

**ALGEBRA  
I  
GEOMETRIA  
ANALITYCZNA**



Opracowanie  
Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

**ALGEBRA  
I  
GEOMETRIA  
ANALITYCZNA**

Kolokwia i egzaminy

Wydanie szesnaste poprawione



Oficyna Wydawnicza GiS  
Wrocław 2022

Marian Gewert  
Wydział Matematyki  
Politechnika Wrocławska  
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas  
Wydział Matematyki  
Politechnika Wrocławska  
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

*Projekt okładki:*  
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Copyright © 1996 – 2022 by Marian Gewert and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

ISBN 978-83-67234-00-9

---

Wydanie XVI poprawione, Wrocław 2022  
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., [www.gis.wroc.pl](http://www.gis.wroc.pl)  
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. kom.

---

# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>7</b>
<b>Zestawy zadań z kolokwiów</b>	<b>9</b>
Pierwsze kolokwium . . . . .	9
Drugie kolokwium . . . . .	20
<b>Zestawy zadań z egzaminów</b>	<b>37</b>
Egzamin podstawowy . . . . .	37
Egzamin poprawkowy . . . . .	59
<b>Odpowiedzi i wskazówki</b>	<b>81</b>
Pierwsze kolokwium . . . . .	81
Drugie kolokwium . . . . .	89
Egzamin podstawowy . . . . .	95
Egzamin poprawkowy . . . . .	100



# Wstęp

Niniejszy opracowanie\* jest trzecią częścią zestawu podręczników do przedmiotu Algebra z geometrią analityczną. Pozostałymi częściami zestawu są „Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory” oraz „Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania”. Opracowanie zawiera zestawy zadań, które w ubiegłych latach studenci Politechniki Wrocławskiej rozwiązywali na kolokwiah i egzaminach. Zadania obejmują liczby zespolone, wielomiany, macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych oraz geometrię analityczną w przestrzeni. Do wszystkich zestawów z kolokwiów oraz do zestawów egzaminacyjnych o numerach nieparzystych podane są odpowiedzi.

Opracowanie pozwala studentom zapoznać się z rodzajami oraz stopniem trudności zadań kolokwialnych i egzaminacyjnych. Jest to jednocześnie dodatkowy materiał do samodzielnej nauki.

Studentów Politechniki Wrocławskiej zainteresowanych udziałem w konkursie matematycznym „Egzamin na ocenę celującą” zachęcamy do zapoznania się z książką pt. „Studencki konkurs matematyczny”. To opracowanie zawiera zadania wraz z rozwiązaniami z konkursów, które odbyły się w latach 1994 – 2020.

W aktualnym wydaniu dokonano drobnych zmian redakcyjnych oraz poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej za zestawy z kolokwiów i egzaminów, a także za uwagi o poprzednich wydaniach tego zbioru.

*Marian Gewert*

*Zbigniew Skoczylas*

---

\*Do 2005 r. książka miała tytuł „Algebra liniowa 1. Kolokwia i egzaminy”.





# Zestawy zadań z kolokwiów #

## Pierwsze kolokwium

### Zestaw 1.

odp. str. 81

1. Obliczyć  $(\sqrt{3} - i)^{32}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.
2. Narysować zbiór liczb zespolonych  $z$ , dla których  $0 < \arg(z^3) < \pi/2$ .
3. Rozwiązać równanie  $z^6 = (1 + 3i)^{12}$ .
4. Funkcję wymierną  $\frac{x^2}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$  rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

### Zestaw 2.

odp. str. 81

1. Obliczyć  $(\sqrt{3} + i)^{32}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.
2. Narysować zbiór liczb zespolonych  $z$ , dla których  $\pi/2 < \arg(z^3) < \pi$ .
3. Rozwiązać równanie  $z^6 = (1 - 3i)^{12}$ .
4. Funkcję wymierną  $\frac{x^2}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$  rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

### Zestaw 3.

odp. str. 81

1. Obliczyć  $(-\sqrt{3} + i)^{32}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.
2. Narysować zbiór liczb zespolonych  $z$ , dla których  $\pi < \arg(z^3) < 3\pi/2$ .

---

# Obecnie na obu kolokwiach studenci otrzymują do rozwiązania w czasie 45 minut 3 zadania.

3. Rozwiązać równanie  $z^6 = (3 - i)^{12}$ .

4. Funkcję wymierną  $\frac{-x^2}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$  rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

**Zestaw 4.**

*odp. str. 81*

1. Obliczyć  $(-\sqrt{3} - i)^{32}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.

2. Rozwiązać równanie  $z^6 = (3 + i)^{12}$ .

3. Narysować zbiór liczb zespolonych  $z$ , dla których  $3\pi/2 < \arg(z^3) < 2\pi$ .

4. Funkcję wymierną  $\frac{x^2}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$  rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

**Zestaw 5.**

*odp. str. 82*

1. Rozwiązać równanie  $z^8 - (\sqrt{3} + i)^8 = 0$ .

2. Narysować zbiór  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^3) > \operatorname{Re}(z^3)\}$ .

3. Jednym z pierwiastków wielomianu  $z^4 + 2z^3 + 9z^2 + 8z + 20$  jest liczba  $-1 - 2i$ . Znaleźć pozostałe pierwiastki wielomianu.

4. Obliczyć sumę  $1 + \frac{\sqrt{3} - i}{2} + \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{20}$ .

**Zestaw 6.**

*odp. str. 82*

1. Rozwiązać równanie  $z^6 = (\bar{z})^6$  i naszkicować jego pierwiastki, wykorzystując odpowiednią postać liczby zespolonej.

2. Naszkicować zbiór  $\{z \in \mathbb{C} : |z^3| \leq 8, 0 \leq \arg(z^3) \leq \frac{\pi}{4}\}$ .

3. Rozwiązać równanie  $z^7 + 2z^4 + z = 0$ .

4. Liczba  $2 - i$  jest pierwiastkiem wielomianu  $z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25$ . Wyznaczyć pozostałe pierwiastki i rozłożyć wielomian na rzeczywiste czynniki nierozkładalne.

**Zestaw 7.**

*odp. str. 82*

1. Znaleźć i przedstawić graficznie pierwiastki wielomianu  $z^4 - iz^2 + 2$ .

2. Obliczyć  $\sqrt[4]{-16}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.
3. Narysować zbiór  $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg(iz) = \frac{\pi}{3}\right\}$ .
4. Korzystając z postaci wykładniczej liczby zespolonej naszkicować zbiór  $\left\{z \in \mathbb{C} : z^4 = (\bar{z})^4, |z^3| \geq |9z|\right\}$ .

**Zestaw 8.**

odp. str. 83

1. Narysować zbiór  $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg(iz^5) = 0\right\}$ .
2. Obliczyć  $\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)^7$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.
3. Wyznaczyć moduł i argument główny liczby zespolonej  $\frac{(1 + i\sqrt{3})^{17}}{(1 - i)^{28}}$ .
4. Znaleźć pierwiastki wielomianu  $z^3 - z + 6$ .

**Zestaw 9.**

odp. str. 83

1. Obliczyć  $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}i - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{18}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.
2. Rozwiązać równanie  $z^3 = (1 - 3i)^6$ .
3. Sprawdzić, że  $i$  jest pierwiastkiem wielomianu  $z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1$ , a następnie znaleźć pozostałe pierwiastki.
4. Które z iloczynów  $A^2B$ ,  $AB^2$ ,  $BA^2$ ,  $B^2A$  istnieją i wyjaśnić dlaczego?  
Obliczyć te, które istnieją dla  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Zestaw 10.**

odp. str. 83

1. Obliczyć  $W(i)$ , a następnie znaleźć pierwiastki wielomianu  $W(z) = z^4 + 3z^3 + 2z^2 + 3z + 1$ .
2. Które z iloczynów  $A^2B$ ,  $AB^2$ ,  $BA^2$ ,  $B^2A$  istnieją i wyjaśnić dlaczego?  
Obliczyć te, które istnieją dla  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ .

3. Obliczyć  $\left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{24}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.

4. Rozwiązać równanie  $z^4 = (1 + 2i)^8$ .

**Zestaw 11.**

odp. str. 83

1. Które z iloczynów  $A^2B$ ,  $AB^2$ ,  $BA^2$ ,  $B^2A$  istnieją i wyjaśnić dlaczego?

Obliczyć te, które istnieją dla  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ .

2. Znaleźć pierwiastki wielomianu  $z^3 + 7z^2 + 7z + 6$ .

3. Rozwiązać równanie  $|\bar{z}|^2 = \frac{|z|^2}{\bar{z} - i}$ .

4. Obliczyć i przedstawić w postaci algebraicznej  $\sqrt[6]{-64}$ .

**Zestaw 12.**

odp. str. 83

1. Rozwiązać równanie  $|z|^2 + (1 + i)\bar{z} = 0$ .

2. Obliczyć  $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.

3. Które z iloczynów  $A^2B$ ,  $AB^2$ ,  $BA^2$ ,  $B^2A$  istnieją i wyjaśnić dlaczego?

Obliczyć te, które istnieją dla  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ .

4. Znaleźć pierwiastki wielomianu  $z^3 + 9z^2 + 9z - 10$ .

**Zestaw 13.**

odp. str. 84

1. Funkcję wymierną  $\frac{3x^2}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$  rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

2. Znaleźć postać algebraiczną liczby zespolonej  $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^2 (1 - i)^3}{\sqrt{3} + i} i^3$ .

3. Rozwiązać równanie  $z^4 = \frac{-18}{1 + i\sqrt{3}}$ .

4. Narysować zbiór liczb zespolonych  $z$ , dla których  $0 < \arg(z^3) < \pi/4$ .

**Zestaw 14.**

odp. str. 84

1. Funkcję wymierną  $\frac{1+x^3}{x^2(1-x)^2}$  rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.
2. Liczbę zespoloną  $(1+i\sqrt{3})^{150}$  przedstawić w postaci algebraicznej.
3. Rozwiązać równanie macierzowe  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ .
4. Narysować zbiór liczb zespolonych  $z$  spełniających warunek  $\operatorname{Re}[(z+1)^2] > 0$ .

**Zestaw 15.**

odp. str. 84

1. Funkcję wymierną  $\frac{5x^2}{x^3+x^2+4x+4}$  rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.
2. Liczbę zespoloną  $\frac{(1+\sqrt{3}i)^8}{(i-1)^6}$  przedstawić w postaci algebraicznej.
3. Wyznaczyć resztę z dzielenia wielomianu  $x^{100}(x^2+x+1)$  przez wielomian  $x^2-1$ , bez wykonywania dzielenia.
4. Obliczyć te z iloczynów  $AB^2$ ,  $BA^2$ ,  $AB^T B$ ,  $B^T BA$ ,  $BB^T A^T$ , które istnieją dla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Zestaw 16.**

odp. str. 84

1. Funkcję wymierną  $\frac{3}{x^4+x}$  rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.
2. Wyrazić  $\sin 5x$  przez  $\sin x$  i  $\cos x$ .
3. Rozwiązać równanie  $z^8 = (1+i)^8$ . Pierwiastki przedstawić w postaci algebraicznej.
4. Dwoma pierwiastkami wielomianu  $z^5 - 5z^4 + 18z^3 - 18z^2 + 17z - 13$  są  $z_1 = 2 - 3i$ ,  $z_2 = i$ . Znaleźć pozostałe pierwiastki wielomianu.

**Zestaw 17.**

odp. str. 84

1. Obliczyć  $\sqrt[3]{i}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.

2. Liczba  $1+2i$  jest pierwiastkiem wielomianu  $z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10$ . Wyznaczyć pozostałe pierwiastki.

3. Obliczyć wyznacznik 
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Narysować zbiór liczb zespolonych  $z$  spełniających warunek  $\arg(iz^6) = \pi$ .

**Zestaw 18.**

odp. str. 84

1. Obliczyć  $\frac{(1-i)^{11}}{(\sqrt{3}+i)^6}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.

2. Obliczyć  $\sqrt{1+2i}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.

3. Znaleźć pierwiastki wymierne wielomianu  $4x^4 + x^2 - 3x + 1$ .

4. Obliczyć  $AA^T - 2BB^T$ , jeżeli  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Zestaw 19.**

odp. str. 85

1. Naszkicować zbiór  $\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{|z-i|}{|z+i|} < 1, |z| \geq 2 \right\}$ .

2. Wyrazić  $\cos 5x$  przez  $\sin x$ ,  $\cos x$ , wykorzystując wzór de Moivre'a.

3. Rozwiązać równanie  $(z+1)^3 = (z-1)^3$ .

4. Rozwiązać równanie macierzowe  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Zestaw 20.**

odp. str. 85

1. Rozwiązać równanie  $|z|^6 = iz^6$ , wykorzystując postać wykładniczą liczby zespolonej.

2. Funkcję wymierną  $\frac{x^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$  rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

3. Obliczyć wyznacznik 
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiór  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} [(z+i)^2] < 0\}$ .

**Zestaw 21.**

odp. str. 85

1. Rozwiązać równanie  $|z|z = iz^2$ .

2. Liczba  $\sqrt{3} - i$  jest jednym z pierwiastków 6-go stopnia z liczby  $z$ . Obliczyć  $z$ . Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej elementy zbioru  $\sqrt[6]{z}$ .

3. Wiadomo, że wielomian  $2z^3 - 3z^2 - 3z - 5$  ma pierwiastek wymierny nie mniejszy niż 1. Znaleźć pierwiastki wielomianu.

4. Rozwiązać równanie  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X$ .

**Zestaw 22.**

odp. str. 85

1. Rozwiązać równanie 
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ x & 1 & 0 & x^2 \end{vmatrix} = 18x.$$

2. Dla jakich liczb naturalnych  $n$  liczba  $(1-i)^n$  należy do prostej  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ ?

3. Niech  $z = 2 + i$  oraz  $w = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ . Obliczyć  $\frac{z^3}{w^2 + 1}$ .

4. Znaleźć resztę z dzielenia wielomianu  $z^{16} - z^5 + 3$  przez wielomian  $z^2 + 1$ , bez wykonywania dzielenia.

**Zestaw 23.**

odp. str. 85

1. Wielomian  $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$  rozłożyć na czynniki (a) rzeczywiste, (b) zespolone, wiedząc, że ma on jeden pierwiastek dwukrotny, zaś część urojona innego jest ujemna.

2. Niech  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ . Macierz  $D$

jest iloczynem jednej z nich oraz sumy pozostałych. Znaleźć macierz  $D$ .

3. Zbiór rozwiązań równania  $(\bar{z})^5 - z = 0$  zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej.

4. Obliczyć iloczyn wszystkich pierwiastków 4 stopnia z liczby 16.

**Zestaw 24.**

odp. str. 85

1. Czy liczba  $z = \frac{2-i}{(\sqrt{3}+i)^5}$  należy do zbioru  $\{z \in \mathbb{C} : \arg z < \arg(z^2)\}$ ?

Odpowiedź uzasadnić.

2. Obliczyć  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ .

3. Liczba  $i - 1$  jest pierwiastkiem wielomianu  $z^4 + pz^2 + q$ , gdzie  $p$  oraz  $q$  są współczynnikami rzeczywistymi. Znaleźć  $p$  i  $q$ .

4. Obliczyć  $\sqrt[3]{-i}$ .

**Zestaw 25.**

odp. str. 86

1. Sprawdzić, że  $i$  jest pierwiastkiem wielomianu  $z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1$ . Wyznaczyć pozostałe pierwiastki wielomianu.

2. Obliczyć i zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiór  $\sqrt[3]{-8i}$ .

3. Obliczyć  $A^2$  i  $A^3$  dla  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Następnie znaleźć i uzasadnić wzór ogólny na  $A^n$ .

4. Narysować zbiór  $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| = |i-z|\}$ .

**Zestaw 26.**

odp. str. 86

1. Niech  $z = (\sqrt{3}+i)^9 (1-i)^5$ . Obliczyć  $|z|$  oraz  $\arg z$ .

2. Rozwiązać równanie  $z^3 = -4\bar{z}$ .

3. Znaleźć pierwiastki wielomianu  $z^6 + z^4 + 2z^2 - 4$  i przedstawić je w postaci algebraicznej.

4. Rozwiązać równanie macierzowe  $X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ .



**Zestaw 27.**

odp. str. 86

1. Naszkiecować zbiór  $\left\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-1}{z-i} \right| > 1, \arg z < \pi \right\}$ .
2. Obliczyć  $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{11}$ .
3. Liczba  $1+i$  jest pierwiastkiem wielomianu  $z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$ . Znaleźć pozostałe pierwiastki wielomianu.
4. Rozwiązać równanie macierzowe  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ .

**Zestaw 28.**

odp. str. 86

1. Naszkiecować zbiór  $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z^4) < \pi \right\}$ .
2. Rozwiązać równanie  $z^2 - 3z + 3 + i = 0$ .
3. Liczbę  $\frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}$  przedstawić w postaci algebraicznej.
4. Rozwiązać równanie macierzowe  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Zestaw 29.**

odp. str. 86

1. Naszkiecować zbiór  $\{z \in \mathbb{C} : \sin(\pi|z-1|) > 0\}$ .
2. Rozwiązać równanie  $z^3 = 2z\bar{z}$ .
3. Jednym z pierwiastków wielomianu  $az^3 + bz + 1$ , gdzie  $a, b$  są liczbami rzeczywistymi, jest  $1+i$ . Znaleźć współczynniki  $a, b$ .
4. Funkcję wymierną  $\frac{x}{x^3+1}$  rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

**Zestaw 30.**

odp. str. 86

1. Obliczyć sumę  $1 + \frac{\sqrt{3}+i}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{11}$  i otrzymany wynik przedstawić w postaci algebraicznej.
2. Nie wykonując dzielenia, znaleźć resztę z dzielenia wielomianu  $x^{110} - 2x^{55} + 1$  przez wielomian  $x^2 + 1$ .

3. Funkcję wymierną  $\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$  rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

4. Naszkicować zbiór  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z + 1 - i| < 2, 0 \leq \text{Im}(iz)\}$ .

**Zestaw 31.***odp. str. 87*

1. Naszkicować zbiór  $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| \geq 1, \arg z \geq 7\pi/4\}$ .

2. Wykorzystując wzór de Moivre'a wyrazić  $\text{tg } 3x$  jako funkcję  $\text{tg } x$ .

3. Znaleźć pierwiastki wielomianu  $z^4 - z^3 - 2z^2 + 6z - 4$ .

4. Funkcję wymierną  $\frac{8x^2}{x^2 - 1}$  przedstawić w postaci sumy wielomianu i rzeczywistych ułamków prostych.

**Zestaw 32.***odp. str. 87*

1. Rozwiązać równanie  $z^3 = 8(1 + i)^3$ .

2. Narysować zbiór liczb zespolonych spełniających równanie  $|z|^3 = \frac{z^3}{i}$ .

3. Rozłożyć na czynniki liniowe wielomian  $z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10$ , jeżeli wiadomo, że  $2 + i$  jest jednym z jego pierwiastków.

4. Funkcję wymierną  $\frac{x}{x^4 - 1}$  rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

**Zestaw 33.***odp. str. 87*

1. Znaleźć pierwiastki wielomianu  $z^3 - z + 6$ .

2. Naszkicować zbiór  $\left\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{4 + 3i}{2i - z} \right| \leq 5 \right\}$ .

3. Obliczyć  $(i - \sqrt{3})^{15}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.

4. Rozwiązać równanie  $z^4 = -(\bar{z})^4$ , korzystając z postaci wykładniczej liczby zespolonej. Narysować zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej.

**Zestaw 34.***odp. str. 87*

1. Obliczyć  $\sqrt[3]{-64i}$ . Podać interpretację geometryczną otrzymanego wyniku. Odpowiedź podać w postaci algebraicznej.

2. Liczba  $i$  jest pierwiastkiem wielomianu  $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ . Obliczyć pozostałe pierwiastki wielomianu.

3. Obliczyć  $(1 - i)^{26}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.

4. Narysować zbiór  $\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z + 4i}{-z} \right| > 1 \right\}$ .

**Zestaw 35.***odp. str. 88*

1. Podać definicję pierwiastka stopnia  $n$  z liczby zespolonej  $z$ . Obliczyć  $\sqrt[4]{-4}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.

2. Podać wzór de Moivre'a i następnie obliczyć  $\left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{77}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.

3. Znaleźć pierwiastki zespolone wielomianu  $2z^3 - 3z^2 + 2z - 1$ .

4. Narysować zbiór  $\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z}{i} + 5 \right| > 3 \right\}$ .

**Zestaw 36.***odp. str. 88*

1. Narysować zbiór  $\{ z \in \mathbb{C} : 0 < |3i + z| < 3 \}$ .

2. Jednym z pierwiastków czwartego stopnia z liczby zespolonej  $w$  jest  $\sqrt{2}i$ . Znaleźć  $w$  oraz pozostałe pierwiastki.

3. Niech  $z = (\sqrt{3} - i)^5$ . Obliczyć  $|z|$  oraz  $\arg z$ .

4. Jednym z pierwiastków wielomianu  $z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 6z + 15$  jest liczba  $-\sqrt{3}i$ . Znaleźć pozostałe pierwiastki wielomianu.

**Zestaw 37.***odp. str. 88*

1. Rozwiązać równanie  $\bar{z}z^4 = 32$ .

2. Narysować zbiór  $\{ z \in \mathbb{C} : |2iz + 4| < 6, \arg z \leq 4\pi/3 \}$ . Opisać brzeg zbioru.

3. Znaleźć pierwiastki wielomianu  $x^4 - x^2 - 6$ .

4. Liczbę zespoloną  $(2 - 2i)^{20}$  przedstawić w postaci algebraicznej.

**Zestaw 38.***odp. str. 88*

1. Rozwiązać równanie  $(\bar{z})^2 = z^2$ .

2. Narysować zbiór  $\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-i}{\bar{z}-1} \right| \geq 1, \arg z > \frac{3\pi}{2} \right\}$ . Opisać brzeg zbioru.
3. Wyznaczyć pierwiastki wielomianu  $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ .
4. Liczbę zespoloną  $\left( \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{15}$  przedstawić w postaci algebraicznej.

**Zestaw 39.***odp. str. 89*

1. Rozwiązać równanie  $(\bar{z})^3 = (1-i)^2$ .
2. Narysować zbiór  $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z+4| \leq 6, \arg z > \pi\}$ . Opisać brzeg zbioru.
3. Znaleźć pierwiastki wielomianu  $x^6 - 2x^4 + 4x^2 - 8$ .
4. Liczbę zespoloną  $\frac{(\sqrt{3}i+1)(-1-i\sqrt{3})}{1-i}$  przedstawić w postaci algebraicznej.

**Zestaw 40.***odp. str. 89*

1. Rozwiązać równanie  $(\bar{z})^3 - i\bar{z} = 0$ .
2. Narysować zbiór  $\{z \in \mathbb{C} : |iz-2| \leq 6, \arg z < 7\pi/6\}$ . Opisać brzeg zbioru.
3. Wyznaczyć pierwiastki wielomianu  $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ .
4. Liczbę zespoloną  $\left( \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} \right)^{25}$  przedstawić w postaci algebraicznej.