathbb{W}_2 = \{(x,y,z) : x+y-2z=0 \text{ lub } 3x-2y+z=0\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$;

(b) $\mathbb{W}_1 = \left\{(a_n) : \text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny i } \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$,
$\mathbb{W}_2 = \left\{(a_n) : \text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny lub } \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^\infty$;

(c) $\mathbb{W}_1 = \{\boldsymbol{p} : \boldsymbol{p}(1) = 0 \text{ lub } \boldsymbol{p}'(2) = 0\}$, $\mathbb{W}_2 = \{\boldsymbol{p} : \boldsymbol{p}(1) = 0 \text{ i } \boldsymbol{p}'(2) = 0\}$,
$\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$?

1.3. Liniowa niezależność wektorów

Definicja 1.10. *(liniowa niezależność i zależność wektorów)*

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. Mówimy, że wektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{V}$ $(n \in \mathbb{N})$ są *liniowo niezależne*, jeżeli dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ z warunku

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0},$$

wynikają równości:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

W przeciwnym przypadku mówimy, że wektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ są *liniowo zależne*. Równoważnie: wektory $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_n \in \mathbb{V}$ są liniowo zależne, jeżeli istnieją α_1, α_2, …, $\alpha_n \in \mathbb{R}$, nie wszystkie równe 0, takie, że

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Ćwiczenie 1.11. W przestrzenie liniowej $\mathbb{V}$, korzystając z definicji zbadać liniową niezależność wektorów:

(a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,1,1)$;

(b) $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x]$, $\boldsymbol{p}_1 = x^2 - 1$, $\boldsymbol{p}_2 = x+1$, $\boldsymbol{p}_3 = -x^2+2x+3$, $\boldsymbol{p}_4 = -2x+3$;

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbb{V} = \mathbb{C}\left([0.2\pi]\right)$, $\boldsymbol{f}_1 = \sin x$, $\boldsymbol{f}_2 = \cos x$.

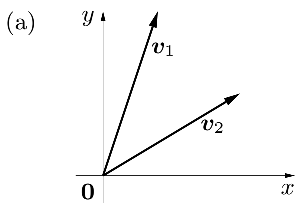
Ćwiczenie 1.12. Wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ są liniowo niezależne. Zbadać liniową niezależność wektorów:

(a) $2\boldsymbol{u}$, $-\boldsymbol{v}$, $(1/3)\boldsymbol{w}$; (b) $3\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $2\boldsymbol{v}-4\boldsymbol{w}$;

(c) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$; (d) $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}$.

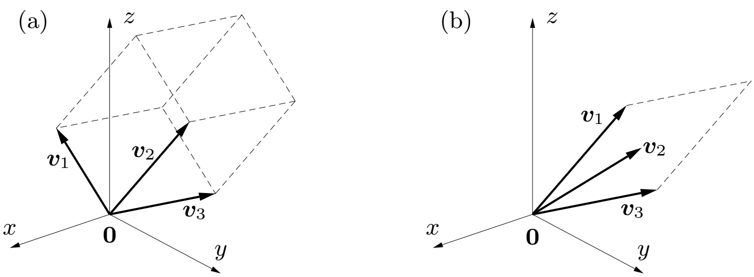
Ćwiczenie 1.13. *(o liniowej niezależności wektorów na płaszczyźnie/w przestrzeni)* Pokazać, że:

(a) dwa wektory na płaszczyźnie są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy nie są współliniowe;



Rys. 1.3. Wektory na płaszczyźnie liniowo (a) niezależne; (b) zależne

(b) trzy wektory w przestrzeni są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy nie są współpłaszczyznowe.



Rys. 1.4. Wektory w przestrzeni liniowo (a) niezależne; (b) zależne

FAKT 1.14. *(własności wektorów liniowo niezależnych i liniowo zależnych)* Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową oraz niech $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ będą wektorami z tej przestrzeni. Ponadto niech $\mathbb{W}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Wówczas prawdziwe są stwierdzenia:

1. wektor $\boldsymbol{v}$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$;

2. wektory $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{w}_n$, $\mathbf{0}$ są liniowo zależne;

3. jeżeli wektory $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{w}_n$ są liniowo zależne, to wektory $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{w}_n$, $\boldsymbol{v}$ są również liniowo zależne;

4. jeżeli wektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ są liniowo niezależne, to wektory $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2, \ldots$, $\boldsymbol{w}_k$ $(k < n)$ są również liniowo niezależne;

5. jeżeli wektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in \mathbb{W}$ są liniowo niezależne (zależne) w przestrzeni $\mathbb{V}$, to są również liniowo niezależne (zależne) w przestrzeni $\mathbb{W}$.

Dowód. **1**. Jeżeli $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ i $\alpha \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, to $\alpha = 0$ jako wniosek z aksjomatów przestrzeni liniowej (Ćwiczenie 1.3 własność **3**.). Wektor $\boldsymbol{v}$ jest więc liniowo niezależny.

2. Ponieważ

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \boldsymbol{w}_1 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0},$$

więc wektory $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ są liniowo zależne.

3. Z liniowej zależności wektorów $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ wynika istnienie stałych α_1, $\alpha_2, \ldots$, α_n nie wszystkich równych 0 takich, że

$$\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0}.$$

Stąd mamy

$$0 \cdot \boldsymbol{v} + \alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0},$$

co oznacza, że wektory $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ także są liniowo zależne.

4. Załóżmy liniową niezależność wektorów $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$. Niech teraz

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \boldsymbol{w}_k = \mathbf{0},$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ oraz $k < n$. Wówczas mamy

$$\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{w}_k + 0 \cdot \boldsymbol{w}_{k+1} + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0}.$$

Z liniowej niezależności wszystkich n wektorów wynika, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. To z kolei oznacza liniową niezależność wektorów $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$.

5. To stwierdzenie wynika bezpośrednio z definicji liniowej niezależności (zależności) wektorów.

Definicja 1.15. *(kombinacja liniowa wektorów)*

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. *Kombinacją liniową* wektorów $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots$, $\boldsymbol{v}_n \in \mathbb{V}$ o współczynnikach rzeczywistych (zespolonych) α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nazywamy wektor

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n.$$

Ćwiczenie 1.16. Napisać kombinacje liniowe podanych wektorów ze wskazanymi współczynnikami:

(a) $\boldsymbol{v}_1 = (0, -2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 3)$, $\alpha_1 = -1/2$, $\alpha_2 = 2$, gdzie $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$;

(b) $\boldsymbol{p}_1 = x^3 - 3x^2 + 1$, $\boldsymbol{p}_2 = 2x - 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, gdzie $\mathbb{V} = \mathbb{R}_3[x]$.

FAKT 1.17. *(liniowa niezależność a kombinacje liniowe)*

1. Wektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ ($n \geqslant 2$) są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z nich (np. $\boldsymbol{w}_k$ gdzie $1 < k < n$) jest kombinacją liniową pozostałych:

$$\boldsymbol{w}_k = \alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 + \ldots + \alpha_{k-1} \boldsymbol{w}_{k-1} + \alpha_{k+1} \boldsymbol{w}_{k+1} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{w}_n,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

2. Jeżeli wektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ są liniowo niezależne, a wektory $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$, $\ldots, \boldsymbol{w}_n$ są liniowo zależne, to wektor $\boldsymbol{v}$ jest kombinacją liniową wektorów $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\ldots, \boldsymbol{w}_n$:

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{w}_n,$$

gdzie α_1, α_2, ..., $\alpha_n \in \mathbb{R}$.

Dowód. **1**. Załóżmy, że wektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ są liniowo zależne. Wówczas istnieją liczby $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, z których co najmniej jedna (np. α_k, $1 < k < n$) nie jest zerem takie, że

$$\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \boldsymbol{w}_{k-1} + \alpha_k \boldsymbol{w}_k + \alpha_{k+1} \boldsymbol{w}_{k+1} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0}\,.$$

Stąd wynika, że

$$\boldsymbol{w}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} \boldsymbol{w}_1 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \boldsymbol{w}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \boldsymbol{w}_{k+1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k} \boldsymbol{w}_n,$$

więc wektor $\boldsymbol{w}_k$ jest rzeczywiście kombinacją liniową pozostałych. Z drugiej strony zakładając, że

$$\boldsymbol{w}_k = \beta_1 \boldsymbol{w}_1 + \ldots + \beta_{k-1} \boldsymbol{w}_{k-1} + \beta_{k+1} \boldsymbol{w}_{k+1} + \ldots + \beta_n \boldsymbol{w}_n,$$

otrzymujemy równość

$$\beta_1 \boldsymbol{w}_1 + \ldots + \beta_{k-1} \boldsymbol{w}_{k-1} - 1 \cdot \boldsymbol{w}_k + \beta_{k+1} \boldsymbol{w}_{k+1} + \ldots + \beta_n \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0}\,.$$

Z równości tej wynika, że wektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ są liniowo zależne.

2. Załóżmy, że wektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ są liniowo niezależne, a wektory $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2, \ldots$, $\boldsymbol{w}_n$ liniowo zależne. Wtedy istnieją liczby α, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\alpha \boldsymbol{v} + \alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0}\,,$$

przy czym co najmniej jedna z nich nie jest zerem. Gdyby $\alpha = 0$, to zachodziłaby równość

$$\alpha_1 \boldsymbol{w}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{w}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0}\,,$$

zaś wśród liczb $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ znajdowałaby się liczba różna od zera. Jest to sprzeczne z liniową niezależnością wektorów $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$. Zatem $\alpha \neq 0$, więc

$$\boldsymbol{v} = -\frac{\alpha_1}{\alpha} \boldsymbol{w}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} \boldsymbol{w}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha} \boldsymbol{w}_n.$$

Uwaga. Wektory $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ $(n \geqslant 2)$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z nich nie jest kombinacją liniową pozostałych.

Ćwiczenie 1.18. Uzasadnić, że podane układy funkcji są liniowo zależne w przestrzeni $\mathbb{C}\,(\mathbb{R})$:

(a) $\boldsymbol{f}_1 \equiv 1,\ \boldsymbol{f}_2 = \sin^2 x,\ \boldsymbol{f}_3 = \cos^2 x$;

(b) $\boldsymbol{f}_1 = x,\ \boldsymbol{f}_2 = (1+x)^2,\ \boldsymbol{f}_3 = (1-x)^2$;

(c) $\boldsymbol{f}_1 = \operatorname{arc\,tg} x,\ \boldsymbol{f}_2 = \operatorname{arc\,ctg} x,\ \boldsymbol{f}_3 \equiv 1$;

(d) $\boldsymbol{f}_1 = \ln\left(1+x^2\right)^3,\ \boldsymbol{f}_2 = \ln \dfrac{1}{(1+x^2)^4}$.

Definicja 1.19. *(liniowa niezależność nieskończonego układu wektorów)*
Nieskończony układ wektorów z przestrzeni liniowej jest *liniowo niezależny*, jeżeli każdy jego skończony podukład jest liniowo niezależny. W przeciwnym przypadku mówimy, że układ ten jest *liniowo zależny*.

Ćwiczenie 1.20. Uzasadnić liniową niezależność nieskończonych układów wektorów:

(a) $A = \{(1,0,0,\ldots),(0,1,0,\ldots),(0,0,1,\ldots),\ldots\}$ w $\mathbb{R}^\infty$;

(b) $A = \{1, x, x^2, \ldots\}$ w $\mathbb{R}[x]$;

(c*) $A = \{\operatorname{sh} x,\ \operatorname{sh} 2x,\ \operatorname{sh} 3x, \ldots\}$, $\mathbb{C}\,(\mathbb{R})$;

(d*) $A = \left\{e^{\lambda x} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ w $\mathbb{C}\,(\mathbb{R})$.

TWIERDZENIE 1.21. *(kryterium liniowej niezależności funkcji)*
Niech funkcje $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ będą określone na przedziale I i mają tam ciągłe pochodne rzędu $n-1$ $(n \geqslant 2)$. Ponadto niech wrońskian układu tych funkcji, tj. wyznacznik

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1(x) & \boldsymbol{f}_2(x) & \ldots & \boldsymbol{f}_n(x) \\ \boldsymbol{f}_1'(x) & \boldsymbol{f}_2'(x) & \ldots & \boldsymbol{f}_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{f}_1^{(n-1)}(x) & \boldsymbol{f}_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \boldsymbol{f}_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix},$$

nie znika tożsamościowo na I. Wtedy funkcje $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{C}\,(I)$.

Dowód. Niech funkcje $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ spełniają założenia twierdzenia oraz niech

$$\alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{f}_n \equiv 0.$$

Różniczkując $n{-}1$-krotnie powyższą tożsamość otrzymamy kolejno następujące związki

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \boldsymbol{f}_1' + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2' + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{f}_n' &\equiv 0,\\
\alpha_1 \boldsymbol{f}_1'' + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2'' + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{f}_n'' &\equiv 0,\\
&\ \vdots\\
\alpha_1 \boldsymbol{f}_1^{(n-1)} + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{f}_n^{(n-1)} &\equiv 0.
\end{aligned}$$

Możemy więc zapisać, że dla każdego $x \in I$ zachodzi wzór

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1(x) & \boldsymbol{f}_2(x) & \ldots & \boldsymbol{f}_n(x) \\ \boldsymbol{f}_1'(x) & \boldsymbol{f}_2'(x) & \ldots & \boldsymbol{f}_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{f}_1^{(n-1)}(x) & \boldsymbol{f}_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \boldsymbol{f}_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Otrzymaliśmy dla każdego $x \in I$ jednorodny układ n równań z n niewiadomymi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Z założenia istnieje takie $x \in I$, dla którego wyznacznik macierzy głównej tego układu jest różny od zera. Jego jedyne rozwiązanie w tym przypadku, jako układu Cramera, jest zerowe. Zatem $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\ldots, \alpha_n = 0$, skąd wynika liniowa niezależność funkcji $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{f}_n$. To kończy dowód.

Uwaga*. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Na przykład funkcje

$$\boldsymbol{f}_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x \geqslant 0, \end{cases} \qquad \boldsymbol{f}_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

są liniowo niezależne, ale ich wrońskian znika tożsamościowo na $\mathbb{R}$.

Ćwiczenie* 1.22. Korzystając z powyższego kryterium uzasadnić liniową niezależność układów funkcji:

(a) $\sin x$, $\cos x$; (b) e^{-x}, 1, e^x; (c) e^x, xe^x; e^{2x}, xe^{2x};
(d) 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$; (e) $e^{4x}\sin x$, $e^{3x}\cos 2x$, $e^{2x}\sin 3x$, $e^x\cos 4x$.

FAKT 1.23. *(warunek konieczny i dostateczny liniowej niezależności funkcji)*
Funkcje $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ z przestrzeni $\mathbb{C}(I)$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy w przedziale I istnieją liczby $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ takie, że

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1(x_1) & \boldsymbol{f}_1(x_2) & \ldots & \boldsymbol{f}_1(x_n) \\ \boldsymbol{f}_2(x_1) & \boldsymbol{f}_2(x_2) & \ldots & \boldsymbol{f}_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{f}_n(x_1) & \boldsymbol{f}_n(x_2) & \ldots & \boldsymbol{f}_n(x_n) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Dowód. Konieczność warunku jest oczywista (wynika z definicji liniowej niezależności funkcji). W dowodzie dostateczności zastosujemy metodę indukcji matematycznej. Niech $n = 1$. Jeżeli funkcja $\boldsymbol{f}_1$ jest liniowo niezależna, to nie jest ona tożsamościowo równa zeru. Istnieje więc liczba $x_1 \in I$ taka, że $\boldsymbol{f}_1(x_1) \neq 0$. Załóżmy teraz, że dowodzona własność jest spełniona dla n funkcji. Ponadto niech funkcje $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{f}_{n+1}$ będą liniowo niezależne. Wówczas funkcje $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ są liniowo niezależne, więc z założenia indukcyjnego istnieją liczby $x_1, \ldots, x_n \in I$ takie, że $d = \det\left[\boldsymbol{f}_i(x_j)\right]_{i,j=1}^n \neq 0$. Niech

$$D(x) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1(x_1) & \ldots & \boldsymbol{f}_1(x_n) & \boldsymbol{f}_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{f}_n(x_1) & \ldots & \boldsymbol{f}_n(x_n) & \boldsymbol{f}_n(x) \\ \boldsymbol{f}_{n+1}(x_1) & \ldots & \boldsymbol{f}_{n+1}(x_n) & \boldsymbol{f}_{n+1}(x) \end{bmatrix}$$

dla $x \in I$. Zachodzi równość

$$D(x) = c_1\boldsymbol{f}_1(x) + \ldots + c_n\boldsymbol{f}_n(x) + d\,\boldsymbol{f}_{n+1}(x)$$

dla pewnych liczb $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ oraz dla $d \neq 0$. Warunek $D(x) \equiv 0$ jest sprzeczny z liniową niezależnością funkcji $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{f}_{n+1}$. Istnieje więc $x_{n+1} \in I$ spełniający warunki $x_{n+1} \neq x_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $D(x_{n+1}) \neq 0$. To kończy dowód.

Ćwiczenie* 1.24. Stosując powyższy fakt uzasadnić liniową niezależność układów funkcji:

(a) x, $\sin x$, x^2, $\sin^2 x$; (b) 1, e^x, e^{2x}, e^{3x}, $\ldots$, e^{nx} $(n \in \mathbb{N})$

w przestrzeni funkcji ciągłych na zbiorze $\mathbb{R}$.

1.4. Baza i wymiar przestrzeni liniowej

Definicja 1.25. *(operacja generowania)*

Niech $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ będą wektorami z przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ oznaczamy przez

$$\operatorname{lin}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}.$$

Zatem

$$\operatorname{lin}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} = \{\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n : \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Podobnie określa się operację lin dla nieskończonego zbioru A wektorów:

$$\operatorname{lin} A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n : \boldsymbol{v}_i \in A \text{ oraz } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$