

**ALGEBRA
I
GEOMETRIA
ANALITYCZNA**

Teresa Jurlewicz Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA I GEOMETRIA ANALITYCZNA

Przykłady i zadania

Wydanie dwudzieste pierwsze zmienione



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2017

Projekt okładki

IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1995 – 2017 by Oficyna Wydawnicza GiS

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie L^AT_EX.

ISBN 978-83-62780-48-8

Wydanie XXI zmienione, Wrocław 2017
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Oficyna Wydawnicza ATUT

Spis treści

Wstęp	7
1 Liczby zespolone	9
Postać algebraiczna liczby zespolonej	9
Postać trygonometryczna liczby zespolonej	19
Postać wykładnicza liczby zespolonej	26
Pierwiastkowanie liczb zespolonych	29
2 Wielomiany	35
Podstawowe definicje i własności	35
Pierwiastki wielomianów	37
Zasadnicze twierdzenie algebry	39
Ułamki proste	45
3 Macierze i wyznaczniki	51
Działania na macierzach	51
Wyznaczniki	58
Macierz odwrotna	64
4 Układy równań liniowych	72
Układy Cramera	72
Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera–Capellego	76
Metody rozwiązywania układów Cramera	86
Metody rozwiązywania dowolnych układów równań	93
5 Geometria analityczna w przestrzeni	102
Wektory i iloczyn skalarny	102
Iloczyn wektorowy i mieszany	105
Równania płaszczyzny	110
Równania prostej	115
Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn	121
Zastosowania rachunku wektorowego w mechanice	145

6 Krzywe stożkowe	148
Okrąg	148
Elipsa	155
Hiperbola	161
Parabola	167
Zbiory zadań	174

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań* jest drugą częścią zestawu podręczników do przedmiotu Algebra z geometrią analityczną. Pierwszą częścią zestawu jest książka pt. „*Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory*”, a trzecią – opracowanie pt. „*Algebra i geometria analityczna. Kolokwia i egzaminy*”. Podręczniki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci wydziałów nauk ścisłych i przyrodniczych uniwersytetów oraz uczelni ekonomicznych, pedagogicznych i rolniczych.

Zbiór „*Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania*” zawiera przykładowe zadania z rozwiązaniami przedstawionymi „krok po kroku” oraz podobne zadania wraz z odpowiedziami przeznaczone do samodzielnej pracy. Przykłady i zadania obejmują liczby zespolone, wielomiany, macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych, geometrię analityczną w przestrzeni oraz krzywe stożkowe. Materiał teoretyczny niezbędny do rozwiązywania zadań można znaleźć w książce pt. „*Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory*”. Podpunkty przykładów i zadań oznaczone początkowymi literami alfabetu są z reguły najprostsze, a te oznaczone gwiazdką – trudniejsze. Studentów zainteresowanych rozwiązywaniem trudnych i nietypowych zadań z algebry zachęcamy do zapoznania się z książką „*Algebra i analiza. Egzaminy na ocenę celującą*”

W obecnym wydaniu przeredagowano rozwiązania wielu przykładów. Ponadto, aby zachęcić studentów do aktywnego korzystania ze zbioru, bezpośrednio po rozwiązanych przykładach umieszczono zadania przznaczone do samodzielnej pracy. Poprawiono także zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o zbiorze.

Teresa Jurlawicz

Zbigniew Skoczylas

*Do 2005 r. książka miała tytuł „*Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania*”.

2

Wielomiany

Podstawowe definicje i własności

■ **Przykład 2.1.** Obliczyć iloczyny par wielomianów rzeczywistych lub zespolonych:

(a) $P(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 3$, $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$;

(b) $W(z) = z^2 + 3iz + 1 - i$, $V(z) = -iz^2 + 4z - 6i$.

Rozwiązanie.

(a) Mamy

$$\begin{aligned}(P \cdot Q)(x) &= P(x) \cdot Q(x) \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 3) \cdot (x^3 - 2x^2 + 5x - 1) \\ &= x^5 - 2x^4 + 5x^3 - x^2 - \sqrt{2}x^4 + 2\sqrt{2}x^3 - 5\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x + 3x^3 - 6x^2 + 15x - 3 \\ &= x^5 - (2 + \sqrt{2})x^4 + 2(4 + \sqrt{2})x^3 - (7 + 5\sqrt{2})x^2 + (15 + \sqrt{2})x - 3.\end{aligned}$$

(b) Mamy

$$\begin{aligned}(W \cdot V)(z) &= W(z) \cdot V(z) \\ &= (z^2 + 3iz + 1 - i) \cdot (-iz^2 + 4z - 6i) \\ &= -iz^4 + 4z^3 - 6iz^2 + 3z^3 + 12iz^2 + 18z - (1 + i)z^2 + 4(1 - i)z - 6i - 6 \\ &= -iz^4 + 7z^3 + (5i - 1)z^2 + (22 - 4i)z - 6(1 + i).\end{aligned}$$

□ **Zadanie 2.1.** Obliczyć iloczyny par wielomianów rzeczywistych lub zespolonych:

(a) $P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$, $Q(x) = x^2 - x + 4$;

(b) $W(z) = z^3 + 5z^2 - iz + 3$, $V(z) = (1 + i)z - 2$.

Odpowiedzi. (a) $P(x) \cdot Q(x) = x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 11x^3 - 2x^2 + 5x - 4$; (b) $W(z) \cdot V(z) = (1 + i)z^4 + (3 + 5i)z^3 - (9 + i)z^2 + (3 + 5i)z - 6$.

■ **Przykład 2.2.** Obliczyć ilorazy oraz reszty z dzielen wielomianów P przez wielomiany Q , jeżeli:

(a) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x$, $Q(x) = x^2 - 1$; (b) $P(x) = x^{15} - 1$, $Q(x) = x^5 + 1$;

(c) $P(z) = z^5 + 3z^2 + 7iz - 1$, $Q(z) = z - i$.

Rozwiązanie. Wielomian I jest ilorazem, a wielomian R resztą z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q , jeżeli $P(x) = Q(x) \cdot I(x) + R(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ oraz $\text{st } R < \text{st } Q$. W rozwiązaniu wykorzystamy algorytm dzielenia wielomianów.

(a) Mamy

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 5x + 2 \\
 \hline
 (2x^4 - 5x^3 + 2x) : (x^2 - 1) \\
 - 2x^4 + 2x^2 \\
 \hline
 = -5x^3 + 2x^2 + 2x \\
 + 5x^3 \\
 \hline
 = 2x^2 - 3x \\
 - 2x^2 + 2 \\
 \hline
 = -3x + 2
 \end{array}$$

Otrzymaliśmy iloraz $2x^2 - 5x + 2$ oraz reszta $-3x + 2$. Wynik ten można zapisać w formie równości

$$2x^4 - 5x^3 + 2x = (x^2 - 1)(2x^2 - 5x + 2) - 3x + 2$$

(b) Mamy

$$\begin{array}{r}
 x^{10} - x^5 + 1 \\
 \hline
 (x^{15} - 1) : (x^5 + 1) \\
 - x^{15} - x^{10} \\
 \hline
 = -x^{10} - 1 \\
 + x^{10} + x^5 \\
 \hline
 = x^5 - 1 \\
 - x^5 - 1 \\
 \hline
 = -2
 \end{array}$$

Otrzymaliśmy iloraz $x^{10} - x^5 + 1$ oraz reszta -2 . Wynik ten można zapisać w formie równości

$$x^{15} - 1 = (x^5 + 1)(x^{10} - x^5 + 1) - 2.$$

(c) Mamy

$$\begin{array}{r}
 z^4 + iz^3 - z^2 + (3-i)z + 1 + 10i \\
 \hline
 (z^5 + iz^4 + 3z^2 + 7iz - 1) : (z - i) \\
 - z^5 + iz^4 \\
 \hline
 = iz^4 + 3z^2 + 7iz - 1 \\
 - iz^4 - z^3 \\
 \hline
 = -z^3 + 3z^2 + 7iz - 1 \\
 + z^3 - iz^2 \\
 \hline
 = (3-i)z^2 + 7iz - 1 \\
 - (3-i)z^2 + (1+3i)z \\
 \hline
 = (1+10i)z - 1 \\
 - (1+10i)z - (10-i) \\
 \hline
 = -11 + i
 \end{array}$$

Otrzymaliśmy iloraz $z^4 + iz^3 - z^2 + (3-i)z + 1 + 10i$ oraz resztę $-11 + i$. Wynik ten można zapisać w postaci równości

$$z^5 + 3z^2 + 7iz - 1 = (z^4 + iz^3 - z^2 + (3-i)z + 1 + 10i) - 11 + i.$$

□ **Zadanie 2.2.** Obliczyć ilorazy oraz reszty z dzielenia wielomianów P przez wielomiany Q , jeżeli:

(a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x^2 - 3x + 1$;

(b) $P(x) = x^{16} - 16$, $Q(x) = x^4 + 2$; (c) $P(z) = z^5 - z^3 + 1$, $Q(z) = (z - i)^3$.

Odpowiedzi. (a) Iloraz $2x^2 + 3x + 11$, reszta z dzielenia $25x - 5$; (b) Iloraz $x^{12} - 2x^8 + 4x^4 - 8$, reszta z dzielenia 0; (c) Iloraz $z^2 + 3iz - 7$, reszta z dzielenia $-13iz^2 - 18z + 1 + 7i$.

Pierwiastki wielomianów

■ **Przykład 2.3.** Znaleźć pierwiastki całkowite wielomianów:

(a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; (b) $2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$; (c) $x^5 + 5x^3 + 3x^2 - x + 15$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych: każdy całkowity pierwiastek wielomianu jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

(a) Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 6$ są liczby: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6. Obliczając wartości wielomianu kolejno dla tych dzielników widzimy, że pierwiastkami całkowitymi są 1, -2, 3. Ponieważ jest to wielomian stopnia 3, więc są to jego jedyne pierwiastki.

(b) Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = -3$ są liczby: 1, -1, 3, -3. Obliczając wartości wielomianu kolejno dla tych dzielników widzimy, że jedynym pierwiastkiem całkowitym jest 3.

(c) Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 15$ są liczby: 1, -1, 3, -3, 5, -5, 15, -15. Obliczając wartości wielomianu kolejno dla tych dzielników wnioskujemy, że nie ma on pierwiastków całkowitych.

Uwaga. W wielu przypadkach obliczenia można znacznie uprościć np. badając parzystość wartości wielomianu dla dzielników wyrazu wolnego. W przykładzie (c) dla każdej wartości całkowitej x wartość wielomianu jest liczbą nieparzystą (jako suma algebraiczna czterech liczb jednakowej parzystości oraz 15), zatem nie może być równa 0.

□ **Zadanie 2.3.** Znaleźć pierwiastki całkowite wielomianów:

(a) $x^3 + x^2 - 4x - 4$;

(b) $3x^3 - 7x^2 + 4x - 4$;

(c) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;

(d) $x^4 + 3x^3 - x^2 + 17x + 99$.

Odpowiedzi. (a) -1, 2, -2; (b) 2; (c) 1, -2, 3; (d) wielomian nie ma pierwiastków całkowitych. Wskazówka. Wykorzystać uwagę z przykładu (2.3 (c)).

■ **Przykład 2.4.** Znaleźć pierwiastki wymierne wielomianów:

(a) $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$; (b) $x^3 + \frac{x^2}{6} - x + \frac{1}{3}$; (c) $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x - 9$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o postaci pierwiastków wymiernych wielomianu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych: jeżeli liczba wymierna p/q , gdzie ułamek p/q jest nieskracalny, jest pierwiastkiem tego wielomianu, to p

jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , a q dzielnikiem współczynnika a_n .

(a) Dla wielomianu $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$ mamy $a_4 = 4$ oraz $a_0 = -1$. Dzielnikami wyrazu wolnego a_0 są liczby 1, -1. Dzielnikami współczynnika a_4 są: 1, -1, 2, -2, 4, -4. Zatem pierwiastkami wymiernymi tego wielomianu mogą być tylko liczby:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{-1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{-1}{4}.$$

Obliczając wartości wielomianu kolejno dla tych liczb wnioskujemy, że tylko $-1/2$ jest jego pierwiastkiem wymiernym.

(b) Ponieważ

$$x^3 + \frac{x^2}{6} - x + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} (6x^3 + x^2 - 6x + 2),$$

więc pierwiastki wielomianu $x^3 + x^2/6 - x + 1/3$ pokrywają się z pierwiastkami wielomianu $6x^3 + x^2 - 6x + 2$. Dla wielomianu $6x^3 + x^2 - 6x + 2$ mamy $a_3 = 6$ oraz $a_0 = 2$. Dzielnikami wyrazu wolnego a_0 są liczby: 1, -1, 2, -2. dzielnikami współczynnika a_3 są natomiast liczby: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6. Zatem pierwiastkami wymiernymi rozważanego wielomianu mogą być tylko liczby:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{-1}{1}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{-2}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{-1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{-2}{3}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{-1}{6}.$$

Po sprawdzeniu okazuje się, że jedynym pierwiastkiem wymiernym jest $\frac{1}{2}$.

(c) Dla wielomianu $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x - 9$ mamy $a_6 = 3$ oraz $a_0 = -9$. Dzielnikami wyrazu wolnego a_0 są liczby: 1, -1, 3, -3, 9, -9. Dzielnikami współczynnika a_6 są natomiast liczby: 1, -1, 3, -3. Zatem pierwiastkami wymiernymi tego wielomianu mogą być tylko liczby

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{-1}{1}, \quad \frac{3}{1}, \quad \frac{-3}{1}, \quad \frac{9}{1}, \quad \frac{-9}{1}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{-1}{3}.$$

Po sprawdzeniu okazuje się, że żadna z tych liczb nie jest pierwiastkiem wielomianu.

Uwaga. Obliczenia w przykładzie (c) można uprościć, jeżeli zauważymy, że dla każdego ułamka p/q , gdzie p i q są liczbami nieparzystymi, wartość wyrażenia $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x$ jest ułamkiem nieskracalnym o parzystym liczniku i nieparzystym mianowniku. Stąd wynika, że wartość wielomianu $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x - 9$ dla takiego ułamka jest ułamkiem o nieparzystym liczniku. A zatem wielomian nie może być równy 0 dla tych liczb wymiernych.

□ **Zadanie 2.4.** Znaleźć pierwiastki wymierne wielomianów:

$$(a) x^3 - \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}; \quad (b) 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1;$$

$$(c) 4x^3 + x - 1; \quad (d) x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Odpowiedzi. (a) 2, $-1/2$, $-1/3$; (b) $1/2$, $-1/2$; (c) $1/2$; (d) brak pierwiastków wymiernych.

■ **Przykład 2.5.** Znaleźć pierwiastki równań kwadratowych i dwukwadratowych:

$$(a) z^2 + 2iz + 3 = 0; \quad (b) z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0;$$

$$(c) z^4 + 5z^2 + 4 = 0; \quad (d) z^4 - 30z^2 + 289 = 0.$$

Rozwiązanie. Do wyznaczenia pierwiastków równania kwadratowego $az^2 + bz + c = 0$ o współczynnikach zespolonych wykorzystamy wzory

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a},$$

gdzie δ oznacza jeden z pierwiastków kwadratowych z liczby zespolonej $\Delta = b^2 - 4ac$.

(a) Dla równania kwadratowego $z^2 + 2iz + 3 = 0$ mamy $\Delta = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -16$. Przyjmując $\delta = 4i$ otrzymamy

$$z_1 = \frac{-2i - 4i}{2} = -3i, \quad z_2 = \frac{-2i + 4i}{2} = i.$$

(b) Dla równania kwadratowego $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$, mamy $\Delta = (2+i)^2 - 4(-1+7i) = 7 - 24i = (4-3i)^2$. Przyjmując teraz we wzorze na pierwiastki równania kwadratowego $\delta = 4 - 3i$ otrzymamy

$$z_1 = \frac{(2+i) - (4-3i)}{2} = -1 + 2i, \quad z_2 = \frac{(2+i) + (4-3i)}{2} = 3 - i.$$

(c) W równaniu $z^4 + 5z^2 = 4 = 0$ podstawiając $w = z^2$ otrzymamy $w^2 + 5w + 4 = 0$. Rozwiązaniami tego równania są $w_1 = -1$ oraz $w_2 = -4$. Pierwiastki wyjściowego równania są zatem rozwiązaniami równań $z^2 = -1$, $z^2 = -4$. Stąd $z_1 = -i$, $z_2 = i$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 2i$.

(d) W równaniu $z^4 - 30z^2 = 289$ podstawiając $w = z^2$ otrzymamy $w^2 - 30w + 289 = 0$. Rozwiązaniami tego równania są

$$w_1 = \frac{30 - 16i}{2} = 15 - 8i \quad \text{oraz} \quad w_2 = \frac{30 + 16i}{2} = 15 + 8i.$$

Pierwiastki wyjściowego równania są zatem rozwiązaniami równań $z^2 = 15 - 8i$, $z^2 = 15 + 8i$. Stąd $z_1 = 4 - i$, $z_2 = -4 + i$, $z_3 = 4 + i$, $z_4 = -4 - i$.

□ **Zadanie 2.5.** Znaleźć pierwiastki równań kwadratowych i dwukwadratowych:

(a) $z^2 - 4z + 13 = 0$; (b) $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i) = 0$;

(c) $z^4 + 8z^2 + 15 = 0$; (d) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$.

Odpowiedzi. (a) $2 - 3i$, $2 + 3i$; (b) $1 - 3i$, $2 + i$; (c) $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$, $i\sqrt{5}$, $-i\sqrt{5}$; (d) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}(1+i)$, $-\sqrt{2}(1+i)$.

Zasadnicze twierdzenie algebry

■ **Przykład 2.6.** Znając niektóre pierwiastki wielomianów rzeczywistych, znaleźć pozostałe:

(a) $W(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6$, $x_1 = -1 + i$;

(b) $W(x) = x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13$, $x_1 = 2 - 3i$, $x_2 = i$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie: jeżeli liczba zespolona x_0 jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to $\bar{x}_0$ także jest pierwiastkiem tego wielomianu.

(a) Z twierdzenia tego wynika, że skoro $x_1 = -1 + i$ jest pierwiastkiem wielomianu rzeczywistego $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6$, to także liczba $x_2 = \bar{x}_1 = -1 - i$ jest pierwiastkiem

tego wielomianu. Z twierdzenia Bezout wynika, że rozważany wielomian jest podzielny przez wielomian

$$(x - x_1)(x - x_2) = [x - (-1 + i)][x - (-1 - i)] = x^2 + 2x + 2.$$

Iloraz z dzielenia wielomianów

$$(x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6) : (x^2 + 2x + 2)$$

jest wielomianem $x^2 + 3$. Pierwiastkami tego wielomianu są liczby $x_3 = \sqrt{3}i$, $x_4 = -\sqrt{3}i$.

(b) Skoro liczby $x_1 = 2 - 3i$ oraz $x_2 = i$ są pierwiastkami wielomianu rzeczywistego, to także liczby $x_3 = \bar{x}_1 = 2 + 3i$ oraz $x_4 = \bar{x}_2 = -i$ są jego pierwiastkami. Z twierdzenia Bezout wynika, że wielomian $x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13$ jest podzielny przez wielomian

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_3)(x - x_2)(x - x_4) &= [x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)](x - i)(x + i) \\ &= (x^2 - 4x + 13)(x^2 + 1) \\ &= x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 4x + 13.\end{aligned}$$

Ilorazem z dzielenia wielomianów

$$(x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13) : (x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 4x + 13)$$

jest wielomian $x - 1$. Pierwiastkiem wielomianu $x - 1$ jest oczywiście $x_5 = 1$.

Uwaga. Dla tego wielomianu końcowe obliczenia można uprościć próbując znaleźć pierwiastki całkowite wśród podzielników wyrazu wolnego $a_0 = -13$, tj. wśród liczb: 1, -1, 13, -13.

□ **Zadanie 2.6.** Znajdąc niektóre pierwiastki wielomianów rzeczywistych, znaleźć pozostałe:

- (a) $W(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 7x - 3\sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2} + i$;
- (b) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 6x - 30$, $x_1 = 1 - 3i$;
- (c) $W(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25$, $x_1 = 2 + i$;
- (d) $W(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 4x + 4$, $x_1 = i$, $x_2 = -\sqrt{2}i$;
- (e) $W(x) = x^6 - 6x^5 + 18x^4 - 28x^3 + 31x^2 - 22x + 14$, $x_1 = 1 - i$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}i$.

Odpowiedzi. (a) $\sqrt{2} - i$, $\sqrt{2}$; (b) $1 + 3i$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; (c) $2 - i$, $1 + 2i$, $1 - 2i$; (d) $-i$, $\sqrt{2}i$, $1 + i$, $1 - i$; (e) $1 + i$, $2 + \sqrt{3}i$, i , $-i$.

■ **Przykład 2.7.** Nie wykonując dzielenia znaleźć reszty z dzielenia wielomianów P przez wielomiany Q , jeżeli:

- (a) $P(x) = x^{10} + x^2 - 2$, $Q(x) = x^3 - 4x$; (b) $P(x) = x^8 + 5x^3 + 1$, $Q(x) = x^2 - 2x + 2$;
- (c) $P(x) = x^{99} + x^{98} + x^{97}$, $Q(x) = x^4 - 1$.

Rozwiązanie.

- (a) Reszta z dzielenia dowolnego wielomianu przez wielomian stopnia 3 jest wielomianem

stopnia ≤ 2 . Zatem ma postać $R(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wtedy $P(x) = I(x) \cdot Q(x) + R(x)$, gdzie I jest ilorazem z dzielenia tych wielomianów. Zatem

$$x^{10} + x^2 - 2 = I(x) \cdot (x^3 - 4x) + ax^2 + bx + c$$

dla każdego $x \in \mathbb{C}$. Podstawiając w tej tożsamości pierwiastki wielomianu $x^3 - 4x$, tj. liczby $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} -2 = c, \\ 1026 = 4a - 2b + c, \\ 1026 = 4a + 2b + c. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest trójka $a = 257$, $b = 0$, $c = -2$. Zatem reszta z dzielenia tych wielomianów ma postać $257x^2 - 2$.

(b) Reszta z dzielenia dowolnego wielomianu przez wielomian stopnia 2 jest wielomianem stopnia ≤ 1 . Zatem ma postać $R(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Wtedy $P(x) = I(x) \cdot Q(x) + R(x)$, gdzie I jest ilorazem z dzielenia tych wielomianów. Zatem

$$x^8 + 5x^3 + 1 = I(x)(x^2 - 2x + 2) + ax + b$$

dla każdego $x \in \mathbb{C}$. Ponieważ pierwiastki wielomianu $x^2 - 2x + 2$, tj. liczby $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$, nie są liczbami rzeczywistymi, więc w ostatniej tożsamości wystarczy podstawić tylko jeden z tych pierwiastków np. x_1 . Wtedy otrzymamy równość

$$(1 + i)^8 + 5(1 + i)^3 + 1 = a(1 + i) + b.$$

Stąd $7 + 10i = (a + b) + ai$. Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron tej równości otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} a + b = 7, \\ a = 10. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest para $a = 10$, $b = -3$. Zatem reszta z dzielenia tych wielomianów ma postać $10x - 3$.

(c) Reszta z dzielenia dowolnego wielomianu przez wielomian stopnia 4 jest wielomianem stopnia ≤ 3 . Zatem ma postać $R(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Wtedy $P(x) = I(x) \cdot Q(x) + R(x)$, gdzie I jest ilorazem z dzielenia tych wielomianów. Zatem

$$x^{99} + x^{98} + x^{97} = I(x)(x^4 - 1) + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

dla każdego $x \in \mathbb{C}$. Pierwiastkami wielomianu $x^4 - 1$ są liczby rzeczywiste $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ oraz zespolone $x_3 = i$, $x_4 = -i$. Zatem do ostatniej tożsamości wystarczy podstawić oba pierwiastki rzeczywiste oraz tylko jeden zespolony. Po podstawieniu otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 1^{99} + 1^{98} + 1^{97} = a + b + c + d, \\ (-1)^{99} + (-1)^{98} + (-1)^{97} = -a + b - c + d, \\ i^{99} + i^{98} + i^{97} = -ai - b + ci + d. \end{cases}$$

Układ ten przekształcamy do równoważnej postaci

$$\begin{cases} a + b + c + d = 3, \\ -a + b - c + d = -1, \\ -a \quad \quad + c \quad \quad = 0, \\ \quad -b \quad \quad + d = -1. \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$. Zatem reszta z dzielenia tych wielomianów ma postać $x^3 + x^2 + x$.

□ **Zadanie 2.7.** Nie wykonując dzielenia znaleźć reszty z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q :

(a) $P(x) = x^8 - 3x^3 + 5x$, $Q(x) = x^2 - x - 2$;

(b) $P(x) = x^{14} - 4x^{10} + x^2 + \sqrt{2}x$, $Q(x) = x^2 + 2$;

(c) $P(x) = x^{30} + 3x^{14} + 2$, $Q(x) = x^3 + 1$; (d) $P(x) = x^{100} + 2x^{51} - 3x^2 + 1$, $Q(x) = x^2 - 1$;

(e) $P(x) = x^5 + x - 2$, $Q(x) = x^2 - 2x + 5$; (f) $P(x) = x^6 + x - 50$, $Q(x) = x^3 + 8$.

Odpowiedzi. (a) $81x + 80$; (b) $\sqrt{2}x - 2$; (c) $3x^2 + 3$; (d) $2x - 1$; (e) $-18x + 58$; (f) $x + 14$.

■ **Przykład 2.8.** Wielomiany zespolone przedstawić w postaci iloczynu dwumianów:

(a) $iz^2 - 4$; (b) $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 8i$; (c) $z^4 - (1 - i)^4$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o przedstawianiu wielomianu zespolonego w postaci iloczynu dwumianów. Jeżeli liczby zespolone $z_1, z_2, \dots, z_m$ są jedynymi pierwiastkami wielomianu W o krotnościach odpowiednio $k_1, k_2, \dots, k_m$, a $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jego współczynnikiem przy najwyższej potędze, to

$$W(z) = c(z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - z_m)^{k_m}.$$

(a) Szukamy pierwiastków wielomianu $iz^2 - 4 = i(z^2 + 4i)$. Pierwiastkami tego wielomianu są: $z_1 = \sqrt{2}(1 - i)$, $z_2 = -\sqrt{2}(1 - i)$. Zatem

$$iz^2 - 4 = i[z - \sqrt{2}(1 - i)][z + \sqrt{2}(1 - i)].$$

(b) Szukamy pierwiastków wielomianu $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 8i = (z - 1)^3 + 8i$. Zbiór pierwiastków tego wielomianu pokrywa się ze zbiorem $1 + \sqrt[3]{-8i}$. Korzystając ze wzoru na pierwiastki z liczb zespolonych otrzymamy

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 1 - (\sqrt{3} + i) \quad \text{oraz} \quad z_3 = 1 + (\sqrt{3} - i).$$

Zatem

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 8i = [z - (1 + 2i)] \cdot [z - (1 - \sqrt{3} - i)] \cdot [z - (1 + \sqrt{3} - i)].$$

(c) Szukamy pierwiastków wielomianu $z^4 - (1 - i)^4$. Korzystając dwukrotnie ze wzoru $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} z^4 - (1 - i)^4 &= [z^2 + (1 - i)^2][z^2 - (1 - i)^2] \\ &= [z^2 + (1 - i)^2][z + (1 - i)][z - (1 - i)]. \end{aligned}$$

Pozostały jeszcze do znalezienia pierwiastki wielomianu $z^2 + (1 - i)^2$. Zbiór tych pierwiastków pokrywa się ze zbiorem $\sqrt{-(1 - i)^2}$. Jednym z elementów tego zbioru jest $i(1 - i) = 1 + i$, a drugim $-(1 + i) = -1 - i$. Zatem poszukiwany rozkład ma postać

$$[z - (1 + i)] \cdot [z - (-1 - i)] \cdot [z - (1 - i)] \cdot [z - (-1 + i)].$$

□ **Zadanie 2.8.** Wielomiany zespolone przedstawić w postaci iloczynu dwumianów:

(a) $z^2 - 2iz - 10$; (b) $z^4 + 5z^2 + 6$; (c) $z^3 - 6z - 9$.

Odpowiedzi. (a) $[z - (i + 3)][z - (i - 3)]$; (b) $(z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i)(z - \sqrt{3}i)(z + \sqrt{3}i)$;
(c) $(z - 3)[z + (3 - i\sqrt{3})/2][z + (3 + i\sqrt{3})/2]$.

■ **Przykład 2.9.** Wielomiany rzeczywiste przedstawić w postaci iloczynu nierozkładalnych czynników rzeczywistych:

(a) $x^4 + 81$; (b) $x^7 - x$; (c) $x^4 + x^2 + 1$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego. Jeżeli liczba zespolona x_0 jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu rzeczywistego, to liczba $\bar{x}_0$ także jest pierwiastkiem k -krotnym tego wielomianu. Wykorzystamy także twierdzenie o przedstawianiu wielomianu rzeczywistego w postaci iloczynu dwumianów lub trójmianów rzeczywistych. Jeżeli liczby $x_1, x_2, \dots, x_r$ są jedynymi pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu rzeczywistego W o krotnościach odpowiednio $k_1, k_2, \dots, k_r$ oraz liczby zespolone $z_1, z_2, \dots, z_s$, gdzie $\text{Im } z_j > 0$ dla $1 \leq j \leq s$, są jedynymi pierwiastkami istotnie zespolonymi tego wielomianu o krotnościach odpowiednio $l_1, l_2, \dots, l_s$, to

$$W(x) = a(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_r)^{k_r} \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s},$$

gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest współczynnikiem wielomianu W przy najwyższej potęgde, a liczby $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_s, q_s$ są określone przez równość

$$p_j = -2 \text{Re } z_j, \quad q_j = |z_j|^2 \quad \text{dla } 1 \leq j \leq s.$$

(a) Szukamy pierwiastków zespolonych wielomianu $x^4 + 81$. Zbiór tych pierwiastków pokrywa się ze zbiorem $\sqrt[4]{-81}$. Korzystając teraz ze wzoru na pierwiastki z liczb zespolonych otrzymamy

$$\sqrt[4]{-81} = \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i), -\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i) \right\}.$$

Zatem

$$x^4 + 81 = \left[\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i) \right) \left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i) \right) \right] \\ \times \left[\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i) \right) \left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i) \right) \right] \\ = [x^2 - 3\sqrt{2}x + 9] [x^2 + 3\sqrt{2}x + 9].$$

Uwaga. Ten sam wynik można uzyskać zapisując $x^4 + 81$ w postaci różnicy kwadratów pewnych wyrażeń. Mamy

$$x^4 + 81 = (x^4 + 18x^2 + 81) - 18x^2 = (x^2 + 9)^2 - (3\sqrt{2}x)^2 \\ = [(x^2 + 9) - 3\sqrt{2}x] \cdot [(x^2 + 9) + 3\sqrt{2}x].$$

(b) Szukamy pierwiastków zespolonych wielomianu $x^7 - x = x(x^6 - 1)$. Zbiór tych pierwiastków jest sumą $\{0\}$ oraz zbioru pierwiastków stopnia 6 z liczby zespolonej 1. Ponieważ

$$\sqrt[6]{1} = \left\{ 1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} x^7 - x &= (x-0) \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot \left[\left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \cdot \left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \right] \\ &\quad \times \left[\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \right] \\ &= x(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Uwaga. Ten sam rozkład można uzyskać korzystając ze wzoru $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ oraz $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$. Mamy

$$\begin{aligned} x^7 - x &= x(x^6 - 1) \\ &= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) = x(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1). \end{aligned}$$

(c) Ponieważ wielomian $x^4 + x^2 + 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc jego rozkład na rzeczywiste czynniki nierozkładalne ma postać

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Współczynniki a, b, c, d znajdziemy rozwiązując odpowiedni układ równań. Mamy

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + (a+c)x^3 + (b+ac+d)x^2 + (ad+bc)x + bd$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\begin{cases} a+c=0, \\ b+ac+d=1, \\ ad+bc=0, \\ bd=1. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są dwie czwórki liczb $a = -1, b = 1, c = 1, d = 1$ lub $a = 1, b = 1, c = -1, d = 1$. Z pierwszej czwórki otrzymamy rozkład

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Druga czwórka daje ten sam rozkład. Zmieniona jest tylko kolejność czynników.

Uwaga. Ten sam rozkład można uzyskać korzystając z faktu, że pierwiastkami równania dwukwadratowego $x^4 + x^2 + 1 = 0$ są liczby:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = \bar{z}_1, \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_4 = \bar{z}_3.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= \left[\left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \cdot \left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \right] \\ &\quad \times \left[\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \right] \\ &= [x^2 - x + 1][x^2 + x + 1]. \end{aligned}$$

Można także wykorzystać wzór $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Mamy wtedy

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = [x^2 - x + 1][x^2 + x + 1].$$

□ **Zadanie 2.9.** Wielomiany rzeczywiste przedstawić w postaci iloczynu nierozkładalnych czynników rzeczywistych:

(a) $x^6 + 8$;

(b) $x^4 + 4$;

(c) $x^4 - x^2 + 1$;

(d) $4x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 9x - 9$.

Odpowiedzi. (a) $(x^2 + 2)(x^2 + \sqrt{6}x + 2)(x^2 - \sqrt{6}x + 2)$; (b) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$; (c) $(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$; (d) $(x - 1)^2(x + 1)(2x - 3)(2x + 3)$.

Ułamki proste

■ **Przykład 2.10.** Podane funkcje wymierne (rzeczywiste lub zespolone) rozłożyć na sumy wielomianów oraz funkcji wymiernych właściwych:

(a) $\frac{z^6}{2z^3 + z - 3}$;

(b) $\frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{x^4 + x^3 - x}$.

Rozwiązanie.

(a) Po podzieleniu wielomianów $z^6 : (2z^3 + z - 3)$ jak w Przykładzie 2.2 otrzymujemy

$$\text{iloraz } \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z + \frac{3}{4} \text{ i resztę } \frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{9}{4}.$$

Zatem

$$\frac{z^6}{2z^3 + z - 3} = \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z + \frac{3}{4} + \frac{z^2 - 6z + 9}{4(2z^3 + z - 3)}.$$

(b) Mamy

$$\frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{x^4 + x^3 - x} = \frac{3(x^4 + x^3 - x) - 3x^3 + 3x + 2x^2 - 1}{x^4 + x^3 - x} = 3 + \frac{-3x^3 + 2x^2 + 3x - 1}{x^4 + x^3 - x}.$$

□ **Zadanie 2.10.** Funkcje wymierne (rzeczywiste lub zespolone) rozłożyć na sumy wielomianów oraz funkcji wymiernych właściwych:

(a) $\frac{z^5 - 3z^2 + z}{z^3 + 4z^2 + 1}$;

(b) $\frac{x^5 + 3}{x^5 + 4}$;

(c) $\frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}$.

Odpowiedzi. (a) $z^2 - 4z + 16 + \frac{-68z^2 + 5z - 16}{z^3 + 4z^2 + 1}$; (b) $1 - \frac{1}{x^5 + 4}$; (c) $x + \frac{5}{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}$.

■ **Przykład* 2.11.** Zespolone funkcje wymierne właściwe rozłożyć na zespolone ułamki proste:

(a) $\frac{iz + 9}{z^2 + 9}$;

(b) $\frac{z + 3}{(z - 1)(z^2 + 1)}$;

(c) $\frac{2z^4 + 8z^2 + 32}{z(z^2 + 4)^2}$.

Rozwiązanie. Twierdzenie o rozkładzie zespolonej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste orzeka, że każda taka funkcja jest sumą zespolonych ułamków prostych postaci

$$\frac{A}{(z + a)^n}, \text{ gdzie } a, A \in \mathbb{C} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}.$$

Nieznane współczynniki określone są jednoznacznie.

(a) Mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na zespolone czynniki nierozkładalne:

$$z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i).$$

Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać:

$$\frac{iz + 9}{z^2 + 9} = \frac{A}{z - 3i} + \frac{B}{z + 3i}, \text{ gdzie } A, B \in \mathbb{C}.$$

Po sprowadzeniu prawej strony równości do wspólnego mianownika otrzymamy

$$iz + 9 = A(z + 3i) + B(z - 3i),$$

stąd

$$iz + 9 = (A + B)z + 3(A - B)i.$$

Ponieważ ostatnia równość jest prawdziwa dla każdego $z \in \mathbb{C}$, więc nieznane współczynniki A, B spełniają układ równań

$$\begin{cases} A + B = i, \\ 3i(A - B) = 9. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $A = -i, B = 2i$. Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{iz + 9}{z^2 + 9} = \frac{-i}{z - 3i} + \frac{2i}{z + 3i}.$$

(b) Mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład za zespolone czynniki nierozkładalne:

$$(z - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z - i)(z + i).$$

Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać:

$$\frac{z + 3}{(z - 1)(z^2 + 1)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z - i} + \frac{C}{z + i},$$

gdzie $A, B, C \in \mathbb{C}$. Po sprowadzeniu prawej strony równości do wspólnego mianownika otrzymamy

$$z + 3 = A(z - i)(z + i) + B(z - 1)(z + i) + C(z - 1)(z - i).$$

Podstawiając w otrzymanej równości kolejne pierwiastki mianownika funkcji wymiernej, tj. liczby $1, i$ oraz $-i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 4 = A(1 - i)(1 + i), \\ 3 + i = B(i - 1)2i, \\ 3 - i = C(-i - 1)(-2i). \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest trójka liczb

$$A = 2, B = -1 + \frac{i}{2}, C = -1 - \frac{i}{2}.$$

Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{z + 3}{(z - 1)(z^2 + 1)} = \frac{2}{z - 1} + \frac{-1 + \frac{i}{2}}{z - i} + \frac{-1 - \frac{i}{2}}{z + i}.$$

(c) Mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na zespolone czynniki nierozkładalne:

$$z(z^2 + 4)^2 = z(z - 2i)^2(z + 2i)^2.$$

Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać:

$$\frac{2z^4 + 8z^2 + 32}{z(z^2 + 4)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 2i} + \frac{C}{(z - 2i)^2} + \frac{D}{z + 2i} + \frac{E}{(z + 2i)^2},$$

gdzie $A, B, C, D, E \in \mathbb{C}$. Po sprowadzeniu prawej strony ostatniej równości do wspólnego mianownika otrzymamy

$$2z^4 + 8z^2 + 32 = A(z - 2i)^2(z + 2i)^2 + Bz(z - 2i)(z + 2i)^2 + Cz(z + 2i)^2 + Dz(z - 2i)^2(z + 2i) + Ez(z - 2i)^2.$$

Stąd

$$2z^4 + 8z^2 + 32 = (A + B + D)z^4 + (2Bi + C - 2Di + E)z^3 + (8A + 4B + 4Ci + 4D - 4Ei)z^2 + (8Bi - 4C - 8Di - 4E)z + 16A$$

dla każdego $z \in \mathbb{C}$. Korzystając teraz z faktu, że dwa wielomiany są równe, gdy ich stopnie są jednakowe i współczynniki stojące przy jednakowych potęgach zmiennej z są sobie równe, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} A + B + D = 2, \\ 2iB + C - 2iD + E = 0, \\ 8A + 4B + 4Ci + 4D - 4Ei = 8, \\ 8iB - 4C - 8iD - 4E = 0, \\ 16A = 32. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest piątka liczb

$$A = 2, B = 0, C = i, D = 0, E = -i.$$

Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać:

$$\frac{2z^4 + 8z^2 + 32}{z(z^2 + 4)^2} = \frac{2}{z} + \frac{i}{(z - 2i)^2} + \frac{-i}{(z + 2i)^2}.$$

□ **Zadanie* 2.11.** Zespolone funkcje wymierne właściwe rozłożyć na zespolone ułamki proste:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{z^2}{(z - 1)(z + 2)(z + 3)}; \quad \text{(b)} \quad \frac{z}{(z^2 - 1)^2}; \\ \text{(c)} \quad & \frac{16i}{z^4 + 4}; \quad \text{(d)} \quad \frac{z^2 + 2z}{(z^2 + 2z + 2)^2}. \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) $\frac{1/12}{z - 1} + \frac{-4/3}{z + 2} + \frac{9/4}{z + 3}$; (b) $\frac{1/4}{(z - 1)^2} + \frac{-1/4}{(z + 1)^2}$;

(c) $\frac{1 - i}{z - 1 - i} + \frac{-1 - i}{z - 1 + i} + \frac{1 + i}{z + 1 - i} + \frac{-1 + i}{z + 1 + i}$; (d) $\frac{1/2}{(z + 1 + i)^2} + \frac{1/2}{(z + 1 - i)^2}$.

■ **Przykład 2.12.** Rzeczywiste funkcje wymierne właściwe rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}; & \text{(b)} \frac{4}{x^3 - x^5}; & \text{(c)} \frac{3x^3 + 6}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}; \\ \text{(d)} \frac{2x + 1}{x^2(x^2 + 1)^2}; & \text{(e)} \frac{x^3 + 3}{(x + 3)^{100}}; & \text{(f)} \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2}. \end{array}$$

Rozwiązanie. Rzeczywiste ułamki proste pierwszego rodzaju mają postać

$$\frac{A}{(x+a)^n}, \text{ gdzie } a, A \in \mathbb{R} \text{ oraz } n \in \mathbb{N},$$

a drugiego rodzaju – postać

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}, \text{ gdzie } p, q, A, B \in \mathbb{R} \text{ oraz } n \in \mathbb{N},$$

przy czym spełniony jest warunek $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Twierdzenie o rozkładzie rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na rzeczywiste ułamki proste orzeka, że każda taka funkcja jest sumą rzeczywistych ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju. Nieznane współczynniki określone są jednoznacznie.

(a) Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej jest już rozłożony na iloczyn nierozkładalnych czynników rzeczywistych, więc rozkład tej funkcji na rzeczywiste ułamki proste ma postać

$$\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}, \text{ gdzie } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Po pomnożeniu obu stron powyższej równości przez mianownik funkcji wymiernej otrzymamy tożsamość

$$2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wstawiając do tej tożsamości kolejno pierwiastki mianownika, tj. liczby $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2 = 2A, \\ 2 = -B, \\ 2 = 2C. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$. Szukany rozkład na ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{1}{x-3}.$$

(b) Mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na rzeczywiste czynniki nierozkładalne

$$x^3 - x^5 = x^3(1-x)(1+x).$$

Rozkład tej funkcji na rzeczywiste ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{-4}{x^5 - x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}, \text{ gdzie } A, B, C, D, E \in \mathbb{R}.$$

Po pomnożeniu obu stron tej równości przez mianownik funkcji wymiernej otrzymamy tożsamość

$$-4 = Ax^2(x^2 - 1) + Bx(x^2 - 1) + C(x^2 - 1) + Dx^3(x + 1) + Ex^3(x - 1)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Stąd

$$-4 = (A + D + E)x^4 + (B + D - E)x^3 + (-A + C)x^2 - Bx - C.$$

Korzystając teraz z faktu, że dwa wielomiany są równe, gdy ich stopnie są jednakowe i współczynniki stojące przy jednakowych potęgach zmiennej x są sobie równe, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} A & + D + E = 0, \\ & B & + D - E = 0, \\ -A & + C & = 0, \\ & -B & = 0, \\ & -C & = -4. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest piątka liczb $A = 4$, $B = 0$, $C = 4$, $D = -2$, $E = -2$. Szukany rozkład na ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{-4}{x^5 - x^3} = \frac{4}{x} + \frac{4}{x^3} + \frac{-2}{x-1} + \frac{-2}{x+1}.$$

(c) Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej jest już rozłożony na iloczyn nierozkładalnych czynników rzeczywistych, więc rozkład tej funkcji na rzeczywiste ułamki proste ma postać

$$\frac{3x^3 + 6}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}, \text{ gdzie } A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Po pomnożeniu obu stron tej równości przez $(x^2 + 1)(x^2 + 4)$ otrzymamy równość

$$3x^3 + 6 = (Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 1)$$

prawdziwą dla każdego $x \in \mathbb{C}$. Podstawiając w tej równości po jednym pierwiastku zespolonym każdego z wielomianów $x^2 + 1$ oraz $x^2 + 4$, tj. liczby i oraz $2i$, otrzymamy układ równań ze współczynnikami zespolonymi i rzeczywistymi niewiadomymi

$$\begin{cases} 6 - 3i = (Ai + B) \cdot 3, \\ 6 - 24i = (2Ci + D) \cdot (-3). \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny układowi o współczynnikach rzeczywistych

$$\begin{cases} 3B = 6, \\ 3A = -3, \\ -3D = 6, \\ -6C = -24. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest czwórka liczb $A = -1$, $B = 2$, $C = 4$, $D = -2$. Szukany rozkład na ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{3x^3 + 6}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{-x + 2}{x^2 + 1} + \frac{4x - 2}{x^2 + 4}.$$

(d) Rozkład na ułamki proste rozważanej funkcji wymiernej ma postać

$$\frac{2x+1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}, \text{ gdzie } A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}.$$

W tym przykładzie nieznane współczynniki $A, B, \dots, F$ znajdziemy dokonując kilku przekształceń algebraicznych. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^2(x^2+1)^2} &= (2x+1) \cdot \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)^2} = (2x+1) \left[\frac{1}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2} \right] \\ &= (2x+1) \left[\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2} \right] \\ &= (2x+1) \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} \right] = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

(e) W tym przykładzie obliczenia nieznanymi współczynników rozkładu można znacznie uprościć dokonując podstawienia $y = x+3$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} \frac{x^3+3}{(x+3)^{100}} &= \frac{(y-3)^3+3}{y^{100}} = \frac{y^3-9y^2+27y-24}{y^{100}} = \frac{1}{y^{97}} + \frac{-9}{y^{98}} + \frac{27}{y^{99}} + \frac{-24}{y^{100}} \\ &= \frac{1}{(x+3)^{97}} + \frac{-9}{(x+3)^{98}} + \frac{27}{(x+3)^{99}} + \frac{-24}{(x+3)^{100}}. \end{aligned}$$

(f) Rozkład na ułamki proste uzyskamy wykonując kilka przekształceń algebraicznych

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^3+x)-x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^2+1)-x}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

□ **Zadanie 2.12.** Rzeczywiste funkcje wymierne właściwe rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{12}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}; & \text{(b)} \quad & \frac{x^2}{x^4-1}; & \text{(c)} \quad & \frac{4x}{(x+1)(x^2+1)^2}; \\ \text{(d)} \quad & \frac{x^2+2x}{(x^2+2x+2)^2}; & \text{(e)} \quad & \frac{1}{x^3+x}; & \text{(f)} \quad & \frac{x^2+1}{x^3(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) $\frac{-2}{x-1} + \frac{6}{x-2} + \frac{-6}{x-3} + \frac{2}{x-4}$; (b) $\frac{1/4}{x-1} + \frac{-1/4}{x+1} + \frac{1/2}{x^2+1}$;
 (c) $\frac{-1}{x+1} + \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{2x+2}{(x^2+1)^2}$; (d) $\frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{2}{(x^2+2x+2)^2}$; (e) $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$;
 (f) $\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$.